Chapter 4

Bessel Functions

第三章介绍了二阶常微分方程的复变函数的理论，给出了构造解的基本步骤.本章我们将步骤应用于求解塞尔方程.对于其它二阶方程的求解，例如勒让德方程，厄米方程等等，都可以用类似的步骤求解.

除 4.7 节外，用 z 表示自变量是复数.当自变量为实数时，我们会用 x 表示并进行说明.

贝塞尔方程的解集不是多项式。我们以此作为一个例子，说明求解非多项式解集的斯图姆-刘维尔方程的步骤。

4.1.1 贝塞尔方程及其解

考虑贝塞尔方程

$$z^2 w'' + z w' + (z^2 - \nu^2) w = 0 \tag{4.1.1}$$

其中ν是一个复参数，且$\mathrm{Re}\,\nu \geq 0$.这个方程的特征值是ν^2，对应于ν^2应该有两个线性无关的解.根据第三章 3.6 节的讨论，显然$z=0$是第一类奇点，$z=\infty$是第二类奇点.称(4.1.1)式为ν阶贝塞尔方程.现在来此方程在$z=0$附近解的表达式.

将方程(4.1.1)与第三章的(3.6.45)，(3.6.52)，(3.6.55)三式对照，可知$a_0=1, b_0=-\nu^2$，因此，关于$z=0$的判定方程，见(3.6.56)式，为

$$P_\nu(\lambda)=\lambda^2-\nu^2=0 \tag{4.1.2}$$

解出两个根$\lambda_1=\nu, \lambda_2=-\nu$.这里$\lambda_1, \lambda_2$是方程(4.1.1)关于$z=0$的两个指数. 我们来看这两个特征值对应的特征向量。

$$A_0=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b_0 & 1-a_0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \nu^2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \nu^2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_2 \\ \nu^2 a_1 \end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \frac{a_2}{a_1}=\lambda$$

只要两个特征值不相等，他们就对应不同的特征向量。当ν=0 时，两个特征值相等，必有一个特解是含对数项的。另外，当两个特征值之差为整数的时候，其中一个特解可能含有对数项。现在要注意的是，(4.1.1)式写成(3.6.53)式那样的形式之后，系数矩阵 A 是一个级数，而不是只有 A_0 一项。这是因为现在(4.1.1)式的 w 项前是一个级数，尽管只有两项。因此，现在必须采用级数法求解。

先按照(3.6.57a)式，在$0<|z|<\infty$的范围内，设一个特解的形式为

$$w(z)=z^\lambda h(z) \tag{4.1.3a}$$

将这一解的形式代入(4.1.1)式之后，得到 $h(z)$满足的方程可按照(3.6.59)写出，

$$z^2h''+(2\lambda+1)zh'+[\lambda(\lambda-1)+\lambda+z^2-\nu^2]h=0$$

$$zh''+(2\lambda+1)h'+zh=0 \tag{4.1.3b}$$

其中用到了$\lambda=\nu$.现在可以设函数 $h(z)$的形式为如下的级数，

$$h(z)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k z^k \tag{4.1.3c}$$

$$z\sum_{k=0}^{\infty}c_k z^{k-2}k(k-1)+\sum_{k=0}^{\infty}c_k z^{k-1}k(2\lambda+1)+z\sum_{k=0}^{\infty}c_k z^k=0$$

将它代入(4.1.3b).经过比较系数，得

$$\sum_{k=0}^{\infty}c_k k(k+2\lambda)z^k+\sum_{k=2}^{\infty}c_{k-2}z^k=0$$

$$c_0 0(0+2\lambda)+(1+2\lambda)z+\sum_{k=2}^{\infty}[c_k k(k+2\lambda)+c_{k-2}]z^k=0$$

把每一个 k 次项的系数都写出来。它们都为零.

$$
\begin{aligned}
&0(0+2\lambda)c_0=0 \\
&(1+2\lambda)c_1=0
\end{aligned} \tag{4.1.4}
$$

$$k(k+2\lambda)c_k+c_{k-2}=0, k\ge 2 \tag{4.1.5}$$

我们先考虑 $\lambda\neq 1/2$，也就是，

$$\nu\neq\pm 1/2 \tag{4.1.6}$$

($\nu=\pm 1/2$ 已被包含在以下情况 2)中.)由(4.1.4)，一定有

$$c_1=0 \tag{4.1.7a}$$

然后从式(4.1.5)得到: $c_1=c_3=c_5=\cdots=0$ (4.1.7b)

又，c_0 可以不为零.我们取: $c_0=1$ (4.1.8)

当取 $\lambda=\lambda_1=\nu$ 时，(4.1.5)式写成

$$k(k+2\nu)c_k+c_{k-2}=0, k\ge 2$$

由此可见

$$c_k=-\frac{c_{k-2}}{k(k+2\nu)}=0, k\ge 0 \tag{4.1.9}$$

可令

$$c_0=1，\quad c_{2m}=-\frac{c_{2(m-1)}}{4m(m+\nu)}=0, m\ge 1 \tag{4.1.10}$$

$$
\begin{aligned}
&c_2=-\frac{1}{4(1+\nu)}, c_4=-\frac{c_2}{8(2+\nu)}=\frac{1}{4^2 2!(2+\nu)(1+\nu)},\cdots \\
&c_{2m}=-\frac{(-1)^m}{4^m m!(\nu+1)_m}, m\ge 1
\end{aligned} \tag{4.1.11}
$$

其中 $(\nu+1)_m$ 是高斯符号，其定义见(3.3.16)式.代入(4.1.3)式，得到解的表达式

$$w_\nu(z)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{4^m m!(\nu+1)_m}z^{\nu+2m}，\quad 0<|z|<\infty \tag{4.1.12}$$

为了求出与(4.1.12)线性无关的特解，我们进一步考虑 $\lambda=\lambda_2=-\nu$ 的情况.在此，我们应回顾第三章 3.6.1 小节末尾的讨论.为此，分以下四种情形讨论.

1) $\lambda_1-\lambda_2=2\nu$ 非整数

此时，由于当 k 是整数时，$P_\nu(\lambda+k)\neq 0$，从(4.1.7)至(4.1.12)的推导都仍然适用，只要将这些公式中的 ν 换成 $-\nu$，就得到另一个解

$$w_{-\nu}(z)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{4^m m!(-\nu+1)_m}z^{-\nu+2m}，\quad 0<|z|<\infty \tag{4.1.13}$$

两个解 $w_{-\nu}$ 与 w_ν 是线性无关的，因为它们的展开式是由 z 的不同幂次项开始的.因此线性组合 $a_1 w_\nu + a_2 w_{-\nu}$ 只有当 $a_1 = a_2 = 0$ 时才恒为零.

2) $\lambda_1 - \lambda_2 = 2\nu = 2n+1, (n \geq 0)$，即 ν是正的半整数

在(4.1.5)式中,

$$k(k-2n-1)=\begin{cases} \neq 0, & k \neq 2n+1 \\ = 0, & k = 2n+1 \end{cases} \tag{4.1.14}$$

于是，当 $k < 2n+1$ 时，由(4.1.9)

$$k(k-2n-1)c_k + c_{k-2} = 0 \tag{4.1.15}$$

解出: $$c_1 = c_3 = c_5 = \cdots = c_{2n-1} = 0 \tag{4.1.16}$$

其次，当 $k = 2n+1$ 时，由(4.1.9)，$0c_{2n+1} + c_{2n-1} = 0$.可取 $c_{2n+1} = 0$.这样，

$$c_1 = c_3 = c_5 = \cdots = 0 \tag{4.1.17}$$

对于 k 是偶数的情况，(4.1.7)至(4.1.12)的推导都仍然适用.因此得到两个线性无关的解

$$w_{n+1/2}(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{4^m m!(n+1/2+1)_m} z^{n+1/2+2m}, \quad 0 < |z| < \infty \tag{4.1.18a}$$

$$w_{-n-1/2}(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{4^m m!(-n-1/2+1)_m} z^{-n-1/2+2m}, \quad 0 < |z| < \infty \tag{4.1.18b}$$

3) $\nu = n$ 是整数

此时，$\lambda_1 = n > 0, \lambda_2 = -n$.一个特解仍然按(4.1.12)式写出.

$$w_1(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{4^m m!(n+1)_m} z^{n+2m}, \quad 0 < |z| < \infty \tag{4.1.19}$$

另一个特解，根据对(3.6.44)式的讨论，应该出现带对数因子的项.为了求出这一特解，我们做变换

$$z = \mathrm{e}^s, \quad w(z) = u(s) \tag{4.1.20}$$

则(4.1.1)式变成

$$u''(s) + (\mathrm{e}^{2s} - n^2)u(s) = 0 \tag{4.1.21}$$

设这个方程有形如

$$u(s) = \mathrm{e}^{\lambda_2 s} \sum_{k=0}^{\infty} u_k(s) \mathrm{e}^{ks}, \quad (u_k(s) \text{ 是线性的}) \tag{4.1.22}$$

的解.因 $u_k(s)$是线性的，它的两次导数为零.将(4.1.22)代入(4.1.21)，

$$\sum_{k=0}^{\infty}[(\lambda_2+k)^2u_k(s)\mathrm{e}^{(\lambda_2+k)s}+2(\lambda_2+k)u_k'(s)\mathrm{e}^{(\lambda_2+k)s}]+(\mathrm{e}^{2s}-n^2)\mathrm{e}^{\lambda_2 s}\sum_{k=0}^{\infty}u_k(s)\mathrm{e}^{ks}=0$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}[2(\lambda_2+k)u_k'(s)+((\lambda_2+k)^2-n^2)u_k(s)]\mathrm{e}^{ks}+\sum_{k=0}^{\infty}u_k(s)\mathrm{e}^{(k+2)s}=0$$

整理，用到$\lambda_2{}^2-n^2=0$.

$$\sum_{k=0}^{\infty}[2(\lambda_2+k)u_k'(s)+k(2\lambda_2+k)u_k(s)]\mathrm{e}^{ks}+\sum_{k=2}^{\infty}u_{k-2}(s)\mathrm{e}^{ks}=0$$

$$2\lambda_2u_0'(s)+[2(\lambda_2+1)u_1'(s)+(2\lambda_2+1)u_1(s)]\mathrm{e}^{s}$$
$$+\sum_{k=2}^{\infty}[2(\lambda_2+k)u_k'(s)+k(2\lambda_2+k)u_k(s)+u_{k-2}(s)]\mathrm{e}^{ks}=0$$

其中用到$\lambda_2{}^2-n^2=0$.比较系数，可得

$$\begin{aligned}&2\lambda_2u_0'=0\\&2(\lambda_2+1)u_1'+(2\lambda_2+1)u_1=0\\&2(\lambda_2+k)u_k'+k(2\lambda_2+k)u_k+u_{k-2}=0,k\ge 2\end{aligned}\qquad(4.1.23a)$$

将 λ_2=$-n$ 代入.

$$\begin{aligned}&-2nu_0'=0\\&2(1-n)u_1'+(1-2n)u_1=0\\&2(k-n)u_k'+k(k-2n)u_k+u_{k-2}=0,k\ge 2\end{aligned}\qquad(4.1.23b)$$

显然，$2(1-n)u_1'+(1-2n)u_1=0$的解只能是： $u_1=0$

并因此有: $u_1=u_3=u_5=\cdots=0$ (4.1.24)

可令$u_0=1$，$2(2-n)u_2'+2(2-2n)u_2+u_0=0$.当$u_2$含 s 的一次项时，不满足此式，因此u_2只能是常数.同此，$u_k(0<k=2m<2n)$都只能是常数.

$$2m(2m-2n)u_{2m}+u_{2(m-1)}=0,(0<m<n)$$

$$u_2=\frac{u_0}{4(n-1)}=\frac{1}{4(n-1)},u_4=\frac{u_2}{4\cdot 2(n-2)}=\frac{1}{4^2\cdot 2(n-1)(n-2)}$$

$$u_{2m}=\frac{1}{4^m m!(n-1)(n-2)\cdots(n-m)}=\frac{(n-m-1)!}{4^m m!(n-1)!},(0<m<n)\qquad(4.1.25)$$

对$k=2n$，我们有

$$2nu_{2n}'+0u_{2n}+u_{2n-2}=0\ \Rightarrow\ u_{2n}'=-\frac{1}{2n}u_{2n-2}$$

两边积分。得到

$$u_{2n}=\alpha_0(s+\beta_0)\qquad(4.1.26)$$

其中

$$\alpha_0=-\frac{u_{2n-2}}{2n}=-\frac{1}{2n}\frac{(-1)^{n-1}}{4^{n-1}(n-1)!(1-n)_{n-1}}=-\frac{2}{4^n n!(n-1)!} \qquad (4.1.27)$$

而 β_0 为任一常数.

当 $k=2n+2$ 时， $2(n+2)u'_{2n+2}+4nu_{2n+2}+u_{2n}=0$.一般地，当 $k\geq 2n+2m,(m\geq 1)$

时，可设： $u_{2n+2m}=\alpha_m(s+\beta_m)$.

这里 α_m 和 β_m 都是待定常数.代入(4.1.23b)的

$$2(n+2m)u'_{2n+2m}+4m(n+m)u_{2n+2m}+u_{2n+2m-2}=0$$

得到

$$2(n+2m)\alpha_m+4m(n+m)\alpha_m(s+\beta_m)+\alpha_{m-1}(s+\beta_{m-1})=0$$
$$[4m(n+m)\alpha_m+\alpha_{m-1}]s+2(n+2m)\alpha_m+4m(n+m)\alpha_m\beta_m+\alpha_{m-1}\beta_{m-1}=0$$

比较系数后，s 的零次项和一次项系数都应该为零.

$$4m(n+m)\alpha_m+\alpha_{m-1}=0$$
$$2(n+2m)\alpha_m+4m(n+m)\alpha_m\beta_m+\alpha_{m-1}\beta_{m-1}=0$$

由第一式得到

$$\alpha_m=-\frac{\alpha_{m-1}}{4m(n+m)}=\frac{1}{4m(n+m)}\frac{\alpha_{m-2}}{4(m-1)(n+m-1)}=\frac{(-1)^m\alpha_0}{4^m m!(n+1)_m} \qquad (4.1.28)$$

代入第二式

$$2(n+2m)\alpha_m+4m(n+m)\alpha_m\beta_m-4m(n+m)\alpha_m\beta_{m-1}=0$$
$$n+2m+2m(n+m)\beta_m-2m(n+m)\beta_{m-1}=0$$
$$\beta_m=\beta_{m-1}-\frac{n+2m}{2m(n+m)}=\beta_{m-1}-\frac{1}{2}(\frac{1}{m}+\frac{1}{n+m})$$

由此得

$$\beta_m=\beta_0-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m}(\frac{1}{j}+\frac{1}{n+j})$$

令

$$H_m=\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{j}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{m} \qquad (4.1.29)$$

并选取

$$\beta_0=-\frac{1}{2}(H_n-\gamma)=-\frac{1}{2}\psi(n) \qquad (4.1.30)$$

其中γ是欧拉常数，第二个等式可见本章附录 4A.那么得到

$$\beta_m=-\frac{1}{2}(H_m+H_{m+n}-2\gamma)=-\frac{1}{2}[\psi(m+1)+\psi(m+n+1)] \qquad (4.1.31)$$

总结以上，我们得到：当$k=2m<2n$，有(4.1.25)式；当$k\geq 2n+2m,(m\geq 0)$时，有(4.1.26)至(4.1.31)式.代入(4.1.22)式，

$$u(s)=\mathrm{e}^{\lambda_2 s}\sum_{m=0}^{n-1}u_{2m}\mathrm{e}^{2ms}+\mathrm{e}^{\lambda_2 s}\sum_{m=0}^{\infty}\alpha_m(s+\beta_m)\mathrm{e}^{(2n+2m)s} \tag{4.1.32}$$

再把$z=\mathrm{e}^s$代回.

$$\begin{aligned}
w_2(z)&=z^{-n}\sum_{m=0}^{n-1}u_{2m}z^{2m}+z^{-n}\sum_{m=0}^{\infty}\alpha_m(\mathrm{Ln}z+\beta_m)z^{2n+2m}\\
&=\mathrm{Ln}z\sum_{m=0}^{\infty}\alpha_m z^{n+2m}+\sum_{m=0}^{\infty}\alpha_m\beta_m z^{n+2m}+\sum_{m=0}^{n-1}u_{2m}z^{2m-n}\\
&=\alpha_0\mathrm{Ln}z\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{4^m m!(n+1)_m}z^{n+2m}\\
&-\frac{\alpha_0}{2}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m[\psi(m+1)+\psi(m+n+1)]}{4^m m!(n+1)_m}z^{n+2m}+\sum_{m=0}^{n-1}\frac{(n-m-1)!}{4^m m!(n-1)!}z^{2m-n}
\end{aligned} \tag{4.1.33}$$

其中α_0是(4.1.27)式.

式(4.1.19)的w_1和(4.1.33)的w_2是线性无关的.它们构成了方程(4.1.1)在$\nu^2=n^2\neq 0$时的一个基本解组.

4) $\nu=0$

此时，$\lambda_1=\lambda_2=0$.这种情况可以作为(C)中的$n=0$的特例.只要在(4.1.23b)中令$n=0$，以后各式都适用.相应于(4.1.32)式就只有第二项而没有第一项.因此对应于(4.1.19)和(4.1.33)写出的两个特解是：

$$w_1(z)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{4^m m!(1)_m}z^{2m}=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{4^m (m!)^2}z^{2m},\quad 0<|z|<\infty \tag{4.1.34}$$

$$\begin{aligned}
w_2(z)&=\alpha_0\mathrm{Ln}z\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{4^m m!(1)_0}z^{2m}-\frac{\alpha_0}{2}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m[\psi(m+1)+\psi(m+1)]}{4^m m!(1)_0}z^{2m}\\
&=\alpha_0\mathrm{Ln}z\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!}(\frac{z}{2})^{2m}-\alpha_0\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m\psi(m+1)}{m!}(\frac{z}{2})^{2m}
\end{aligned} \tag{4.1.35}$$

总结，贝塞尔方程的特征值是ν^2，它的两个线性无关的特解则是分别对应于ν和$-\nu$的.当ν非整数时，解式(4.1.12)和(4.1.13)对应于(3.6.43)和(3.6.44)，或者(3.6.57)，并且其中$h_2(z)=0$的情况.当ν是整数时，解式(4.1.19)和(4.1.33)同样对应于(3.6.43)和(3.6.44)，或者(3.6.57)，只是其中$h_2(z)\neq 0$.式(4.1.34)和(4.1.35)只是式(4.1.19)和(4.1.33)在$\nu=0$时的特例.

第三章中曾经提到，当A_0的两个特征值之差为整数时，第二个特解可能是有对数项的.对于贝塞尔方程的情况，我们看到，当两个特征值之差为奇数时，两个

特解都是无限幂级数的形式；当两个特征值之差为偶数时，第二个特解含有对数因子.

以上解贝塞尔方程，是求出 A_0 的特征值之后，将幂级数解的形式(4.1.3)直接代入二阶微分方程(4.1.1)，即 $w''(z)+a(z)w'(z)+b(z)w(z)=0$ 的形式来求各系数.第三章3.6 节则是从一阶微分方程组(3.6.26)，即 $w'=A(z)w$ 的形式来求各系数.求系数的方程组是(3.6.32).这个方程组对任意二阶微分方程都是适用的.我们可以把对应于贝塞尔方程的方程组(3.6.32)写出来.

在(4.1.1)中，$a(z)=\dfrac{1}{z},b(z)=\dfrac{z^2-\nu^2}{z^2}$.因此，对照(3.6.52)可知，$c(z)=1$，$d(z)=z^2-\nu^2$.方程 $w'=A(z)w$ 右边的系数矩阵就是

$$A=\frac{1}{z}\begin{pmatrix}0 & 1\\ -d(z) & 1-c(z)\end{pmatrix}=\frac{1}{z}\begin{pmatrix}0 & 1\\ -(z^2-\nu^2) & 0\end{pmatrix}=\frac{1}{z}\left[\begin{pmatrix}0 & 1\\ \nu^2 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 0\\ -1 & 0\end{pmatrix}z^2\right]$$

可见，系数矩阵做泰勒展开后，只有两项：

$$A_0=\begin{pmatrix}0 & 1\\ \nu^2 & 0\end{pmatrix},A_1=0,A_2=\begin{pmatrix}0 & 0\\ -1 & 0\end{pmatrix},A_i=0,i\geq 3$$

因此，按照式(3.6.32)式写出一系列方程如下左列.

$(\lambda I-A_0)w_0=0$	$(\lambda I-A_0)w_0=0$
$((\lambda+1)I-A_0)w_1=A_1w_0=0$	$((\lambda+1)I-A_0)w_1=0$
$((\lambda+2)I-A_0)w_2=A_2w_0+A_1w_1=A_2w_0$	$((\lambda+2)I-A_0)w_2=A_2\ w_0$
$((\lambda+3)I-A_0)w_3=A_2\ w_1$	$((\lambda+3)I-A_0)w_3=0$
$((\lambda+4)I-A_0)w_4=A_2\ w_2$	$((\lambda+4)I-A_0)w_4=A_2\ w_2$
$((\lambda+5)I-A_0)w_5=A_2\ w_3$	$((\lambda+5)I-A_0)w_5=0$

等等.

对于第一个特征值 $\lambda_1=\nu$，可求出 w_0.但是 $\nu+1$ 非 A_0 的特征值，因此，只能有 $w_1=0$.由于 $\nu+2$ 非 A_0 的特征值，可以求出非零的 w_2.由于 $\nu+3$ 非 A_0 的特征值并且 $w_1=0$，因此得到 $w_2=0$.接下来，由于由于 $\nu+4$ 非 A_0 的特征值，可以求出非零的 w_4.等等.如此下去，我们容易看到，凡是奇次项的系数都为零，$w_{2i+1}=0$.只有偶次项的系数不为零，如以上右列所示.这就是为什么我们求得的贝塞尔方程的特解(4.1.12)中只有偶次项而无奇次项.

第二个特征值 $\lambda_2=-\nu$.若 $\lambda_1-\lambda_2=2\nu$ 非整数，那么，将 $-\nu$ 代入上述左列方程组，如法炮制，也得到一个解，就是式(4.1.13).

若两个特征值分别为 $\lambda_1 = n+1/2$ 和 $\lambda_1 = -(n+1/2)$，那么，把 $n+1/2$ 和 $-(n+1/2)$ 分别代入上述左列方程组，也得到两个特解。就是式(4.1.18).

若两个特征值分别为 $\lambda_1 = n$ 和 $\lambda_1 = -n$，把 n 代入上述左列方程组，得到特解就是式(4.1.12)中取 $\nu = n$.但是，若将另一个本征值 $-n$ 代入上述左列方程组，一开始，还是可以按照这一步骤求各系数.但是，当 k=2n 时，求系数的方程为

$$((-n+2n)I - A_0)\, w_{2n+2} = A_2\ w_{2n}$$

而 n 恰是 A_0 的特征值.因此，w_{2n+2} 无解，再往后的系数当然也就无法求解了.无法求解，意味着这一特征函数的形式为 $z^{-n}\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ 的假设不正确.这时，只能做(3.6.33)式那样的变换，然后按照一般解的步骤，式(3.6.37)来求解.对应到本节，就是变换(4.1.20)和方程组(4.1.23).

4.1.2 第一和第二类贝塞尔函数

根据以上的讨论，我们可以把贝塞尔方程的基本解组总结如下.

(1) 当ν非负整数

第一个特解(4.1.12)对于任意的ν都适用.习惯上将其除以常数 $2^{\nu}\Gamma(\nu+1)$ 之后记为 J_ν.

$$J_\nu(z) = \frac{w_\nu(z)}{2^\nu \Gamma(\nu+1)} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\Gamma(m+\nu+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2m+\nu},\quad 0 < |z| < \infty$$

其中 Γ 函数的定义见(3.3.17)式.另一个线性无关的特解是

$$J_{-\nu}(z) = \frac{w_{-\nu}(z)}{2^{-\nu} \Gamma(-\nu+1)} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\Gamma(m-\nu+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2m-\nu},\quad 0 < |z| < \infty$$

经常可以把此两式统一写成

$$J_{\pm\nu}(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\Gamma(m\pm\nu+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2m\pm\nu} \qquad (4.1.36)$$

称 $J_\nu(z)$ (ν非负整数)为**ν阶第一类贝塞尔函数**，简称**贝塞尔函数**.由于(4.1.36)式的求和中有无限多项，因此贝塞尔函数毫无疑问属于特殊函数.

(2) 当 $\nu = n$ 为正整数

此时，(4.1.36)是仍适用，$\Gamma(m+n+1) = (m+n)!$.这个特解就是

$$J_n(z)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!(m+n)!}(\frac{z}{2})^{2m+n}\text{ ,}\tag{4.1.37}$$

称 $J_n(z)$ (n 为整数)为整数阶贝塞尔函数.注意 $J_n(z)$ 与 $J_{-n}(z)$ 不是线性无关的(如果是线性无关的，也就不需要(4.1.33)这个解了).我们后面将证明它们之间有以下关系.

$$J_{-n}(z)=(-1)^n J_n(z)\tag{4.1.38}$$

贝塞尔方程的另一个特解应该是(4.1.33)的形式.常将(4.1.33)与(4.1.37)式作线性组合，记为Y_n.

$$Y_n(z)=-\frac{2^n(n-1)!}{\pi}w_2(z)-\frac{2\ln 2}{\pi}J_n(z)\tag{4.1.39}$$

我们来看 $w_2(z)$ 的表达式(4.1.33).当 n 是正整数时，

$$(n+1)_k=\frac{(n+k)!}{n!}$$

式(4.1.33)右边第一项可写成

$$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{4^m m!(n+1)_m}z^{n+2m}=2^n n!\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!(n+m)!}(\frac{z}{2})^{n+2m}=2^n n!J_n(z)$$

其中用到(4.1.37).式(4.1.33)写成

$$\begin{aligned}&w_2(z)=\alpha_0 2^n n!J_n(z)\mathrm{Lnz}\\&-\frac{\alpha_0}{2}2^n n!\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m[\psi(m+1)+\psi(m+n+1)]}{m!(n+m)!}(\frac{z}{2})^{n+2m}+\frac{1}{2^n}\sum_{m=0}^{n-1}\frac{(n-m-1)!}{m!(n-1)!}(\frac{z}{2})z^{2m-n}\end{aligned}$$

代入(4.1.39)式，把 (4.1.27)式的α_0 也代入.

$$\begin{aligned}Y_n(z)&=-\frac{2^n(n-1)!}{\pi}\{-\frac{2}{4^n n!(n-1)!}2^n n!J_n(z)\mathrm{Lnz}\\&+\frac{2^n n!}{4^n n!(n-1)!}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m[\psi(m+1)+\psi(m+n+1)]}{m!(n+m)!}(\frac{z}{2})^{n+2m}\\&+\frac{1}{2^n}\sum_{m=0}^{n-1}\frac{(n-m-1)!}{m!(n-1)!}(\frac{z}{2})^{2m-n}\}-\frac{2\ln 2}{\pi}J_n(z)\\&=\frac{2}{\pi}J_n(z)\mathrm{Ln}\frac{z}{2}-\frac{1}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m[\psi(m+1)+\psi(m+n+1)]}{m!(n+m)!}(\frac{z}{2})^{n+2m}\\&-\frac{1}{\pi}\sum_{m=0}^{n-1}\frac{(n-m-1)!}{m!}(\frac{z}{2})^{2m-n}\end{aligned}\tag{4.1.40}$$

$Y_n(z)$ 称为**第二类贝塞尔函数**或**诺依曼函数**.有些文献用 $N_n(z)$ 来标记第二类贝塞尔函数.

诺依曼函数经常用另一种更简洁的形式来表达.可以证明：

$$Y_n(z)=\lim_{\nu\to n}\frac{J_\nu(z)\cos\nu\pi-J_{-\nu}(z)}{\sin\nu\pi} \tag{4.1.41}$$

由(4.1.38)式我们知(4.1.41)式右边是零比零型.但是极限是存在的.可以证明，表达式(4.1.41)和(4.1.40)是相等的.

当ν非实数中的整数时，(4.1.41)式右边分母不为零.可以直接写

$$Y_\nu(z)=\frac{J_\nu(z)\cos\nu\pi-J_{-\nu}(z)}{\sin\nu\pi} \tag{4.1.42}$$

此式右边的$J_\nu(z)$与$J_{-\nu}(z)$是线性无关的.因此这样叠加得到的$Y_\nu(z)$也就和$J_\nu(z)$线性无关.因而，贝塞尔方程的通解不仅可以写成$J_\nu(z)$与$J_{-\nu}(z)$的线性叠加，也可以写成$J_\nu(z)$与$Y_\nu(z)$的线性叠加.

$$w(z)=AJ_\nu(z)+BY_\nu(z) \tag{4.1.43}$$

这是最常用的通解的表达式.当$\nu=n$为正整数时，就是(4.1.37)的J_n与(4.1.41)的Y_n线性叠加.

§4.2 贝塞尔函数的基本性质

根据ν阶贝塞尔函数的定义，ν可以是任意复数的.不过实际上用到的都是ν为实数的情况.因此，从此往下，我们都默认ν是实数.

由贝塞尔函数的定义，易得：

$$J_\nu(-z)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!\Gamma(m+\nu+1)}(-\frac{z}{2})^{2m+\nu}=(-1)^\nu J_\nu(z) \tag{4.2.1}$$

若宗量$z=x$是实数，那么$J_\nu(x)$和$Y_\nu(x)$都是实函数.

4.2.1 贝塞尔函数的递推公式

(1) 基本的递推公式

$$(z^\nu J_\nu)'=z^\nu J_{\nu-1} \tag{4.2.2}$$

$$(z^{-\nu}J_\nu)'=-z^{-\nu}J_{\nu+1} \tag{4.2.3}$$

$$J_\nu=\frac{z}{2\nu}(J_{\nu-1}+J_{\nu+1}) \tag{4.2.4}$$

$$J_\nu'=\frac{1}{2}(J_{\nu-1}-J_{\nu+1})=J_{\nu-1}(z)-\frac{\nu}{z}J_\nu(z)=\frac{\nu}{z}J_\nu(z)-J_{\nu+1}(z) \tag{4.2.5}$$

本章将这四式统称为递推公式.如果分得细致一些，可以将式(4.2.2)和(4.2.3)称为微分关系.下面来证明这四式.

证明：由 J_ν 的表达式 $J_\nu(z)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{k!}\frac{1}{\Gamma(k+1+\nu)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k+\nu}$，两边乘上 z^ν 再对 z 求导，得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(z^\nu J_\nu)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+1+\nu)}(\frac{1}{2})^{2k+\nu}z^{2k+2\nu}]$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(2k+2\nu)}{k!\Gamma(k+1+\nu)}(\frac{1}{2})^{2k+\nu}z^{2k+2\nu-1}=z^\nu\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+\nu)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k+\nu-1}=z^\nu J_{\nu-1}$$

即(4.2.2)式.同理

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(z^{-\nu}J_\nu)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+1+\nu)}(\frac{1}{2})^{2k+\nu}z^{2k}]$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^{-\nu}}{2}\frac{(-1)^k 2k}{k!\Gamma(k+1+\nu)}(\frac{1}{2})^{2k+\nu}z^{2k-1}=-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^{-\nu}(-1)^{k-1}}{(k-1)!\Gamma(k+1+\nu)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k+\nu-1}$$

令 $n=k-1$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(z^{-\nu}J_\nu)=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{-\nu}(-1)^n}{n!\Gamma(n+1+\nu+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2n+1+\nu}=-z^{-\nu}J_{\nu+1}$$

即(4.2.3)式.把左边的求导写出来，

$$(z^\nu J_\nu)'=\nu z^{\nu-1}J_\nu+z^\nu J_\nu'=z^\nu J_{\nu-1} \tag{4.2.6a}$$

$$(z^{-\nu}J_\nu)'=-\nu z^{-\nu-1}J_\nu+z^{-\nu}J_\nu'=-z^{-\nu}J_{\nu+1} \tag{4.2.6b}$$

此两式化简得

$$\nu J_\nu+zJ_\nu'=zJ_{\nu-1} \tag{4.2.7a}$$

$$-\nu J_\nu+zJ_\nu'=-zJ_{\nu+1} \tag{4.2.7b}$$

此两式相减，得

$$2\nu J_\nu=z(J_{\nu-1}+J_{\nu+1})$$

即得(4.2.4)式.

(4.2.7)的两式相加，得 $2J_\nu'=J_{\nu-1}-J_{\nu+1}$，这就是(4.2.5)式的第一个等号.再应用(4.2.4)式得到(4.2.5)式的后面两个等号.

根据微分关系，我们可以通过ν阶贝塞尔函数，求出低一阶($\nu-1$阶)或高一阶($\nu+1$阶)的贝塞尔函数.特别，当 $\nu=0$ 时，我们有

$$J_0'(z)=J_{-1}(z)=-J_1(z)$$

由此可以断言，$J_0(z)$ 的极值点就是 $J_1(z)$ 的零点.

另外两个递推关系表明，有两个相邻阶的贝塞尔函数，就可以求出更高一阶的贝塞尔函数.

(2) 进一步的递推公式

$$(\frac{1}{z}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z})^m(z^\nu J_\nu)=z^{\nu-m}J_{\nu-m} \tag{4.2.8a}$$

$$(\frac{1}{z}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z})^m(z^{-\nu} J_\nu)=(-1)^m z^{-\nu-m}J_{\nu+m} \tag{4.2.8b}$$

证明：由式(4.2.2)可得

$$\frac{1}{z}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(z^\nu J_\nu)=z^{\nu-1}J_{\nu-1} \tag{4.2.9}$$

此即式(4.2.8a)当 $m=1$ 的情况.把 $\frac{1}{z}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}$ 视为一整体运算符(算子).反复运用(4.2.9)式，得到

$$\left(\frac{1}{z}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right)^2(z^\nu J_\nu)=\left(\frac{1}{z}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right)\left(\frac{1}{z}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right)(z^\nu J_\nu)=\left(\frac{1}{z}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right)(z^{\nu-1}J_{\nu-1})=z^{\nu-2}J_{\nu-2} \tag{4.2.10}$$

可见:算子 $\frac{1}{z}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}$ 作用在函数 $z^\nu J_\nu$ 上的结果是使指标 ν 减 1.重复以上步骤,可得(4.2.8a)式.同理，从(4.2.3)式出发，可证式(4.2.8b).

(3) 第二类贝塞尔函数的递推公式

式(4.2.2)-(4.2.5)中，把表示第一类贝塞尔函数的 J 换成第二类贝塞尔函数 Y，公式仍然都成立.因此第二类贝塞尔函数的递推公式如下.

$$\begin{aligned}
&(z^\nu Y_\nu)'=z^\nu Y_{\nu-1}\\
&(z^{-\nu} Y_\nu)'=-z^{-\nu} Y_{\nu+1}\\
&Y_{\nu-1}+Y_{\nu+1}=\frac{2\nu}{z}Y_\nu\\
&Y_{\nu-1}-Y_{\nu+1}=2Y_\nu'
\end{aligned} \tag{4.2.11}$$

其中前两式可以根据定义(4.1.42)和(4.2.2) (4.2.3)式得到.例如

$$[z^\nu Y_\nu(z)]'=\frac{[z^\nu J_\nu(z)]'\cos\nu\pi-[z^{-(-\nu)}J_{-\nu}(z)]'}{\sin\nu\pi}$$

$$=z^\nu\,\frac{J_{\nu-1}(z)\cos\nu\pi+J_{-(\nu-1)}(z)}{\sin\nu\pi}=z^\nu Y_{\nu-1}(z)$$

式(4.2.11)的后两式可以由前两式得到.

4.2.2 贝塞尔函数的渐近式

当 $z\to\infty$ 而ν固定时，

$$J_\nu(z\to\infty)\sim\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cos\left(z-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right),\quad(-\pi<\arg z<\pi) \tag{4.2.12}$$

$$Y_\nu(z\to\infty)\sim\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\sin\left(z-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right),\quad(-\pi<\arg z<\pi) \tag{4.2.13}$$

当 $z\to 0$ 时，

$$J_\nu(z\to 0)\sim \frac{1}{\Gamma(\nu+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu} \tag{4.2.15a}$$

如果ν是实数，那么，对于$\nu>0$，有

$$J_\nu(z\to 0)\sim \frac{1}{\Gamma(\nu+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu}\to 0 \tag{4.2.15b}$$

$$J_{-\nu}(z\to 0)\sim \frac{1}{\Gamma(-\nu+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{-\nu}\to \infty \tag{4.2.15c}$$

4.2.3 贝塞尔函数的零点

(1) 关于零点的性质罗列如下

(i) 对于任何给定的实数ν，$J_\nu(z)$有无穷多个实数零点.即在这些实数z点上，$J_\nu(z)=0$.

(ii) 当ν是实数且大于 0 时，必有

$$J_\nu(0)=0 \tag{4.2.16}$$

这一点从表达式(4.1.36)中容易看出.

(iii) $J_\nu(z)$除去$z=0$(如果它是零点)可能是例外，都是一阶零点.

事实上，如果$z_0\neq 0$是$J_\nu(z)$的二级或者更高级零点，则有$J_\nu(z_0)=0$且$J'_\nu(z_0)=0$，而$J_\nu(z)$满足一个线性齐次二阶微分方程.于是由第三章叙述的微分方程的解的存在唯一性定理，必有$J_\nu(z)\equiv 0$.

(iv) 当$\nu>-1$时，$J_\nu(z)$的所有零点都是实数.即当$J_\nu(z)=0$时，z 的位置一定在实数轴上.注意这一点与性质(i)的区别.在(i)中，除了实零点，还可能有复零点.

(v) 若$J_\nu(z)=0$.则$J_\nu(-z)=0$.

这说明，$J_\nu(z)$的零点是关于原点对称分布的.

(vi) $J_\nu(z)$与$J_{\nu+1}(z)$无公共零点.

事实上，把微分关系$(z^{-\nu}J_\nu)'=-z^{-\nu}J_{\nu+1}$展开后，得到$J'_\nu(z)-\nu z^{-1}J_\nu(z)=-J_{\nu+1}(z)$.若在$z_0$点有$J_\nu(z_0)=J_{\nu+1}(z_0)=0$，则必有$J'_\nu(z_0)=0$.说明$z_0$是$J_\nu(z)$的二阶零点.这与(iii)的结论矛盾.

以下三条我们针对J_ν当$\nu>0$的情况，已知零点都是实数 x，且零点的分布关

于原点对称.我们只考虑正半实轴 $x>0$ 上的零点.

(vi) 在 $J_{\nu}(x)$ 的两个相邻的正零点之间，分别有且只有一个 $J_{\nu-1}(x)$ 和 $J_{\nu+1}(x)$ 的零点.反之亦然.

(vii) $J_{\nu}(x)$ 的最小正零点比 $J_{\nu+1}(x)$ 的最小正零点更接近于原点.

(viii) 方程 $J_{\nu}'(x)=0$ 有无穷多个实根.

更一般地，可以证明，方程

$J_{\nu}(x)+hJ_{\nu}'(x)$ =0，(h 为常数)

有无穷多个实根.

从上面所述贝塞尔函数的零点性质，可见实变量的贝塞尔函数 $J_{\nu}(x)$ 的图形很像三角函数的图形.再联系前面介绍的渐近式.渐近式确实有一个三角函数的因子.此外，渐近式还有一个衰减因子 $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$.因而，$J_{\nu}(x)$ 是一个衰减振荡函数.它在 x 轴上下来回摆动而且逐渐靠近 x 轴.

4.2.4 朗斯基行列式

由(3.6.46)式，我们可以计算基本解组 $J_{\pm\nu}(z)$ 的朗斯基行列式.

$$J_{\nu}J_{-\nu}'-J_{-\nu}J_{\nu}'=c\exp[-\int\frac{1}{z}\,\mathrm{d}z\,]=c\exp[-\ln z\,]=\frac{c}{z}$$

为了定出常数 c，只需要将 $J_{\nu}J_{-\nu}'-J_{-\nu}J_{\nu}'$ 的表达式中挑出 z^{-1} 项的系数.将贝塞尔函数及其导数的表达式写出如下.

$$J_{\pm\nu}(z)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!\Gamma(m\pm\nu+1)}(\frac{z}{2})^{2m\pm\nu},\quad J_{\pm\nu}'(z)=\frac{1}{2}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m(2m\pm\nu)}{m!\Gamma(m\pm\nu+1)}(\frac{z}{2})^{2m\pm\nu-1}$$

$$J_{\nu}(z)J_{-\nu}'(z)=\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{m+n}}{m!\Gamma(m+\nu+1)}\frac{1}{2}\frac{(2n-\nu)}{n!\Gamma(n-\nu+1)}(\frac{z}{2})^{2m+\nu+2n-\nu-1}$$

$$J_{-\nu}(z)J_{\nu}'(z)=\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{m+n}}{m!\Gamma(m-\nu+1)}\frac{1}{2}\frac{(2n+\nu)}{n!\Gamma(n+\nu+1)}(\frac{z}{2})^{2m-\nu+2n+\nu-1}$$

观察可知，只有 m=n=0 的项符合要求.因而，

$$z[\frac{1}{\Gamma(\nu+1)}(\frac{z}{2})^{\nu}\frac{1}{2}\frac{(-\nu)}{\Gamma(-\nu+1)}(\frac{z}{2})^{-\nu-1}-\frac{1}{\Gamma(-\nu+1)}(\frac{z}{2})^{-\nu}\frac{1}{2}\frac{\nu}{\Gamma(\nu+1)}(\frac{z}{2})^{\nu-1}]$$

$$=-\frac{2\nu}{\Gamma(\nu+1)\Gamma(-\nu+1)}=-\frac{2}{\Gamma(\nu)\Gamma(-\nu+1)}$$

再利用Γ函数的公式，

$$\Gamma(\nu)\Gamma(-\nu+1)=\frac{\pi}{\sin\nu\pi}$$

得到

$$J_\nu J'_{-\nu} - J_{-\nu} J'_\nu = -\frac{2}{\pi z}\sin\nu\pi \tag{4.2.19}$$

注意，ν不能为整数.

如果我们取 $J_\nu(z)$ 和 $Y_\nu(z)$ 作为基本解组，那么对于ν为整数也成立.由 $Y_\nu(z)$ 的定义，可知

$$\begin{aligned}J_\nu Y'_\nu - Y_\nu J'_\nu &= \frac{1}{\sin\nu\pi}[J_\nu(J'_\nu\cos\nu\pi - J'_{-\nu}) - (J_\nu\cos\nu\pi - J_{-\nu})J'_\nu] \\ &= -\frac{1}{\sin\nu\pi}(J_\nu J'_{-\nu} - J_{-\nu}J'_\nu) = \frac{2}{\pi z}\end{aligned} \tag{4.2.20}$$

还可以证明：

$$\begin{vmatrix} J_\nu(z) & J_{\nu-1}(z) \\ Y_\nu(z) & Y_{\nu-1}(z)\end{vmatrix} = \begin{vmatrix} J_\nu(z) & J'_\nu(z) \\ Y_\nu(z) & Y'_\nu(z)\end{vmatrix} = \frac{2}{\pi z}$$

特别当$\nu = 1$时，

$$J_1(z)Y_0(z) - J_0(z)Y_1(z) = \frac{2}{\pi z}$$

§4.3 整数阶贝塞尔函数

在 J_ν 的表达式中取$\nu = n$是整数就得到整数阶贝塞尔函数.

$$J_n(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(n+k+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k} \tag{4.3.1}$$

我们现在来证明(4.1.38)式.

$$\begin{aligned}J_{-n}(z) &= \left(\frac{z}{2}\right)^{-n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(-n+k+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k} \\ &= \left(\frac{z}{2}\right)^{-n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(-n+k+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k} + \left(\frac{z}{2}\right)^{-n} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(-n+k+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k}\end{aligned}$$

当$k < n$时，$\Gamma(-n+k+1) = \infty$.因此上式第一项为零.第二项中令$-n+k = l$

$$J_{-n}(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^{-n} \sum_{n+l=n}^{\infty} \frac{(-1)^{n+l}}{(n+l)!\Gamma(l+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2(n+l)} = (-1)^n\left(\frac{z}{2}\right)^{n} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{(n+l)!\Gamma(l+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2l}$$

与(4.3.1)式比较，得

$$J_{-n}(z) = (-1)^n J_n(z) \tag{4.3.2}$$

由此结果与(4.1.41)式，我们还可得到

$$Y_{-n}(z) = (-1)^n Y_n(z) \tag{4.3.3}$$

在(4.2.3)式中，令$\nu = 0$，可得

$$J_0'(z) = -J_1(z) \tag{4.3.4}$$

由式(4.2.2)式中，令$\nu = 1$，可得

$$(zJ_1(z))' = zJ_0(z) \tag{4.3.5}$$

如果$z = x$是实数，则可以写成如下的积分形式.

$$xJ_1(x) = \int_0^x \xi J_0(\xi)\mathrm{d}\xi \tag{4.3.6}$$

4.3.1 奇偶性和特殊点的值

(1) 奇偶性

由(4.2.1)式得知，

$$J_n(-z) = (-1)^n J_n(z) \tag{4.3.7a}$$

即整数解贝塞尔函数$J_n(z)$的奇偶性依阶数n而定.容易看到，当n是奇数(偶数)时，

$J_n(z)$中只包含z的奇次(偶次)项.

$$\begin{aligned}Y_n(-z) &= \lim_{\nu\to n}\frac{J_\nu(-z)\cos\nu\pi - J_{-\nu}(-z)}{\sin\nu\pi}\\ &= \lim_{\nu\to n}\frac{(-1)^n J_\nu(z)\cos\nu\pi - (-1)^{-n}J_{-\nu}(z)}{\sin\nu\pi} = (-1)^n Y_n(z), n\neq 0\end{aligned} \tag{4.3.7b}$$

注意此式对于$n = 0$不适用.

(2) $z\to 0$时的值

$$J_0(0) = 1; J_n(0) = 0, n\geq 1 \tag{4.3.8a}$$

由(4.1.40)式容易得到，当$n = 0$时，

$$Y_0(z\to 0) \sim \frac{2}{\pi}\ln\frac{z}{2} \to -\infty \tag{4.3.8b}$$

当$z\to 0$时，对于$n > 0$，有

$$Y_n(z\to 0) \sim -\frac{(n-1)!}{\pi}\left(\frac{2}{z}\right)^n \tag{4.3.8c}$$

4.3.2 整数阶贝塞尔函数的母函数

(1) 母函数关系

整数阶贝塞尔函数$J_n(z)$的母函数关系如下：

$$\mathrm{e}^{z(t-1/t)/2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z)t^n = \cdots + J_{-1}(z)t^{-1} + J_0(z)t^0 + J_1(z)t + J_2(z)t^2 + \cdots \tag{4.3.9}$$

因此，整数阶贝塞尔函数 $J_n(z)$ 的母函数是 $\mathrm{e}^{z(t-1/t)/2}$.式(4.3.9)的证明如下.

利用指数函数的幂级数展开式

$$\mathrm{e}^{zt/2}=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{l!}(\frac{z}{2})^l t^l,\mathrm{e}^{-z/2t}=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}(-\frac{z}{2t})^m$$

把这两个展开式的左右两边分别相乘，

$$\mathrm{e}^{zt/2}\mathrm{e}^{-z/2t}=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{l!}(\frac{zt}{2})^l\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}(-\frac{z}{2t})^m=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!l!}(\frac{z}{2})^{l+m}t^{l-m}$$

后一步合并成按 t 的幂次排列.现在令 $l-m=n$,把对 l 的求和换成对 n 的求和.不过，因为 l 和 m 的变化范围都是从 0 至∞，现在 n 的变化范围必须是从$-\infty$到∞.(如果将 n 的变化范围写成从$-m$ 到∞，就会漏掉从$-\infty$到$-(m+1)$的项.)

$$\mathrm{e}^{zt/2}\mathrm{e}^{-z/2t}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!(n+m)!}(\frac{z}{2})^{n+2m}t^n=\sum_{n=-\infty}^{\infty}J_n(z)t^n$$

证明完毕.由于(4.3.9)式的求和范围是从 $-\infty$ 至 $+\infty$，这一母函数关系未列入表 3.5 中.

在(4.3.9)式中令 $t=1$，得到

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}J_n(z)=1 \tag{4.3.10a}$$

利用(4.3.2)式得到：

$$J_0(z)+2\sum_{n=1}^{\infty}J_{2n}(z)=1 \tag{4.3.10b}$$

又在(4.3.9)式中将 t 换成 $-t$

$$\mathrm{e}^{-z(t-1/t)/2}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}J_n(z)(-1)^n t^n$$

与(4.3.9)式相乘，有

$$1=\sum_{n=-\infty}^{\infty}J_n(z)\,t^n\sum_{m=-\infty}^{\infty}J_m(z)\,(-1)^m t^m=\sum_{n=-\infty}^{\infty}t^n\sum_{m=-\infty}^{\infty}(-1)^m\,J_m(z)\,J_{n-m}(z) \tag{4.3.11}$$

比较(4.3.11)两端 t 的零次方项系数，利用(4.3.7)式，得到如下关系.

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}J_n^2(z)=J_0^2(z)+2\sum_{n=1}^{\infty}J_n^2(z)=1$$

(2) 加法公式

利用贝塞尔函数的母函数关系可得到贝塞尔函数的加法公式：

$$J_n(z_1+z_2)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}J_{n-m}(z_1)J_m(z_2) \tag{4.3.12a}$$

为此，可写出母函数如下.

$$\exp[(\mathrm{z}_1+\mathrm{z}_2)\frac{1}{2}(t-\frac{1}{t})]=\exp[\mathrm{z}_1\frac{1}{2}(t-\frac{1}{t})]\exp[\mathrm{z}_2\frac{1}{2}(t-\frac{1}{t})]$$

两边分别按展开贝塞尔函数展开.

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z_1+z_2)t^n = \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(z_1)t^m \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z_2)t^n$$

两边取 t 的同次幂的系数就得到加法公式.特别当 $n=0$ 时，

$$J_0(z_1+z_2) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_{-m}(z_1)J_m(z_2) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m J_m(z_1)J_m(z_2) \qquad (4.3.12b)$$

再令 $z_1 = z_2$，得倍数公式，

$$J_0(2z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m [J_m(z)]^2 = [J_0(z)]^2 + 2\sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m [J_m(z)]^2 \qquad (4.3.13)$$

(3) 贝塞尔函数的积分表达式

在(4.3.9)式中，令 $t = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$，得到：

$$\exp[z(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi})/2] = \mathrm{e}^{\mathrm{i}z\sin\varphi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\varphi} \qquad (4.3.15)$$

两边乘以 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}m\varphi}$ 并对 φ 在 $[-\pi,\pi]$ 区间上积分.利用

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n-m)\varphi}\mathrm{d}\varphi = \delta_{mn}$$

得到

$$J_n(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(z\sin\varphi - n\varphi)}\mathrm{d}\varphi \qquad (4.3.16)$$

将欧拉公式 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} = \cos z + \mathrm{i}\sin z$ 代入，得到

$$J_n(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} [\cos(z\sin\varphi - n\varphi) + \mathrm{i}\sin(z\sin\varphi - n\varphi)]\mathrm{d}\varphi \qquad (4.3.17)$$

被积函数的后一项是 φ 的奇函数，在 $[-\pi,\pi]$ 上积分为零.前一项则是 φ 的偶函数，因此得到整数阶贝塞尔函数的积分表达式为

$$J_n(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(z\sin\varphi - n\varphi)\mathrm{d}\varphi \qquad (4.3.18)$$

此式称为**贝塞尔表达式**.

(4) 贝塞尔函数与三角函数之间的关系

在(4.3.18)式中取 $n=0$，得到

$$J_0(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(z\sin\varphi)\mathrm{d}\varphi \qquad (4.3.19)$$

由(4.3.15)式，利用 $J_{-n}(z) = (-1)^n J_n(z)$，可得

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{\mathrm{i}z\sin\varphi} &= J_0(z)+\sum_{n=1}^{\infty}(J_n(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\varphi}+(-1)^n J_n(z)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\varphi}) \\
&= J_0(z)+\sum_{n=1}^{\infty}J_{2n}(z)(\mathrm{e}^{\mathrm{i}2n\varphi}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2n\varphi})+\sum_{n=1}^{\infty}J_{2n+1}(z)(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2n+1)\varphi}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(2n+1)\varphi}) \\
&= J_0(z)+\sum_{n=1}^{\infty}J_{2n}(z)2\cos 2n\varphi+\sum_{n=0}^{\infty}J_{2n+1}(z)2\mathrm{i}\sin(2n+1)\varphi
\end{aligned} \tag{4.3.20a}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{\mathrm{i}z\cos\varphi} &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}z\sin(\pi/2-\varphi)} = J_0(z)+\sum_{n=1}^{\infty}(J_n(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}n(\pi/2-\varphi)}+J_{-n}(z)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n(\pi/2-\varphi)}) \\
&= J_0(z)+\sum_{n=1}^{\infty}(J_n(z)\mathrm{i}^n\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\varphi}+J_{-n}(z)(-\mathrm{i})^n\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\varphi}) \\
&= J_0(z)+\sum_{n=1}^{\infty}(J_n(z)\mathrm{i}^n\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\varphi}+(-1)^n J_n(z)(-\mathrm{i})^n\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\varphi}) \\
&= J_0(z)+\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{i}^n J_n(z)2\cos n\varphi
\end{aligned} \tag{4.3.20b}$$

在上两式中，令 $z\to -z$

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z\cos\varphi} = J_0(z)+\sum_{n=1}^{\infty}(-\mathrm{i})^n J_n(z)2\cos n\varphi \tag{4.3.21a}$$

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z\sin\varphi} = J_0(z)+\sum_{n=1}^{\infty}J_{2n}(z)2\cos 2n\varphi-\sum_{n=0}^{\infty}J_{2n+1}(z)2\mathrm{i}\sin(2n+1)\varphi \tag{4.3.21b}$$

由此得到以下公式.

$$\begin{aligned}
\cos(z\cos\varphi) &= \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z\cos\varphi}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z\cos\varphi}) \\
&= J_0(z)+\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{i}^n[1+(-1)^n]J_n(z)\cos n\varphi = J_0(z)+2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n J_{2n}(z)\cos 2n\varphi
\end{aligned} \tag{4.3.22a}$$

$$\sin(z\cos\varphi) = \frac{1}{2\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z\cos\varphi}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z\cos\varphi}) = 2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n J_{2n+1}(z)\cos(2n+1)\varphi \tag{4.3.22b}$$

$$\cos(z\sin\varphi) = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z\sin\varphi}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z\sin\varphi}) = J_0(z)+2\sum_{n=1}^{\infty}J_{2n}(z)\cos 2n\varphi \tag{4.3.23a}$$

$$\sin(z\sin\varphi) = \frac{1}{2\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z\sin\varphi}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z\sin\varphi}) = 2\sum_{n=0}^{\infty}J_{2n+1}(z)\sin(2n+1)\varphi \tag{4.3.23b}$$

令 $\varphi=0$ 代入，得到

$$\begin{aligned}
\cos z &= J_0(z)+2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n J_{2n}(z) \\
\sin z &= 2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n J_{2n+1}(z)
\end{aligned} \tag{4.3.24}$$

此即整数阶贝塞尔函数与三角函数之间的重要公式.

物理上，三角函数代表平面波.贝塞尔函数是拉普拉斯方程在柱坐标下径向方程的解.因而在物理上贝塞尔函数代表柱面波.以上三角函数与贝塞尔函数之间的关系表示了平面波按柱面波的展开.这在电磁理论中计算电磁散射是很有用的.

4.4 节，半奇整数阶的内容就不介绍了。半奇整数阶贝塞尔函数都可以写成初等函数。

定义 1 幂函数，指数函数，对数函数，三角函数，反三角函数，称为**基本初等函数**.由基本初等函数经过有限次加减乘除四则运算及其有限次复合所得的函数，称为**初等函数**.初等函数的例子有多项式，有理函数，双曲函数，反双曲函数，等等.不属于初等函数的函数常称为**特殊函数**.

我们在这儿只列出半奇整数阶贝塞尔函数的一般表达式.首先，可以得到

$$\begin{aligned}J_{1/2}(z)&=(\frac{z}{2})^{1/2}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m z^{2m}/2^{2m}}{m!(m+\frac{1}{2})(m-\frac{1}{2})(m-\frac{3}{2})\cdots 3\cdot 1\Gamma(1/2)}\\&=\frac{\sqrt{z}}{\sqrt{2\pi}}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m z^{2m}}{(2m)!!(2m+1)!!}=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m z^{2m+1}}{(2m+1)!}=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\sin z\end{aligned}\tag{4.4.3}$$

同理

$$\begin{aligned}J_{-1/2}(z)&=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!\Gamma(m+1/2)}(\frac{z}{2})^{2m-1/2}\\&=(\frac{z}{2})^{-1/2}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m z^{2m}/2^{2m}}{m!(m-\frac{1}{2})(m-\frac{3}{2})\cdots 3\cdot 1\Gamma(1/2)}\\&=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi z}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^m z^{2m}}{(2m)!!(2m-1)!!}=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(2m)!}z^{2m}=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cos z\end{aligned}\tag{4.4.4}$$

然后，由贝塞尔函数的递推公式，得到

$$J_{n+1/2}=(-1)^n z^{n+1/2}(\frac{1}{z}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z})^n(z^{-1/2}J_{1/2})=(-1)^n\sqrt{\frac{2}{\pi z}}z^{n+1}(\frac{1}{z}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z})^n\frac{\sin z}{z}\tag{4.4.5a}$$

$$J_{-n-1/2}=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}z^{n+1}(\frac{1}{z}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z})^n\frac{\cos z}{z}\tag{4.4.5b}$$

利用第二类贝塞尔函数的定义式(4.1.42)，容易得到$Y_{n+1/2}$与$J_{n+1/2}$之间的关系.

$$Y_{n+1/2}(z)=\frac{J_{n+1/2}(z)\cos(\pi(n+1/2))-J_{-n-1/2}(z)}{\sin(\pi(n+1/2))}=(-1)^{n+1}J_{-n-1/2}(z)\tag{4.4.6a}$$

$$Y_{-n-1/2}(z)=(-1)^n J_{n+1/2}(z)\tag{4.4.6b}$$

半奇数阶贝塞尔函数的母函数关系

$$\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cos\sqrt{z^2-2zt}=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{J_{m-1/2}(z)}{m!}t^m\tag{4.4.7a}$$

$$\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\sin\sqrt{z^2-2zt}=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!}J_{-m+1/2}(z)t^m \tag{4.4.7b}$$

这两个生成函数已列于表 3.6 中.

半奇数阶贝塞尔函数的其它公式可以在贝塞尔函数的相应公式中令 ν 为半奇数得到.

容易看到，当 $z\to\infty$ 时，各半奇数阶贝塞尔函数都是振荡衰减的.写出渐近公式如下.

$$J_{\nu+1/2}(z\to\infty)\sim\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cos(z-\frac{\nu+1}{2}\pi) \tag{4.4.8a}$$

$$Y_{\nu+1/2}(z\to\infty)\sim\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\sin(z-\frac{\nu+1}{2}\pi) \tag{4.4.8b}$$

§4.5 第三类贝塞尔函数和球贝塞尔函数

4.5.1 第三类贝塞尔函数

(1) 第三类贝塞尔函数的定义

第三类贝塞尔函数由下列公式来定义.

$$H_\nu^{(1)}(z)=J_\nu(z)+\mathrm{i}Y_\nu(z) \tag{4.5.1a}$$

$$H_\nu^{(2)}(z)=J_\nu(z)-\mathrm{i}Y_\nu(z) \tag{4.5.1b}$$

它们又分别称为**第一类和第二类汉克尔函数**.

由于汉克尔函数是贝塞尔方程(4.1.1)两个线性无关的解 $J_\nu(z)$ 和 $Y_\nu(z)$ 的线性组合，所以 $H_\nu^{(1)}(z)$ 和 $H_\nu^{(2)}(z)$ 也是方程贝塞尔方程(4.1.1)的两个线性无关的解.

汉克尔函数既然是 $J_\nu(z)$ 和 $Y_\nu(z)$ 的线性组合，所以也具有与 $J_\nu(z)$ 和 $Y_\nu(z)$ 完全相同的递推公式.例如在(4.2.2)-(4.2.5)式中，把 J 换成 $H_\nu^{(1)}$ 或者 $H_\nu^{(2)}$，公式仍然成立.明确写出如下.

$$\begin{aligned}
&[z^\nu H_\nu^{(i)}(z)]'=z^\nu H_{\nu-1}^{(i)}(z)\\
&[z^{-\nu}H_\nu^{(i)}(z)]'=-z^{-\nu}H_{\nu+1}^{(i)}(z)\\
&z[H_{\nu-1}^{(i)}(z)+H_{\nu+1}^{(i)}(z)]=2\nu H_\nu^{(i)}(z)\\
&H_{\nu-1}^{(i)}(z)-H_{\nu+1}^{(i)}(z)=2[H_\nu^{(i)}(z)]'
\end{aligned} \tag{4.5.2}$$

式中，$i=1,2$.

通常把第一、二、三类贝塞尔函数统称为**柱函数**.柱函数都有相同的递推关系(4.2.2)-(4.2.5).也可以说，满足递推关系(4.2.2)-(4.2.5)的函数定义为柱函数.

利用$Y_\nu(z)$的表达式$Y_\nu(z)=\dfrac{J_\nu(z)\cos\nu\pi-J_{-\nu}(z)}{\sin\nu\pi}$，代入式(4.5.1)，则得

$$H_\nu^{(1)}(z)=J_\nu(z)+\mathrm{i}\frac{J_\nu(z)\cos\nu\pi-J_{-\nu}(z)}{\sin\nu\pi}=\frac{1}{\mathrm{i}\sin\nu\pi}[J_{-\nu}(z)-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\nu\pi}J_\nu(z)] \quad (4.5.3a)$$

$$H_\nu^{(2)}(z)=J_\nu(z)-\mathrm{i}\frac{J_\nu(z)\cos\nu\pi-J_{-\nu}(z)}{\sin\nu\pi}=\frac{1}{\mathrm{i}\sin\nu\pi}[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\nu\pi}J_\nu(z)-J_{-\nu}(z)] \quad (4.5.3b)$$

从而得出下面两个重要的关系式

$$H_{-\nu}^{(1)}(z)=\frac{J_\nu(z)-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\nu\pi}J_{-\nu}(z)}{-\mathrm{i}\sin\nu\pi}=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\nu\pi}}{\mathrm{i}\sin\nu\pi}[J_{-\nu}(z)-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\nu\pi}J_\nu(z)]=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\nu\pi}H_\nu^{(1)}(z) \quad (4.5.4a)$$

$$H_{-\nu}^{(2)}(z)=\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\nu\pi}J_{-\nu}(z)-J_\nu(z)}{-\mathrm{i}\sin\nu\pi}=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\nu\pi}H_\nu^{(2)}(z) \quad (4.5.4b)$$

(2) 整数阶汉克尔函数

当$\nu=n$ (整数)时，汉克尔函数可表示为

$$H_n^{(1)}(z)=J_n(z)+\mathrm{i}Y_n(z) \quad (4.5.5a)$$

$$H_n^{(2)}(z)=J_n(z)-\mathrm{i}Y_n(z) \quad (4.5.5b)$$

已知，对于整数阶第一和第二类贝塞尔函数，有$J_n(-z)=(-1)^nJ_n(z)$和$Y_n(-z)=(-1)^nY_n(z)$，即(4.3.7)式.因而，

$$H_n^{(1)}(-z)=J_n(-z)+\mathrm{i}Y_n(-z)=(-1)^nJ_n(z)+(-1)^n\mathrm{i}Y_n(z)$$
$$H_n^{(2)}(-z)=J_n(-z)-\mathrm{i}Y_n(-z)=(-1)^nJ_n(z)-(-1)^n\mathrm{i}Y_n(z)$$

可见

$$H_n^{(1)}(-z)=(-1)^nH_n^{(1)}(z),H_n^{(2)}(-z)=(-1)^nH_n^{(2)}(z),n\neq0$$

当$n=0$时的情况要特别小心. 文献上给出的公式为

$$H_0^{(1)}(-x)=-H_0^{(2)}(x) \quad (4.5.6)$$

可以一般地证明：

$$H_0^{(1)}(-z)=-H_0^{(2)}(z)$$

(3) 半奇数阶汉克尔函数

当阶数ν为半奇数时，同样也可以用初等函数表示出来.如在(4.5.1)中，令ν=1/2，即得

$$J_{1/2}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\sin z \quad (4.4.3) \qquad J_{-1/2}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cos z \quad (4.4.4)$$

$$Y_{1/2}(z)=\frac{J_{1/2}(z)\cos(\pi/2)-J_{-1/2}(z)}{\sin(\pi/2)}=-J_{-1/2}(z)=-\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cos z$$

$$Y_{-1/2}(z)=\frac{J_{-1/2}(z)\cos(-\pi/2)-J_{1/2}(z)}{\sin(-\pi/2)}=-J_{1/2}(z)=-\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\sin z$$

$$H_{1/2}^{(1)}(z)=J_{1/2}(z)+\mathrm{i}Y_{1/2}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\sin z-\mathrm{i}\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cos z=-\mathrm{i}\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} \tag{4.5.7a}$$

$$H_{1/2}^{(2)}(z)=J_{1/2}(z)-\mathrm{i}Y_{1/2}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\sin z+\mathrm{i}\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cos z=\mathrm{i}\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z} \tag{4.5.7b}$$

利用式(4.4.4)和(4.4.6)式，$Y_{-1/2}(z)=-J_{1/2}(z)$，得到

$$H_{-1/2}^{(1)}(z)=J_{-1/2}(z)+\mathrm{i}Y_{1/2}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cos z-\mathrm{i}\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\sin z=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}$$

$$H_{-1/2}^{(2)}(z)=J_{-1/2}(z)-\mathrm{i}Y_{-1/2}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cos z+\mathrm{i}\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\sin z=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}$$

可见，

$H_{-1/2}^{(1)}(z)=-\mathrm{i}\,H_{1/2}^{(2)}(z)$，$H_{-1/2}^{(2)}(z)=\mathrm{i}\,H_{1/2}^{(1)}(z)$

由于(4.4.6)式，半奇数阶的汉克尔函数也可以仅用半奇数阶的贝塞尔函数表示出来.

$$Y_{n+1/2}(z)=(-1)^{n+1}J_{-n-1/2}(z) \tag{4.4.6a}$$

$$Y_{-n-1/2}(z)=(-1)^{n}J_{n+1/2}(z) \tag{4.4.6b}$$

$$H_{n+1/2}^{(1)}(z)=J_{n+1/2}(z)+\mathrm{i}(-1)^{n+1}J_{-(n+1/2)}(z) \tag{4.5.8a}$$

$$H_{n+1/2}^{(2)}(z)=J_{n+1/2}(z)+\mathrm{i}(-1)^{n}J_{-(n+1/2)}(z) \tag{4.5.8b}$$

再根据(4.4.5)式，我们得到半奇数阶汉克尔函数的微分表达式.

$$\begin{aligned}H_{n+1/2}^{(1)}(z)&=(-1)^n\sqrt{\frac{2}{\pi z}}z^{n+1}\left(\frac{1}{z}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right)^n\frac{\sin z}{z}+\mathrm{i}(-1)^{n+1}\sqrt{\frac{2}{\pi z}}z^{n+1}\left(\frac{1}{z}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right)^n\frac{\cos z}{z}\\&=\mathrm{i}(-1)^{n+1}\sqrt{\frac{2}{\pi z}}z^{n+1}\left(\frac{1}{z}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right)^n\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z}\end{aligned} \tag{4.5.9a}$$

$$\begin{aligned}H_{n+1/2}^{(2)}(z)&=(-1)^n\sqrt{\frac{2}{\pi z}}z^{n+1}\left(\frac{1}{z}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right)^n\frac{\sin z}{z}-\mathrm{i}(-1)^{n+1}\sqrt{\frac{2}{\pi z}}z^{n+1}\left(\frac{1}{z}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right)^n\frac{\cos z}{z}\\&=\mathrm{i}(-1)^{n}\sqrt{\frac{2}{\pi z}}z^{n+1}\left(\frac{1}{z}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right)^n\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{z}\end{aligned} \tag{4.5.9b}$$

(4) 汉克尔函数的渐近式

此处完全利用汉克尔函数的定义式 $H_\nu^{(1)}(z)=J_\nu(z)+\mathrm{i}Y_\nu(z)$ 和

$H_\nu^{(2)}(z) = J_\nu(z) - \mathrm{i}Y_\nu(z)$.

当 $z\to\infty$ 且 $\nu\neq 0$ 时，由式(4.2.12)和(4.2.13)得到

$$H_\nu^{(1)}(z\to\infty)\sim\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(z-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)} \tag{4.5.10a}$$

$$H_\nu^{(2)}(z\to\infty)\sim\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\left(z-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)} \tag{4.5.10b}$$

当 $z=x$ 是实数并且趋于无穷大时，$H_\nu^{(1)}(x\to\infty)$ 或者 $H_\nu^{(2)}(x\to\infty)$ 是传播方向相反的两个衰减平面波.

当 $\nu=n>0$ 为正整数且 $z\to 0$ 的情况.由(4.3.8)式结合可知,

$$H_n^{(1)}(z\to 0)\sim -\mathrm{i}\frac{(n-1)!}{\pi}\left(\frac{2}{z}\right)^n \tag{4.5.10c}$$

$$H_n^{(2)}(z\to 0)\sim \mathrm{i}\frac{(n-1)!}{\pi}\left(\frac{2}{z}\right)^n \tag{4.5.10d}$$

当 $\nu=0$ 时,

$$H_0^{(1)}(z\to 0)\sim \mathrm{i}\frac{2}{\pi}\ln\frac{z}{2} \tag{4.5.10e}$$

$$H_0^{(2)}(z\to 0)\sim -\mathrm{i}\frac{2}{\pi}\ln\frac{z}{2} \tag{4.5.10f}$$

当 $z=x$ 是实数，$H_0^{(1)}(x\to 0)\sim \mathrm{i}\dfrac{2}{\pi}\ln\dfrac{|x|}{2}, H_0^{(2)}(x\to 0)\sim -\mathrm{i}\dfrac{2}{\pi}\ln\dfrac{|x|}{2}$.也得到(4.5.6).

4.5.2 球贝塞尔函数

(1) 球贝塞尔函数的定义

方程

$$z^2w''+2zw'+(z^2-\nu(\nu+1))w=0 \tag{4.5.11}$$

称为 **ν 阶球贝塞尔方程**.

做变换

$$w(z)=\frac{u(z)}{\sqrt{z}}$$

代入球贝塞尔方程，整理后得

$$z^2u''+zu'+(z^2-(\nu+\frac{1}{2})^2)u(z)=0 \tag{4.5.12}$$

这是 $\nu+1/2$ 阶贝塞尔方程.它的基本解组自然是第一和第二类贝塞尔函数 $J_{\nu+1/2}(z)$ 和 $Y_{\nu+1/2}(z)$.因而 ν 阶球贝塞尔方程(4.5.11) 的基本解组就是 $\dfrac{1}{\sqrt{z}}J_{\nu+1/2}(z)$ 和

$\frac{1}{\sqrt{z}}Y_{\nu+1/2}(z)$.

将第一、二、三类贝塞尔函数除以$\sqrt{z}$之后的函数，统称为**球贝塞尔函数**.它们的记号和名称如下.

$$j_\nu(z)=\sqrt{\frac{\pi}{2z}}J_{\nu+1/2}(z)\text{，}\quad \textbf{ν阶球贝塞尔函数} \tag{4.5.13a}$$

$$y_\nu(z)=\sqrt{\frac{\pi}{2z}}Y_{\nu+1/2}(z)\text{，}\quad \textbf{ν阶球诺依曼函数} \tag{4.5.13b}$$

$$h_\nu^{(1)}(z)=\sqrt{\frac{\pi}{2z}}H_{\nu+1/2}^{(1)}(z)\text{，}\quad \textbf{ν阶第一类球汉克尔函数} \tag{4.5.13c}$$

$$h_\nu^{(2)}(z)=\sqrt{\frac{\pi}{2z}}H_{\nu+1/2}^{(2)}(z)\text{，}\quad \textbf{ν阶第二类球汉克尔函数} \tag{4.5.13d}$$

它们都是球贝塞尔方程(4.5.11)的解.

由定义，得到上述球贝塞尔函数之间有如下关系.

$$\begin{aligned} h_\nu^{(1)}(z) &= j_\nu(z)+\mathrm{i}y_\nu(z) \\ h_\nu^{(2)}(z) &= j_\nu(z)-\mathrm{i}y_\nu(z) \end{aligned} \tag{4.5.14}$$

式(4.5.13)中定义的任意两个函数都是线性无关的.因而，球贝塞尔方程(4.5.11)式的通解可以写为

$$w(z)=Aj_\nu(z)+By_\nu(z) \tag{4.5.15}$$

或者

$$w(z)=Aj_\nu(z)+Bh_\nu^{(1)}(z) \tag{4.5.16}$$

或者

$$w(z)=Ah_\nu^{(1)}(z)+Bh_\nu^{(2)}(z) \tag{4.5.17}$$

既然球贝塞尔函数是根据第一、二、三类贝塞尔函数来表达的，球贝塞尔函数的性质也就可以从第一、二、三类贝塞尔函数的性质推出.以下只列举其中一些.

(2) 球贝塞尔函数的递推关系

由贝塞尔函数的递推关系，可以得到球贝塞尔函数的递推关系.如果以ψ_ν记(4.5.13)式定义的四个球贝塞尔函数$j_\nu(z)$，$n_\nu(z)$，$h_\nu^{(1)}(z)$，$h_\nu^{(2)}(z)$中的任何一个，则它的基本的递推关系如下.

$$(2\nu+1)\psi_\nu=z(\psi_{\nu+1}+\psi_{\nu-1}) \tag{4.5.18}$$

$$(2\nu+1)\psi_\nu'=\nu\psi_{\nu+1}-(\nu+1)\psi_{\nu+1} \tag{4.5.19}$$

$$\psi_\nu' = \frac{\nu}{z}\psi_\nu - \psi_{\nu+1}, \quad ((z^{-\nu}\psi_\nu)' = -z^{-\nu}\psi_{\nu+1}) \tag{4.5.20}$$

$$\psi_\nu' = \psi_{\nu-1} - \frac{\nu+1}{z}\psi_\nu \tag{4.5.21}$$

例如：在贝塞尔函数的递推公式 $(z^{-\nu}J_\nu)' = -z^{-\nu}J_{\nu+1}$ 中，将 ν 写成 $\nu+1/2$，则 $(z^{-\nu-1/2}J_{\nu+1/2})' = -z^{-\nu-1/2}J_{\nu+1+1/2}$. $\frac{1}{z}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\frac{j_\nu(z)}{z^\nu} = -\frac{j_{\nu+1}(z)}{z^{\nu+1}}$.这是球贝塞尔函数的递推公式.同样可得球诺依曼函数的递推公式. $\frac{n_{\nu+1}(z)}{z^{\nu+1}} = -\frac{1}{z}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}[\frac{n_\nu(z)}{z^\nu}]$.它们都属于(4.5.20)式.

(3) 整数阶球贝塞尔函数的表达式

当 $\nu = n$ 为整数时，半奇数阶的第一二三类贝塞尔函数都是可以用初等函数来表示的.(在 4.4 节中,本讲义中未介绍.)因此整数阶的球贝塞尔函数也可以用初等函数来表示.由(4.4.5)我们可得第一和第二类正整数阶的球贝塞尔函数的微分表示.

$$\begin{aligned} j_n(z) &= \sqrt{\frac{\pi}{2z}}J_{n+1/2} = \sqrt{\frac{\pi}{2z}}(-1)^n\sqrt{\frac{2}{\pi z}}z^{n+1}(\frac{1}{z}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z})^n\frac{\sin z}{z} \\ &= (-1)^n z^n(\frac{1}{z}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z})^n\frac{\sin z}{z} \end{aligned} \tag{4.5.22a}$$

$$\begin{aligned} y_n(z) &= \sqrt{\frac{\pi}{2z}}Y_{n+1/2}(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}}(-1)^{n+1}J_{-n-1/2} \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{2z}}(-1)^{n+1}\sqrt{\frac{2}{\pi z}}z^{n+1}(\frac{1}{z}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z})^n\frac{\cos z}{z} = (-1)^{n+1}z^n(\frac{1}{z}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z})^n\frac{\cos z}{z} \end{aligned} \tag{4.5.22b}$$

由(4.5.9)我们可得正整数阶的球汉克尔函数的微分表示.

$$\begin{aligned} h_n^{(1)}(z) &= \sqrt{\frac{\pi}{2z}}H_{n+1/2}^{(1)}(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}}\mathrm{i}(-1)^{n+1}\sqrt{\frac{2}{\pi z}}z^{n+1}(\frac{1}{z}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z})^n\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z} \\ &= \mathrm{i}(-1)^{n+1}z^n(\frac{1}{z}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z})^n\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z} \end{aligned} \tag{4.5.23a}$$

$$\begin{aligned} h_n^{(2)}(z) &= \sqrt{\frac{\pi}{2z}}H_{n+1/2}^{(2)}(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}}\mathrm{i}(-1)^n\sqrt{\frac{2}{\pi z}}z^{n+1}(\frac{1}{z}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z})^n\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{z} \\ &= \mathrm{i}(-1)^n z^n(\frac{1}{z}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z})^n\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{z} \end{aligned} \tag{4.5.23b}$$

上述等式对于 $n=0$ 时也成立.此时各表达式如下.

$$j_0(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}}J_{1/2}(z) = \frac{\sin z}{z} \tag{4.5.24a}$$

$$y_0(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}}Y_{1/2}(z) = -\frac{\cos z}{z} \tag{4.5.24b}$$

$$h_0^{(1)}(z) = -\frac{\mathrm{i}}{z}\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} \tag{4.5.24c}$$

$$h_0^{(2)}(z) = \frac{\mathrm{i}}{z}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z} \tag{4.5.24d}$$

对于负整数阶的球贝塞尔函数，可以利用前面的关系式.由(4.4.5b)，我们可知，

$$\begin{aligned} j_{-n}(z) &= \sqrt{\frac{\pi}{2z}} J_{-n+1/2}(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} \sqrt{\frac{2}{\pi z}} z^n (\frac{1}{z}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z})^{n-1} \frac{\cos z}{z} \\ &= z^{n-1} (\frac{1}{z}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z})^{n-1} \frac{\cos z}{z} = (-1)^n y_{n-1}(z) \end{aligned}, \tag{4.5.25a}$$

最后一个等号来自于(4.5.22b)式.由(4.4.6b)，

$$\begin{aligned} y_{-n}(z) &= \sqrt{\frac{\pi}{2z}} Y_{-n+1/2}(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} (-1)^{n-1} J_{n-1+1/2}(z) \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{2z}} (-1)^{n-1} (-1)^{n-1} \sqrt{\frac{2}{\pi z}} z^n (\frac{1}{z}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z})^{n-1} \frac{\sin z}{z} \\ &= z^{n-1} (\frac{1}{z}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z})^{n-1} \frac{\sin z}{z} = (-1)^{n-1} j_{n-1}(z) \end{aligned}, \tag{4.5.25b}$$

最后的等号来自(4.5.22a)式.

由(4.5.9)式可得：

$$\begin{aligned} h_{-n}^{(1)}(z) &= \sqrt{\frac{\pi}{2z}} H_{-n+1/2}^{(1)}(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} H_{-(n-1/2)}^{(1)}(z) \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{2z}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n-1/2)\pi} H_{n-1/2}^{(1)}(z) = z^{n-1} (\frac{1}{z}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z})^{n-1} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z} = \mathrm{i}(-1)^{n-1} h_{n-1}^{(1)}(z) \end{aligned}, \tag{4.5.25c}$$

$$\begin{aligned} h_{-n}^{(2)}(z) &= \sqrt{\frac{\pi}{2z}} H_{-n+1/2}^{(2)}(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} H_{-(n-1/2)}^{(2)}(z) \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{2z}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n-1/2)\pi} H_{n-1/2}^{(2)}(z) = z^{n} (\frac{1}{z}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z})^{n-1} \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{z} = \mathrm{i}(-1)^{n-1} h_{n-1}^{(2)}(z) \end{aligned} \tag{4.5.25d}$$

例如：

$$j_{-1}(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} J_{-1/2}(z) = \frac{\cos z}{z}$$

(4) 整数阶球贝塞尔函数的奇偶性

$$j_n(-z) = (-1)^n (-z)^n (\frac{1}{(-z)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}(-z)})^n \frac{\sin(-z)}{(-z)} = (-1)^n j_n(z) \tag{4.5.26a}$$

$$y_n(-z) = (-1)^{n+1} (-z)^n (\frac{1}{(-z)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}(-z)})^n \frac{\cos(-z)}{(-z)} = (-1)^{n+1} y_n(z) \tag{4.5.26b}$$

(6) 整数阶球贝塞尔函数在特殊点的值

$$j_0(0) = 1,\ j_n(0) = 0, n > 1 \tag{4.5.28}$$

$$y_n(z \to \infty) \sim \frac{1}{z^{n+1}}, n \ge 0 \tag{4.5.29}$$

这是因为 $j_0(z) = \dfrac{\sin z}{z}$， 故当 $z \to 0$ 时， $j_0(z \to 0) \to 1$.而 $j_n(0) = 0, n > 1$ 可由 $j_n(z)$，

也就是$\sqrt{\dfrac{\pi}{2z}}J_{n+1/2}(z)$的级数表达式看出来. $y_0(z)=\dfrac{\cos z}{z}$， $y_0(z\to 0)\sim\dfrac{1}{z}$. $y_n(z\to\infty)$

的行为也可以从$\sqrt{\dfrac{\pi}{2z}}Y_{n+1/2}(z)$的级数表达式看出来.

(7) 球贝塞尔函数的渐近式

在(4.4.8)和(4.5.10)式的两边乘以$\sqrt{\dfrac{\pi}{2z}}$，就得到球贝塞尔函数当$z\to\infty$时的渐近式.

$$j_\nu(z\to\infty)\sim\frac{1}{z}\cos(z-\frac{\nu+1}{2}\pi) \tag{4.5.30a}$$

$$y_\nu(z\to\infty)\sim\frac{1}{z}\sin(z-\frac{\nu+1}{2}\pi) \tag{4.5.30b}$$

$$h_\nu^{(1)}(z\to\infty)\sim\frac{1}{z}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(z-\nu\pi/2-\pi/4)}，\quad(-\pi<\arg z<2\pi) \tag{4.5.30c}$$

$$h_\nu^{(2)}(z\to\infty)\sim\frac{1}{z}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(z-\nu\pi/2-\pi/4)}，\quad(-2\pi<\arg z<\pi) \tag{4.5.30d}$$

(8) 利用球贝塞尔函数的展开式

一个平面波可以用球贝塞尔函数展开如下.

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}z\cos\theta}=\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)\mathrm{i}^n j_n(z)P_n(\cos\theta) \tag{4.5.31}$$

其中$P_n(\cos\theta)$是勒让德多项式.

空间有$\boldsymbol{r}$和$\boldsymbol{r}'$这两个位矢，它们之差的绝对值为

$$|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|=\sqrt{r^2+r'^2-2rr'\cos\theta}$$

其中θ是$\boldsymbol{r}$和$\boldsymbol{r}'$之间的夹角.将$\boldsymbol{r}$和$\boldsymbol{r}'$这两个位矢之差的贝塞尔函数用$\boldsymbol{r}$和$\boldsymbol{r}'$这两个位矢的贝塞尔函数来展开，这样的公式称为叠加定理.

$$H_0^{(2)}(k|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}m(\theta-\theta')}\begin{cases}J_m(kr)H_m^{(2)}(kr'),r<r'\\J_m(kr')H_m^{(2)}(kr),r>r'\end{cases} \tag{4.5.32}$$

此式称为贝塞尔函数的叠加定理.

§4.6 虚变量(或变形)贝塞尔函数

4.6.1 第一和第二类变形的贝塞尔函数

(1) 变形贝塞尔函数的定义

若在贝塞尔方程$z^2w''(z)+zw'(z)+(z^2-\nu^2)w(z)=0$中，将变量$z$用i$z$来代替，

$$z=\mathrm{i}y,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}=\frac{1}{\mathrm{i}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y};w(z)=u(\mathrm{i}z),\frac{\mathrm{d}w(z)}{\mathrm{d}z}=\frac{1}{\mathrm{i}}\frac{\mathrm{d}u(\mathrm{i}z)}{\mathrm{d}z}$$

$$\mathrm{i}^2z^2\frac{w''}{\mathrm{i}^2}+\mathrm{i}z\frac{w'}{\mathrm{i}}-(\mathrm{i}^2z^2+\nu^2)w=0$$

原方程就变为

$$z^2w''+zw'-(z^2+\nu^2)w=0 \tag{4.6.1}$$

所以称此方程为**虚变量(或变形)的贝塞尔微分方程**.注意，现在的z还是一般的复数.

显然，$J_\nu(\mathrm{i}z)$就是(4.6.1)的一个解.

$$J_\nu(\mathrm{i}z)=\mathrm{i}^\nu\left(\frac{z}{2}\right)^\nu\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!\Gamma(m+1+\nu)}\left(\frac{\mathrm{i}z}{2}\right)^{2m} \tag{4.6.2}$$

如下定义一个函数：

$$I_\nu(z)=\mathrm{i}^{-\nu}J_\nu(\mathrm{i}z)=\left(\frac{z}{2}\right)^\nu\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!\Gamma(m+1+\nu)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2m} \tag{4.6.3}$$

它称为**虚变量(或变形)贝塞尔函数**(或**第一类虚变量的贝塞尔函数**).例如，零阶虚变量的贝塞尔函数是

$$I_0(z)=J_0(\mathrm{i}z)=1+(\frac{z}{2})^2+\frac{1}{(2!)^2}(\frac{z}{2})^4+\frac{1}{(3!)^2}(\frac{z}{2})^6+\cdots+\frac{1}{(k!)^2}(\frac{z}{2})^{2k}+\cdots$$

从(4.2.1)式易得

$$I_\nu(-z)=\mathrm{i}^{-\nu}J_\nu(-\mathrm{i}z)=\mathrm{i}^{-\nu}(-1)^\nu J_\nu(\mathrm{i}z)=(-1)^\nu I_\nu(z) \tag{4.6.4}$$

只要把贝塞尔函数的公式中将z换成$\mathrm{i}z$，就得到第一类虚变量贝塞尔函数的有关公式.

下面分ν是非整数和整数两种情况讨论方程(4.6.1)的解.

(i) 当ν非整数时，$I_{\pm\nu}(z)$是方程(4.6.1)的两个线性无关的解.所以方程(4.6.1)的通解为

$$w(x)=AI_\nu(z)+BI_{-\nu}(z) \tag{4.6.5}$$

式中，A、B是任意常数.对于其它通解形式，我们定义，当ν非整数时, 有

$$K_\nu(z)=\frac{\pi}{2}\frac{I_{-\nu}(z)-I_\nu(z)}{\sin\nu\pi} \tag{4.6.6}$$

$K_\nu(z)$被称为**第二类虚变量的贝塞尔函数**.显然$K_\nu(z)$与$I_\nu(z)$线性无关.因此，方程(4.6.1)的通解又可写为

$$w(z)=AI_\nu(z)+BK_\nu(z) \tag{4.6.7}$$

若$z=x$是实数，$I_\nu(x)$和$K_\nu(x)$都是实函数.

(ii) 当$\nu=n$是整数时，由于$J_{-n}(z)=(-1)^nJ_n(z)$，那么由定义式(4.6.3)立即可得

$$I_{-n}(z)=\mathrm{i}^n J_{-n}(\mathrm{i}z)=\mathrm{i}^n(-1)^n J_n(\mathrm{i}z)=\mathrm{i}^{2n}(-1)^n I_n(z)=I_n(z) \tag{4.6.8}$$

$I_n(z)$ 和 $I_{-n}(z)$ 是线性相关的.不能仅用它们来构成方程(4.6.1)的通解.此时必须寻找(4.6.1)的另一个线性无关解.

我们来看 $K_\nu(z)$ 的定义式(4.6.6).当 $\nu\to n$ 为整数时，由于(4.6.8)，(4.6.6)式的右端是个零比零型.用罗彼塔法则求 $\nu\to n$ 时的极限，得

$$\begin{aligned}K_n(z)&=\lim_{\nu\to n}\frac{\pi}{2}\frac{1}{\pi\cos\nu\pi}[\frac{\partial I_{-\nu}(z)}{\partial\nu}-\frac{\partial I_\nu(z)}{\partial\nu}]=\frac{(-1)^n}{2}[\frac{\partial \mathrm{i}^\nu J_{-\nu}(\mathrm{i}z)}{\partial\nu}-\frac{\partial \mathrm{i}^{-\nu}J_\nu(\mathrm{i}z)}{\partial\nu}]_{\nu=n}\\&=\frac{(-1)^n}{2}[\mathrm{i}^\nu J_{-\nu}(\mathrm{i}z)\ln\mathrm{i}+\mathrm{i}^\nu\frac{\partial J_{-\nu}(\mathrm{i}z)}{\partial\nu}+\mathrm{i}^{-\nu}J_\nu(\mathrm{i}z)\ln\mathrm{i}-\mathrm{i}^{-\nu}\frac{\partial J_\nu(\mathrm{i}z)}{\partial\nu}]_{\nu=n}\\&=\frac{(-1)^n}{2}[(I_{-\nu}(z)+I_\nu(z))\ln\mathrm{i}+\mathrm{i}^\nu\frac{\partial J_{-\nu}(\mathrm{i}z)}{\partial\nu}-\mathrm{i}^{-\nu}\frac{\partial J_\nu(\mathrm{i}z)}{\partial\nu}]_{\nu=n}\end{aligned} \tag{4.6.9}$$

利用贝塞尔函数的性质，

$$\begin{aligned}&\lim_{\nu\to n}\mathrm{i}^{-\nu}\frac{\partial J_\nu(\mathrm{i}z)}{\partial\nu}=\mathrm{i}^{-n}[J_n(\mathrm{i}z)\ln\frac{\mathrm{i}z}{2}-\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m\psi(m+n+1)}{m!(m+n)!}(\frac{\mathrm{i}z}{2})^{2m+n}]\\&=I_n(z)\ln\frac{\mathrm{i}z}{2}-\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\psi(m+n+1)}{m!(m+n)!}(\frac{z}{2})^{2m+n}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\lim_{\nu\to n}\mathrm{i}^{\nu}\frac{\partial J_{-\nu}(\mathrm{i}z)}{\partial\nu}\\&=\mathrm{i}^n(-1)^n[-J_n(\mathrm{i}z)\ln\frac{\mathrm{i}z}{2}+\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m\psi(m+1)}{(m+n)!m!}(\frac{\mathrm{i}z}{2})^{2m+n}+\sum_{m=0}^{n-1}\frac{(n-m-1)!}{m!}(\frac{\mathrm{i}z}{2})^{2m-n}]\\&=-I_n(z)\ln\frac{\mathrm{i}z}{2}+\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\psi(m+1)}{(m+n)!m!}(\frac{z}{2})^{2m+n}+(-1)^n\sum_{m=0}^{n-1}\frac{(-1)^m(n-m-1)!}{m!}(\frac{z}{2})^{2m-n}\end{aligned}$$

其中用到(4.6.3)和(4.6.8)式.将这两个结果代入(4.6.9)式.

$$\begin{aligned}K_n(z)&=\frac{(-1)^n}{2}[-2I_n(z)\ln\frac{z}{2}\\&+\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\psi(m+1)+\psi(m+n+1)}{(m+n)!m!}(\frac{z}{2})^{2m+n}+(-1)^n\sum_{m=0}^{n-1}\frac{(-1)^m(n-m-1)!}{m!}(\frac{z}{2})^{2m-n}]\\&=(-1)^{n+1}I_n(z)\ln\frac{z}{2}\\&+\frac{(-1)^n}{2}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\psi(m+1)+\psi(m+n+1)}{(m+n)!m!}(\frac{z}{2})^{2m+n}+\frac{1}{2}\sum_{m=0}^{n-1}\frac{(-1)^m(n-m-1)!}{m!}(\frac{z}{2})^{2m-n}\end{aligned} \tag{4.6.10}$$

又利用

$$\begin{aligned}&\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\psi(m+1)+\psi(m+n+1)}{(m+n)!m!}(\frac{z}{2})^{2m+n}=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{-2\gamma+H_n+H_{m+n}}{(m+n)!m!}(\frac{z}{2})^{2m+n}\\&=-2\gamma\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(m+n)!m!}(\frac{z}{2})^{2m+n}+\sum_{m=0}^{\infty}\frac{H_n+H_{m+n}}{(m+n)!m!}(\frac{z}{2})^{2m+n}\\&=-2\gamma I_n(z)+\sum_{m=0}^{\infty}\frac{H_n+H_{m+n}}{(m+n)!m!}(\frac{z}{2})^{2m+n}\end{aligned}$$

可把(4.6.10)式写成

$$K_n(z)=(-1)^{n+1}I_n(z)(\ln\frac{z}{2}+\gamma)$$
$$+\frac{(-1)^n}{2}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{H_n+H_{m+n}}{(m+n)!m!}(\frac{z}{2})^{2m+n}+\frac{1}{2}\sum_{m=0}^{n-1}\frac{(-1)^m(n-m-1)!}{m!}(\frac{z}{2})^{2m-n} \quad (4.6.11)$$

当$n=0$此式最后一项不出现.零阶第二类虚宗量贝塞尔函数为

$$K_0(z)=-\left(\ln\frac{z}{2}+\gamma\right)I_0(z)+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(k!)^2}\left(\sum_{m=1}^{k}\frac{1}{m}\right)\left(\frac{z}{2}\right)^{2k} \quad (4.6.12)$$

因为$K_n(z)$是与$I_n(z)$线性无关的，在$\nu=n$ 是整数时，方程(4.6.1)的通解可以写成

$$w(z)=AI_n(z)+BK_n(z)$$

综合上述，不论ν是否为整数，(4.6.6)式的定义对任意ν都适用.虚变量贝塞尔方程(4.6.1)的通解均可表示为(4.6.7)的形式.

由(4.6.6)式得到

$$K_{-n}(z)=-\frac{\pi}{2}\lim_{\nu\to n}\frac{I_\nu(z)-I_{-\nu}(z)}{\sin\nu\pi}=K_n(z) \quad (4.6.13)$$

奇偶性如下.

$$K_n(-z)=\frac{\pi}{2}\lim_{\nu\to n}\frac{I_{-\nu}(-z)-I_\nu(-z)}{\sin\nu\pi}=(-1)^nK_n(z) \quad (4.6.14)$$

$I_\nu(z)$和$K_\nu(z)$都无实的零点.

(3) 递推关系

$I_\nu(z)$和$K_\nu(z)$满足以下递推公式

$$\begin{aligned}&[z^\nu I_\nu(z)]'=z^\nu I_{\nu-1}(z)\\&[z^{-\nu}I_\nu(z)]'=z^{-\nu}I_{\nu+1}(z)\\&[z^\nu K_\nu(z)]'=-z^\nu K_{\nu-1}(z)\\&[z^{-\nu}K_\nu(z)]'=-z^{-\nu}K_{\nu+1}(z)\end{aligned} \quad (4.6.18)$$

读者容易根据贝塞尔函数的递推关系自己证明。

特别，有

$$\begin{aligned}&[zI_1(z)]'=zI_0(z)\\&I_0'(z)=I_1(z)\\&[zK_1(z)]'=-zK_0(z)\\&K_0'(z)=-K_1(z)\end{aligned} \quad (4.6.19)$$

由(4.6.18)可推得$I_\nu(z)$和$K_\nu(z)$满足以下递推公式.

$$\begin{aligned}&z[I_{\nu-1}(z)-I_{\nu+1}(z)]=2\nu I_\nu(z)\\&z[K_{\nu-1}(z)-K_{\nu+1}(z)]=-2\nu I_\nu(z)\\&I_{\nu-1}(z)+I_{\nu+1}(z)=2I_\nu'(z)\\&K_{\nu-1}(z)+K_{\nu+1}(z)=-2K_\nu'(z)\end{aligned} \quad (4.6.20)$$

反复运用(4.6.18)式可得到以下递推关系.

$$(\frac{1}{z}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dz}})^m(z^\nu I_\nu)=z^{\nu-m}I_{\nu-m}(z)$$
$$(\frac{1}{z}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dz}})^m(z^{-\nu} I_\nu)=z^{-(\nu+m)}I_{\nu+m}(z)$$
$$(\frac{1}{z}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dz}})^m(z^\nu K_\nu)=(-1)^m z^{\nu-m}K_{\nu-m}(z)$$
$$(\frac{1}{z}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dz}})^m(z^{-\nu} K_\nu)=(-1)^m z^{-(\nu+m)}K_{\nu+m}(z)$$

(4) 渐近式

当 $z\to\infty$ 时，

$$I_\nu(z\to\infty)\sim\frac{1}{\sqrt{2\pi z}}\mathrm{e}^z$$
$$K_\nu(z\to\infty)\sim\sqrt{\frac{\pi}{2z}}\mathrm{e}^{-z}$$

4.6.2 整数阶变形贝塞尔函数

(1) 母函数关系

在贝塞尔函数的母函数关系 $\exp(\frac{z}{2}(t-\frac{1}{t})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}J_n(z)t^n$ 中，令 $z\to\mathrm{i}z, t\to-\mathrm{i}t$，就可以得到

$$\exp(\frac{\mathrm{i}z}{2}(\frac{t}{\mathrm{i}}-\frac{\mathrm{i}}{t}))=\exp(\frac{z}{2}(t+\frac{1}{t}))=\sum_{n=-\infty}^{\infty}J_n(\mathrm{i}z)(\frac{t}{\mathrm{i}})^n=\sum_{n=-\infty}^{\infty}I_n(z)t^n \qquad (4.6.21)$$

因此 $I_n(z)$ 的母函数为 $\exp(\frac{z}{2}(t+\frac{1}{t}))$.由于求和范围是从 $-\infty$ 至 $+\infty$，这一母函数关系未列入表 3.5 中.

(2) 加法公式

利用贝塞尔函数的加法公式：

$$\begin{aligned}I_n(z_1+z_2)&=\mathrm{i}^{-n}J_n(\mathrm{i}z_1+\mathrm{i}z_2)=\mathrm{i}^{-n}\sum_{m=-\infty}^{\infty}J_{n-m}(\mathrm{i}z_1)J_m(\mathrm{i}z_2)\\&=\mathrm{i}^{-n}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\mathrm{i}^{n-m}I_{n-m}(z_1)\mathrm{i}^m I_m(z_2)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}I_{n-m}(z_1)I_m(z_2)\end{aligned} \qquad (4.6.22a)$$

特别

$$\begin{aligned}I_0(z_1+z_2)&=\sum_{m=-\infty}^{\infty}I_{-m}(z_1)I_m(z_2)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}I_m(z_1)I_m(z_2)\\&=I_0(z_1)I_0(z_2)+2\sum_{m=1}^{\infty}I_m(z_1)I_m(z_2)\end{aligned} \qquad (4.6.22b)$$

再令 $z_1 = z_2$，得倍数公式，

$$I_0(2z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} [I_m(z)]^2 = [I_0(z)]^2 + 2\sum_{m=1}^{\infty} [I_m(z)]^2 \tag{4.6.23}$$

(3) 特殊点的值和渐进行为

当 $\nu = 0$ 时，$I_0(0) = 1$.这是因为 $I_0(z) = J_0(-\mathrm{i}z)$，$J_0(0) = 1$.

$$K_0(z \to 0) \sim -\ln\frac{z}{2} \to \infty$$

当 $z \to 0$ 时，对于 $n > 0$，有 $I_n(0) = 0$.这是因为 $I_n(z) = \mathrm{i}^n J_n(-\mathrm{i}z)$，$J_n(0) = 0$.

$$K_n(z \to 0) \sim -\frac{(n-1)!}{\pi}\left(\frac{2}{z}\right)^n$$

这与第二类贝塞尔函数的行为是一致的.

I 和 K 之间的关系为

$$I_1(z)K_0(z) + I_0(z)K_1(z) = \frac{1}{z} \tag{4.6.24}$$

第二类虚变量贝塞尔函数用第一和第二类贝塞尔函数表出：

$$K_n(z) = \frac{\pi}{2}(-\mathrm{i})^{n+1}[J_n(\mathrm{i}z) + \mathrm{i}Y_n(\mathrm{i}z)] \tag{4.6.25}$$

§4.7 宗量为实数的贝塞尔函数

4.7.1 贝塞尔方程的特征值问题

在解决实际的物理问题时用到的一般是实变量的 ν 阶贝塞尔方程.

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0 \tag{4.7.1}$$

式中 ν 是任意实常数.本节所有的量，如不加说明，都是实数.

实宗量的贝塞尔方程可以具体讨论带有边界条件的边值问题，特征值问题等.实宗量的贝塞尔函数可以讨论其正交规一性，广义傅里叶展开等问题.等等.

比较普遍的情况是，从具体的物理模型推得的贝塞尔方程具有以下形式.

$$x^2 y'' + xy' + (\lambda x^2 - \nu^2)y = 0 \tag{4.7.2}$$

或者

$$\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) + (\lambda - \frac{\nu^2}{x^2})y = 0, \quad 0 \le x \le R \tag{4.7.3}$$

注意这儿加进了一个参量 λ.令 $\lambda = 1$ 即回到通常的 ν 阶贝塞尔方程.现在方程加上了定义区间 $a = 0, b = R$.与式(3.2.36)对照，知式(4.7.3)中，$p(x) = x$，$\rho(x) = x$，

$q(x) = \nu^2 / x$.

可以看出，在贝塞尔方程(4.7.3)中， $p(a) = p(0) = 0$，所以在 $x = 0$ 端点要规定自然边界条件

$$|y(0)| < \infty \tag{4.7.4}$$

设要求的解满足下列三个齐次边界条件之一.

$$y(R) = 0 \tag{4.7.5a}$$

$$y'(R) = 0 \tag{4.7.5b}$$

$$\alpha y'(R) + \beta y(R) = 0 \tag{4.7.5c}$$

或者，综合写成

$$\alpha y'(R) + \beta y(R) = 0 \tag{4.7.5d}$$

式中， α , β 是不同时为零的非负实数.

由于核函数 $p(x) = x$ 非周期函数，因此不可能有周期性条件.

为方便起见，以下记

$$\lambda = k^2 \tag{4.7.6}$$

并只取正的 k 值.

方程(4.7.3)的通解为

$$y(x) = AJ_\nu(kx) + BY_\nu(kx) \tag{4.7.7}$$

已知第二类贝塞尔函数 $Y_\nu(kx \to 0) \to \infty$.因此，为了满足自然边界条件(4.7.4)，必须取 $B = 0$.即

$$y(x) = AJ_\nu(kx) \tag{4.7.8}$$

由于贝塞尔方程是斯图姆-刘维尔型方程的一个特例，因此可以运用斯图姆-刘维尔特征值问题的一般理论，来求解此特征值问题.由 3.2.3 小节斯图姆-刘维尔特征值的定理 1 知，存在无限多个分立的实数特征值，它们构成一个单调递增数列，即

$$\lambda_1 \le \lambda_2 \le \lambda_3 \le \lambda_4 \le \cdots \le \lambda_n \le \lambda_{n+1} \le \cdots$$

相应于这无穷多个特征值有无穷多个特征函数

$$J_\nu(k_1 x), J_\nu(k_2 x), J_\nu(k_3 x), \cdots$$

它们构成特征函数族.

特征值 k_n 的数值要由边界条件(4.7.5)来确定.

$$\alpha k_n J_\nu'(k_n R) + \beta J_\nu(k_n R) = 0 \tag{4.7.9}$$

由此边界条件，得到无数个特征值k_n.从小到大排列为

$$0 < k_1 < k_2 < \cdots < k_n < \cdots$$

现在我们已经模糊地把λ_n或者k_n都称为特征值.反正它们是一一对应的.

由于贝塞尔函数的形式的复杂性，一般不大容易从(4.7.9)式解析地得到特征值，而是经常用数值方法解出此超越方程的无穷多个单根来.

因为$\lambda_n = k_n^2$，方程的解(4.7.8)式写成以下形式.

$$y_n(x) = A_n J_\nu(k_n x) \tag{4.7.10}$$

4.7.2 特征函数族的性质

(1) 贝塞尔函数的正交性

根据斯图姆-刘维尔的理论，不同特征值的特征函数$J_\nu(k_n x)$在区间$[0,R]$上带权

$\rho(x) = x$ 正交,即

$$\int_0^R J_\nu(k_n x) J_\nu(k_m x) x \mathrm{d}x = 0, (n \neq m) \tag{4.7.11}$$

现在来证明此式。贝塞尔方程：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[xJ_\nu'(x)] + (x - \frac{\nu^2}{x}) J_\nu(x) = 0 \tag{4.2.17}$$

再将x写成$z_1 x$，其中z_1是个复的常量.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z_1 x}[z_1 x \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z_1 x} J_\nu(z_1 x)] + (z_1 x - \frac{\nu^2}{z_1 x}) J_\nu(z_1 x) = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[z_1 x J_\nu'(z_1 x)] + (z_1^2 x - \frac{\nu^2}{x}) J_\nu(z_1 x) = 0$$

同样，对于另一个复数z_2，有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[z_2 x J_\nu'(z_2 x)] + (z_2^2 x - \frac{\nu^2}{x}) J_\nu(z_2 x) = 0$$

两式分别乘以$J_\nu(z_2 x)$和$J_\nu(z_1 x)$之后相减.其中，

$$J_\nu(z_2x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[z_1xJ'_\nu(z_1x)]-J_\nu(z_1x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[z_2xJ'_\nu(z_2x)]$$
$$=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[J_\nu(z_2x)z_1xJ'_\nu(z_1x)-J_\nu(z_1x)z_2xJ'_\nu(z_2x)]$$

在区间$[0,a]$上对 x 积分.

$$\left[z_1xJ_\nu(z_2x)J'_\nu(z_1x)]-z_2xJ_\nu(z_1x)J'_\nu(z_2x)\right]_0^a$$
$$+(z_1^2-z_2^2)\int_0^a xJ_\nu(z_1x)J_\nu(z_2x)\mathrm{d}x=0$$

$$(z_1^2-z_2^2)\int_0^a xJ_\nu(z_1x)J_\nu(z_2x)\mathrm{d}x=-a\left[J_\nu(z_2x)z_1J'_\nu(z_1x)-J_\nu(z_1x)z_2J'_\nu(z_2x)\right]_{x=a} \quad (4.2.18)$$

在其中令 $z_1=k_n, z_2=k_m, a=R$，得到

$$\int_0^R xJ_\nu(k_nx)J_\nu(k_mx)\mathrm{d}x=-\frac{R}{k_n^2-k_m^2}\left[J_\nu(k_mx)k_nJ'_\nu(k_nx)-J_\nu(k_nx)k_mJ'_\nu(k_mx)\right]_{x=R} \quad (4.7.12)$$

第一类边界条件，

$$J_\nu(k_nR)=J_\nu(k_mR)=0$$

和第二类边界条件

$$J'_\nu(k_nR)=J'_\nu(k_mR)=0$$

这两种情况，都得到(4.7.11).对于第三类边界条件，

$$\alpha k_nJ'_\nu(k_nR)+\beta J_\nu(k_nR)=0$$

必然同时有

$$\alpha k_mJ'_\nu(k_mR)+\beta J_\nu(k_mR)=0.$$

系数 α 和 β 有非零解的条件是：系数行列式一定为零：$J_\nu(k_mR)k_nJ'_\nu(k_nR)-J_\nu(k_nR)k_mJ'_\nu(k_mR)=0$.因此，对于三类边界条件，(4.7.12)式右边总为零.式(4.7.12)得证.

这在 3.2.3 小节定理 3 的普遍情况下已经证明过了.此处对于贝塞尔函数的具体情况再证明一遍.

(2) 特征函数的模平方的计算

计算特征函数 $J_\nu(k_nx)$ 的模的平方.

$$N_n^2=\int_0^R J_\nu^2(k_nx)x\mathrm{d}x \quad (4.7.13)$$

我们应明确，特征值和模都是相对于 ν阶贝塞尔函数来说的.仔细地写明应该是 $N_{\nu,n}^2=\int_0^R J_\nu^2(k_{\nu,n}x)x\mathrm{d}x$.本节我们忽略了特征值和模的暗含的指标 ν.

现在已知 $J_\nu(k_nx)$ 是贝塞尔方程(4.7.3)的解.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}J_\nu(k_n x)\right)+(k_n^2 x-\frac{\nu^2}{x})J_\nu(k_n x)=0$$

在此式两边乘以 $x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}J_\nu(k_n x)$.

$$[x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}J_\nu(k_n x)]\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}J_\nu(k_n x)\right)+(k_n^2 x-\frac{\nu^2}{x})J_\nu(k_n x)\right\}=0$$

此式两边对 x 从 0 到 R 积分.

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}[x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}J_\nu(k_n x)]^2\Big|_0^R+\int_0^R(k_n^2x^2-\nu^2)J_\nu(k_n x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}J_\nu(k_n x)\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2}[R\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}R}J_\nu(k_n R)]^2+\frac{1}{2}\int_0^R(k_n^2x^2-\nu^2)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}J_\nu^2(k_n x)\mathrm{d}x=0\end{aligned}$$

对第二项再用分部积分法.可得

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}[R\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}R}J_\nu(k_n R)]^2+\frac{1}{2}(k_n^2x^2-\nu^2)J_\nu^2(k_n x)\Big|_0^R-k_n^2\int_0^R xJ_\nu^2(k_n x)\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2}[R\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}R}J_\nu(k_n R)]^2+\frac{1}{2}(k_n^2R^2-\nu^2)J_\nu^2(k_n R)+\frac{1}{2}\nu^2J_\nu^2(0)-k_n^2N_n^2=0\end{aligned}$$

我们设ν是大于 0 的实数，则 $J_\nu(0)=0$.当 $\nu=0$ 时 $\nu J_\nu(0)=0$.故 $\nu\geq 0$ 时，

$$\begin{aligned}N_n^2&=\frac{R^2}{2k_n^2}[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}R}J_\nu(k_n R)]^2+\frac{1}{2}(R^2-\frac{\nu^2}{k_n^2})J_\nu^2(k_n R)\\&=\frac{R^2}{2}[J_\nu'(k_n R)]^2+\frac{1}{2}(R^2-\frac{\nu^2}{k_n^2})J_\nu^2(k_n R)\end{aligned}\tag{4.7.14}$$

下面针对(4.7.5)式的三类线性齐次边界条件，分别计算 N_n^2 的具体数值.

(i) 第一类边界条件 $J_\nu(k_n R)=0$

$$N_n^2=\frac{R^2}{2}[J_\nu'(k_n R)]^2$$

可利用递推公式 $J_\nu'(x)=\frac{\nu}{x}J_\nu(x)-J_{\nu+1}(x)$.

$$N_n^2=\frac{R^2}{2}[\frac{\nu}{k_n R}J_\nu(k_n R)-J_{\nu+1}(k_n R)]^2=\frac{R^2}{2}[J_{\nu+1}(k_n R)]^2\tag{4.7.15}$$

特别,当 $\nu=0$ 时,

$$N_{0,n}^2=\frac{R^2}{2}[J_1(k_{0,n}R)]^2\tag{4.7.16}$$

(ii) 第二类边界条件 $J_\nu'(k_n R)=0$

$$N_n^2=\frac{1}{2}(R^2-\frac{\nu^2}{k_n^2})J_\nu^2(k_nR) \tag{4.7.17}$$

特别,当$\nu=0$时，

$$N_{0,n}^2=\frac{1}{2}R^2J_0^2(k_{0,n}R) \tag{4.7.18}$$

(iii) 第三类边界条件$\alpha k_nJ_\nu'(k_nR)+\beta J_\nu(k_nR)=0$

此边界条件意味着

$$J_\nu'(k_nR)=-\frac{\beta}{\alpha k_n}J_\nu(k_nR)$$

代入(4.7.14)式.

$$\begin{aligned}N_n^2&=\frac{R^2}{2}[\frac{\beta}{\alpha k_n}J_\nu(k_nR)]^2+\frac{1}{2}(R^2-\frac{\nu^2}{k_n^2})J_\nu^2(k_nR)\\&=\frac{1}{2}[(\frac{\beta^2}{\alpha^2k_n^2}+1)R^2-\frac{\nu^2}{k_n^2}]J_\nu^2(k_nR)\end{aligned} \tag{4.7.19}$$

特别,当$\nu=0$时，

$$N_{0,n}^2=\frac{1}{2}(\frac{\beta^2}{\alpha^2k_{0,n}^2}+1)R^2J_0^2(k_{0,n}R) \tag{4.7.20}$$

(3) 傅里叶-贝塞尔级数

根据斯图姆-刘维尔理论，函数系$\{J_\nu(k_nx)\}$是一正交完备系.在$(0,R)$区间上的函数$f(x)$可展开成**傅里叶-贝塞尔级数**：

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}c_nJ_\nu(k_nx) \tag{4.7.21}$$

其中展开系数如下计算

$$c_n=\frac{1}{N_n^2}\int_0^R f(x)J_\nu(k_nx)x\mathrm{d}x \tag{4.7.22}$$

关于傅里叶-贝塞尔级数的收敛性,已一般地叙述于 3.2.3 节斯图姆-刘维尔型方程 4 个定理中的定理 4.下面是一个应用范围更广的定理.

定理 1 若函数$f(x)$在区间$(0,R)$上逐段光滑，且积分$\int_0^R\sqrt{x}\,|f(x)|\mathrm{d}x$的值有限，那么傅里叶-贝塞尔级数(4.7.21)收敛于$\frac{1}{2}[f(x+0^+)+f(x-0^+)]$.级数(4.7.21)中的$k_n$是$J_\nu(k_nR)=0$的根.

注意，此定理适用于第一类齐次边界条件(4.7.5a)的情况.这也是最为常见的情况.

例 1 设$\mu_m,(m=1,2,3,\cdots)$是$J_0(x)$的正零点，将函数$f(x)=1,(0\le x\le 1)$展成

$J_0(\mu_m x)$ 的傅里叶-贝塞尔级数.

解 由方程(4.7.3)知，在此情形下 $R=1, \nu=0$.由公式(4.7.21)，设

$$1=\sum_{m=1}^{\infty} c_m J_0(\mu_m x)$$

式中系数 c_m 由(4.7.22)式计算.

$$c_m=\frac{1}{N_m^2}\int_0^1 J_0(\mu_m x)x\mathrm{d}x \tag{4.7.23}$$

现在的边界条件是第一类边界条件.因而 N_m^2 由式(4.7.16)得

$$N_m^2=\frac{1}{2}[J_1(\mu_m)]^2 \tag{4.7.24}$$

利用贝塞尔函数的递推公式 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[xJ_1(x)\right]=xJ_0(x)$.

$$\int_0^1 xJ_0(\mu_m x)\mathrm{d}x=[\frac{xJ_1(\mu_m x)}{\mu_m}]_{x=0}^{x=1}=\frac{1}{\mu_m}J_1(\mu_m) \tag{4.7.25}$$

把(4.7.25)和(4.7.24)代入(4.7.23)，

$$c_m=\frac{2}{[J_1(\mu_m)]^2}\int_0^1 1\cdot J_0(\mu_m x)x\mathrm{d}x=\frac{2}{\mu_m J_1(\mu_m)}$$

从而函数 $f(x)=1,(0\le x\le 1)$ 的傅里叶-贝塞尔级数为

$$1=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2}{\mu_m J_1(\mu_m)}J_0(\mu_m x),\quad (0\le x\le 1)$$

本章重点

贝塞尔方程的形式(4.1.1)及其一个解的表达式(4.1.12)。
第二类贝塞尔函数的定义(4.1.41)。
第一类贝塞尔函数的四个基本的递推公式(4.2.2)-(4.2.5)。第二类的(4.2.11)。
贝塞尔函数的渐进式(4.2.15)。
整数阶贝塞尔函数的母函数(4.3.9)。一些公式都是由这个母函数关系出发证明的。
第三类贝塞尔函数，即两类汉克尔函数的定义(4.5.1)。
4.7 节的内容。这是因为实际上遇到的都是实变量的问题。

轻点：
贝塞尔函数的渐进式(4.2.12)(4.2.13)。J_ν和 $J_{\nu+1}$ 两条曲线的相互关系。即一条曲线的相邻两个零点之间，一定有另一条曲线的一个零点。
变形贝塞尔方程(4.6.1)。虚变量贝塞尔函数的定义(4.6.3)(4.6.6)。

小贴士

本章讲的贝塞尔函数是给出了一个应该用级数展开法求解二阶微分方程的解的一个比较详细的例子。

从 4.7 节的例子可以看到，一般说来，径向方程归于贝塞尔方程。

习题

0. 由贝塞尔方程证明：若 $J_\nu(z)=0$.则 $J_\nu(-z)=0$.零点关于原点对称.

1. 仿照 4.1.1 小节的步骤，用幂级数法求解勒让德方程.

2. 将 ν 阶贝塞尔方程乘以 J_ν'，再积分，证明：

$$\int_0^z uJ_\nu^2(u)\mathrm{d}u=\frac{1}{2}z^2[J_\nu^2(z)+J_{\nu+1}^2(z)]-\nu zJ_\nu(z)J_{\nu+1}(z)$$

3. 证明

$$\begin{vmatrix} J_\nu(z) & J_{\nu-1}(z) \\ Y_\nu(z) & Y_{\nu-1}(z) \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} J_\nu(z) & J_\nu'(z) \\ Y_\nu(z) & Y_\nu'(z) \end{vmatrix}=\frac{2}{\pi z}$$

(提示：利用递推公式.)

4. 利用朗斯基行列式(4.2.19)或(4.2.20)完成积分 $\int\frac{\mathrm{d}z}{z[J_\nu(z)]^2}$.

5. 利用上一题的结果，完成以下积分.

(1) $\int\frac{\mathrm{d}z}{zJ_\nu(z)Y_\nu(z)}$. (2) $\int\frac{\mathrm{d}z}{z[Y_\nu(z)]^2}$. (3) $\int\frac{\mathrm{d}z}{z[J_\nu^2(z)+Y_\nu^2(z)]}$.

6. 证明下列等式

(1) $J_2=J_0''-z^{-1}J_0'$

(2) $4J_n''=J_{n-2}-2J_n+J_{n+2}$.(提示：将整数阶贝塞尔函数的母函数展开式两边对 z 求导两次.)

(3) $z^2J_n''=(n^2-n-z^2)J_n+zJ_{n+1}$。(提示：将整数阶贝塞尔函数的母函数展开式两边对 t 求导两次.结合(2)的结果.)

(4) $2J_0''=J_2-J_0$

7. 证明：$\int zJ_0(z)\mathrm{d}z=zJ_1(z)+C$，

$$\int z^nJ_0(z)\mathrm{d}z=z^nJ_1(z)+(n-1)z^{n-1}J_0(z)-(n-1)^2\int z^{n-2}J_0(z)\mathrm{d}z，\quad n\geq 2 .$$

并计算$\int z^3 J_0(z)\mathrm{d}z$和$\int z^4 J_0(z)\mathrm{d}z$.

8. 证明下列不定积分

(1) $\int J_1(z)\mathrm{d}z = -J_0(z)+C$

(2) $\int zJ_1(z)\mathrm{d}z = -zJ_0(z)+\int J_0(z)\mathrm{d}z$

(3) $\int z^2 J_1(z)\mathrm{d}z = 2zJ_1(z)-z^2 J_0(z)+C$

(4) $\int \frac{1}{z^2}J_2(z)\mathrm{d}z = -\frac{1}{3}(\frac{2}{z^2}-1)J_1(z)+\frac{1}{3z}J_0(z)+\frac{1}{3}\int J_0(z)\mathrm{d}z$

(5) $\int z^2 J_2(z)\mathrm{d}z = -z^2 J_1(z)-3zJ_0(z)+3\int J_0(z)\mathrm{d}z$

(6) $\int z^3 J_3(z)\mathrm{d}z = -z^3 J_2(z)+5\int z^2 J_2(z)\mathrm{d}z$.然后继续积分得到最后结果.

(7) 计算$\int J_3(z)\mathrm{d}z$，(提示：利用$z^{-2}J_3 = -(z^{-2}J_2)'$和$z^{-1}J_2 = -(z^{-1}J_1)'$并分部积分.)

(8) $\int J_0(z)\cos z\mathrm{d}z = zJ_0(z)\cos z + zJ_1(z)\sin z + C$.(提示可从右边求导得到左边.)

(9) $\int J_0(z)\sin z\mathrm{d}z = zJ_0(z)\sin z - zJ_1(z)\cos z + C$

9. 证明：

$$Y_{-\nu}(z) = \sin\nu\pi J_\nu(z)+\cos\nu\pi Y_\nu(z)$$

$$Y_\nu(z\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\pi}) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}m\pi}Y_\nu(z)+2\mathrm{i}\sin m\nu\pi\cot\nu\pi J_\nu(z)$$

$$Y_{-\nu}(z\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\pi}) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}m\pi}Y_{-\nu}(z)+2\mathrm{i}\sin m\nu\pi\csc\nu\pi J_\nu(z)$$

10. 证明 $z = 2\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)J_{2n+1}(z)$， $z^2 = 2\sum_{n=0}^{\infty}(2n)^2 J_{2n}(z)$

11. 证明：

(1) $z\cos z = 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(2n+1)^2 J_{2n+1}(z)$

(2) $z\sin z = 2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}(2n)^2 J_{2n}(z)$

12. 证明

$$[1+(-1)^n]J_n(z) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(z\sin\varphi)\cos(n\varphi)\mathrm{d}\varphi$$

$$[1-(-1)^n]J_n(z) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(z\sin\varphi)\sin(n\varphi)\mathrm{d}\varphi$$

并说明：

$$J_{2n}(z)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\cos(z\sin\varphi)\cos(2n\varphi)\mathrm{d}\varphi$$

$$J_{2n+1}(z)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\sin(z\sin\varphi)\sin((2n+1)\varphi)\mathrm{d}\varphi$$

13. 证明，当 $z=x$ 为实数时，

(1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}J_{2n+1}(x)=\frac{1}{2}\int_0^x J_0(t)\mathrm{d}t$.

(2) 当ν是大于 0 的实数，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}J_{\nu+2n+1}(x)=\frac{1}{2}\int_0^x J_\nu(t)\mathrm{d}t$.

14. 利用递推公式证明，

(1) $J_\nu(z)=\frac{2\nu-2}{z}J_{\nu-1}(z)-J_{\nu-2}(z)$

(2) $J_3(z)+3J_0'(z)+4J_0'''(z)=0$

15. 证明：(1) $\int J_0(z)\cos z\mathrm{d}z=zJ_0(z)\cos z+zJ_1(z)\sin z+C$,

(2) $\int J_0(z)\sin z\mathrm{d}z=zJ_0(z)\sin z-zJ_1(z)\cos z+C$.

16. 证明： $J_n(2\sqrt{z})=(-1)^n z^{n/2}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}z^n}J_0(2\sqrt{z})$

17. 运用(4.2.8)式证明：

(1)
$$\begin{aligned}&(z+h)^{-\nu/2}J_\nu(\sqrt{z+h})=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{h^m}{m!}\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}z^m}(z^{-\nu/2}J_\nu(\sqrt{z}))\\&=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m h^m}{2^m m!}z^{-(\nu+m)/2}J_{\nu+m}(\sqrt{z}),\quad (|h|<|z|)\end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned}&(z+h)^{-\nu/2}J_\nu(\sqrt{z+h})=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{h^m}{m!}\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}z^m}(z^{\nu/2}J_\nu(\sqrt{z}))\\&=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{h^m}{2^m m!}z^{(\nu-m)/2}J_{\nu-m}(\sqrt{z}),\quad (|h|<|z|)\end{aligned}$$

18. 证明： $\int_0^{\pi}\cos(z\cos\varphi)\mathrm{d}\varphi=\int_0^{\pi}\cos(z\sin\varphi)\mathrm{d}\varphi$.(提示：利用式(4.3.22).)

19. 利用(4.3.23)式，写出 $J_n(z)$ 的积分表达式.再利用(4.3.18)证明：

$\int_0^{\pi}\sin(z\sin\varphi)\sin(2m\varphi)\mathrm{d}\varphi=0$ ， $\int_0^{\pi}\cos(z\sin\varphi)\cos(2m+1)\varphi\mathrm{d}\varphi=0$

20. 证明： $J_0(z)=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\cos(zt)}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t$

21. 给出 $J_{\pm7/2}(z)$ 的表达式.并写出$|z|\gg1$时的表达式.

22. 计算朗斯基行列式 $J_{\nu}(x)H_{\nu-1}^{(2)}(x)-J_{\nu-1}(x)H_{\nu}^{(2)}(x)$.

23. 证明：

$$H_{\nu}^{(1)}(z\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\pi})=\frac{\sin(1-m)\nu\pi}{\sin\nu\pi}H_{\nu}^{(1)}(z)-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\nu\pi}\frac{\sin m\nu\pi}{\sin\nu\pi}H_{\nu}^{(2)}(z)$$

$$H_{\nu}^{(2)}(z\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\pi})=\frac{\sin(1+m)\nu\pi}{\sin\nu\pi}H_{\nu}^{(2)}(z)+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\nu\pi}\frac{\sin m\nu\pi}{\sin\nu\pi}H_{\nu}^{(1)}(z)$$

24. 柱函数可以统一地用 $Z_{\nu}(z)$ 来表示.证明：柱函数一定满足贝塞尔方程.

25. 证明：

$$I_{\nu}(z\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\pi})=\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\nu\pi}I_{\nu}(z)$$

$$K_{\nu}(z\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\pi})=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}m\nu\pi}K_{\nu}(z)-\mathrm{i}\pi\frac{\sin m\nu\pi}{\sin\nu\pi}I_{\nu}(z)$$

26. 利用 12 题的结果给出 $I_n(z)$ 的积分表达式.

27. 证明 $h_n^{(1)}(-z)=(-1)^n h_n^{(2)}(z)$， $h_n^{(2)}(-z)=(-1)^n h_n^{(1)}(z)$.

28. 证明

$$H_0^{(1,2)}(\mathrm{i}z)=I_0(z)\mp\mathrm{i}\frac{2}{\pi}K_0(z)$$

29. 由整数阶虚变量贝塞尔函数的母函数关系 $\exp(\frac{z}{2}(t+\frac{1}{t})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}I_n(z)t^n$， 证明

(1) $\mathrm{e}^{z\cos\varphi}=I_0(z)+\sum_{n=1}^{\infty}I_n(z)2\cos n\varphi$

(2) $\mathrm{e}^{-z\sin\varphi}=I_0(z)+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n I_{2n}(z)2\cos 2n\varphi+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n I_{2n+1}(z)2\sin(2n+1)\varphi$

30. 证明：

(1) $\cosh(z\cos\varphi)=I_0(z)+2\sum_{n=1}^{\infty}I_{2n}(z)\cos 2n\varphi$

(2) $\sinh(z\cos\varphi)=2\sum_{n=1}^{\infty}I_{2n+1}(z)\cos(2n+1)\varphi$

(3) $\cosh(z\sin\varphi)=I_0(z)+2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n I_{2n}(z)\cos 2n\varphi$

(4) $\sinh(z\sin\varphi)=2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n I_{2n+1}(z)\sin(2n+1)\varphi$

31. 证明： $I_0(z)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cosh(z\cos\varphi)\mathrm{d}\varphi=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cosh(z\sin\varphi)\mathrm{d}\varphi$

32. 证明 $\cosh z = I_0(z) + 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n I_{2n}(z)$， $\sinh z = 2\sum_{n=0}^{\infty} I_{2n+1}(z)$.

33. 证明：

(1) $I_{n+1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi \mathrm{i}z}} z^{n+1} (\frac{1}{z}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z})^n \frac{\sinh z}{z}$

(2) $K_{n+1/2}(z) = (-1)^n \sqrt{\frac{\pi}{2z}} z^{n+1} (\frac{1}{z}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z})^n \frac{\mathrm{e}^{-z}}{z}$

34. 证明： $I_0(z) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{e}^{-zt}}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t$

35. 证明

(1) $I_{1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sinh z$， $I_{-1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cosh z$

(2) $K_{1/2}(z) = K_{-1/2}(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} \mathrm{e}^{-z}$

36. 当 n 是整数时，证明下列各式.

(1) $\frac{1}{z^n} J_n(z) = (-2)^n \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}(z^2)^n} J_0(z)$

(2) $\frac{1}{z^n} H_n(z) = (-2)^n \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}(z^2)^n} H_0(z)$

(3) $\frac{1}{z^{n+1/2}} J_{n+1/2}(z) = (-2)^n \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}(z^2)^n} (\frac{\sin z}{z})$

(4) $\frac{1}{z^{n+1/2}} H^{(1)}_{n+1/2}(z) = -\mathrm{i}(-2)^n \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}(z^2)^n} (\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z})$

(5) $\frac{1}{z^{n+1/2}} J_{-n-1/2}(z) = 2^n \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}(z^2)^n} (\frac{\cos z}{z})$

(6) $\frac{1}{z^{n+1/2}} H^{(1)}_{-n-1/2}(z) = -\mathrm{i}2^n \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}(z^2)^n} (\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z})$

37. 贝塞尔方程是(4.1.1)式，球贝塞尔方程是(4.5.11)式.它们之间的区别是，一次导数项的系数分别是 1 和 2.后者通过一个变换，可以变成前者 $w(z) = u(z)/\sqrt{z}$，见(4.5.12)，解为半整数阶贝塞尔函数.假如现在一次导数项的系数为任意正整数 n，那么，能否找到一个变换，将方程变换为贝塞尔方程？原方程的解是什么形式？显然，这个一般的情况应该自然地包括了 n=2，也就是球贝塞尔方程的特例.

38. 证明： $w(z) = \sqrt{z} J_{3/2}(z)$ 是方程 $z^2 w''(z) + (z^2 - 2)w(z) = 0$ 的一个解.

39. 试证明 $w(z)=zJ_\nu(z)$ 是方程 $z^2w''(z)-zw'(z)+(1+z^2-\nu^2)w(z)=0$ 的一个解.

40. 有微分方程 $w''(z)+ae^{mz}w(z)=0$.试用变量代换 $u=e^{mz/2}$ 将此方程化为贝塞尔方程.写出此贝塞尔方程的通解.写出原方程的通解.

41. 有微分方程 $w''(z)+k^2z^2w(z)=0$.是用函数代换 $f(z)=w(z)/\sqrt{z}$ 和变量代换 $u=z^2$ 将此方程化为贝塞尔方程.写出此贝塞尔方程的通解.写出原方程的通解.

42. 将以下微分方程按提示作变换化为贝塞尔方程，从而得到其通解.在变换过程中，若出现多值函数，则必须遵守有关单值分支的规定.

(1) $zw''(z)+w'(z)+\frac{1}{4}w(z)=0, u=\sqrt{z}$

(2) $z^2w''(z)+zw'(z)+4(z^4-k^2)w(z)=0, u=z^2$

(3) $z^2w''(z)+zw'(z)-(z+\frac{m^2}{4})w(z)=0, u=2iz$

(4) $zw''(z)-w'(z)+zw(z)=0, w(z)=zf(z)$

(5) $zw''(z)+(1+2n)w'(z)+zw(z)=0, w(z)=z^{-n}f(z)$

(6) $z^2w''(z)+(z-2z^2\tan z)w'(z)-(m^2+z\tan z)w(z)=0, w(z)=\frac{1}{\cos z}f(z)$

(7) $z^2w''(z)+(z+2z^2\tan z)w'(z)-(m^2-z\cot z)w(z)=0, w(z)=\frac{1}{\sin z}f(z)$

(8) $w''(z)+k^2zw(z)=0, w(z)=\sqrt{z}f(z), u=\frac{2k}{3}z^{3/2}$

(9) $z^2w''(z)+\frac{1}{4}(z+\frac{3}{4})w(z)=0, w(z)=\sqrt{z}f(z), u=\sqrt{z}$

(10) $z^2w''(z)-3zw'(z)+4(z^4-3)w(z)=0, w(z)=z^2f(z), u=z^2$

43. 设 k_n 是 $J_0(2k_n)=0$ 的正实根，把函数 $f(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1\\ 1/2, & x=1\\ 0, & 1<x<2\end{cases}$ 展开成贝塞尔函数 $J_0(k_nx)$ 的级数.

44. 设 k_n 是 $J_1(k_n)=0$ 的正实根，把函数 $f(x)=x,\ (0<x<1)$ 展开成贝塞尔函数 $J_1(k_nx)$ 的级数.

45. 设 k_n 是 $J_1(k_n)=0$ 的正实根，把函数 $f(x)=x^3,\ (0<x<1)$ 展开成贝塞尔函数 $J_1(k_nx)$ 的级数.

46. 若 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}A_nJ_0(k_nx)$，其中 $J_0(k_n)=0,(n=1,2,3,\cdots)$.证明

$$\int_0^1 xf^2(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}A_n^2J_1^2(k_n)$$

47. 若$1=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{k_nJ_1(k_n)}J_0(k_nx)$及上题，证明$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{k_n^2}=\frac{1}{4}$其中 $J_0(k_n)=0,(n=1,2,3,\cdots)$.

48. 设 $\mu_m,(m=1,2,3,\cdots)$ 是 $J_0(x)$ 的正零点，将函数 $f(x)=1-x^2,(0\le x\le 1)$ 展成 $J_0(\mu_m x)$ 的傅里叶-贝塞尔级数.

49. 求解以下柱对称波动方程的定解问题.

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}u(t,r,\varphi)=a^2[\dfrac{\partial^2}{\partial r^2}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}+\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2}{\partial\varphi^2}]u(t,r,\varphi),(r\le R,t>0)\\ \dfrac{\partial}{\partial r}u(t,r,\varphi)|_{r=R}=0,u(t,r,\varphi)|_{r=0}<\infty\\ u(t,r,\varphi)|_{t=0}=0,\dfrac{\partial}{\partial t}u(t,r,\varphi)|_{t=0}=1-\dfrac{r^2}{L^2}\end{cases}$$

50. 有一均匀圆柱，半径为 R，高为 L.柱侧绝热而上下底温度保持为 $f_2(r)$ 和 $f_1(r)$.试求柱内稳定温度分布.这是柱坐标系内的如下定解问题.

$$\begin{cases}[\dfrac{\partial^2}{\partial r^2}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}+\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2}{\partial\varphi^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial z^2}]u(r,\varphi,z)=0,(r\le R,0<z<L)\\ \dfrac{\partial}{\partial r}u(r,\varphi,z)|_{r=R}=0\\ u(r,\varphi,0)=f_1(r)\\ u(r,\varphi,L)=f_2(r)\end{cases}$$

其中微分方程是温度稳定分布应满足的拉普拉斯方程.第一个边界条件是柱侧绝热的条件.求解此定解问题.

51. 设有一均匀圆球，半径为 R.开始的时候，球体各处温度均匀为$0^\circ\mathrm{C}$.今将球面温度保持为一定不变的$u_0{}^\circ\mathrm{C}$.试解此加热问题.定解问题如下.

$$\begin{cases}u_t(t,r,\theta,\varphi)=a^2\Delta u(t,r,\theta,\varphi),(r\le R)\\ u(t,r,\theta,\varphi)|_{t=0}=0\\ u(t,r,\theta,\varphi)|_{r=R}=u_0\end{cases}$$

(提示：边界条件是非齐次的，需要先设法化去.)

52. 圆柱冷却问题.有一半径为 R 的无限长圆柱，横截面在 xy 平面内.已知初始温度为$\varphi(x,y)$，表面温度总是为$0^\circ\mathrm{C}$.求柱体内温度的变化.此问题归结为二维定解问题

$$\begin{cases}\frac{\partial}{\partial t}u(t,x,y)=a^2(\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(t,x,y)+\frac{\partial^2}{\partial y^2}u(t,x,y)),(x^2+y^2\le R^2,t>0)\\ u(t,x,y)|_{t=0}=\varphi(x,y)\\ u(t,x,y)|_{x^2+y^2=R^2}=0\end{cases}$$

在柱坐标下，求其级数解.

53. 有一均匀圆柱，半径为 R，高为 L.柱侧有均匀分布的稳定热流流入，热流强度为 q.上下底温度保持为$0^\circ\mathrm{C}$.试求柱内稳定温度分布.这是柱坐标系内的如下定解问题.

$$\begin{cases}[\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}]u(r,\varphi,z)=0,(r\le R,0<z<L)\\ \frac{\partial}{\partial r}u(r,\varphi,z)|_{r=R}=q\\ u(r,\varphi,0)=0\\ u(r,\varphi,L)=0\end{cases}$$

其中微分方程是温度稳定分布应满足的拉普拉斯方程.第一个边界条件是柱侧存在稳流的条件.求解此定解问题.

54. 圆柱半径为 R,高为 h,侧面在温度为$0^\circ\mathrm{C}$的自由空气中冷却.下底温度常为$0^\circ\mathrm{C}$.上底温度常为 $f(r)$.求柱内温度分布.这是如下的定解问题.

$$\begin{cases}u_{rr}(r,z)+\frac{1}{r}u_r(r,z)+u_{zz}(r,z)=0\\ u(r,z)|_{r=0}<\infty,[u_r(r,z)+k(r,z)]|_{r=R}=0\\ u(r,z)|_{z=h}=f(r),u(r,z)|_{z=0}=0\end{cases}$$

55. 解下列定解问题

(1) $$\begin{cases}u_{tt}(t,r)+2hu_t(t,r)=a^2[u_{rr}(t,r)+\frac{1}{r}u_r(t,r)]\\ u(t,r)|_{r=0}<\infty,u(t,r)|_{r=R}=0\\ u(t,r)|_{t=0}=\varphi(r),u_t(t,r)|_{t=0}=0\end{cases}$$

(2) $$\begin{cases}u_{rr}(r,z)+\frac{1}{r}u_r(r,z)+u_{zz}(r,z)=0\\ u(r,z)|_{r=0}<\infty,u(r,z)|_{r=R}=f(z)\\ u(r,z)|_{z=h}=0,u(r,z)|_{z=0}=0\end{cases}$$

并计算 $f(z)=f_0$ 为常数时的结果.

56. 半径为 R 的无限长圆柱体的侧表面保持恒定温度其中u_0，柱内的初始温度是 $0^\circ\mathrm{C}$，求柱内的温度分布.

57. 半径为 R 的半圆形薄膜，边缘固定，求其特征振动.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2}{\partial t^2}u(t,r,\varphi)=a^2[\dfrac{\partial^2}{\partial r^2}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}+\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2}{\partial \varphi^2}]u(t,r,\varphi),(r\le R,t>0) \\ \dfrac{\partial}{\partial r}u(t,r,\varphi)|_{r=R}=0,u(t,r,\varphi)|_{r=0}<\infty \\ u(t,r,\varphi)|_{t=0}=0,\dfrac{\partial}{\partial t}u(t,r,\varphi)|_{t=0}=1-\dfrac{r^2}{L^2} \end{cases}$$

附录 4A $\Gamma(z)$ 函数的导数与 $\psi(z)$ 函数

本附录中，我们简单地回顾 $\Gamma(z)$ 函数的导数与 $\psi(z)$ 函数.

$\Gamma(z)$ 函数的定义是

$$\Gamma(z)=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}t^{z-1}\mathrm{d}t,\mathrm{Re}\,z>0 \tag{4A.1}$$

定义

$$\psi(z)=\frac{\mathrm{d}\ln\Gamma(z)}{\mathrm{d}z}=\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} \tag{4A.2}$$

将公式

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\frac{\pi}{\sin\pi z} \tag{4A.3}$$

两边取对数

$$\ln[\Gamma(z)\Gamma(1-z)]=\ln\frac{\pi}{\sin\pi z}$$

求导

$$\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}-\frac{\Gamma'(1-z)}{\Gamma(1-z)}=-\frac{\cos\pi z}{\sin\pi z}$$

得到

$$\psi(1-z)=\psi(z)+\cot\pi z \tag{4A.4}$$

由 $\Gamma(z)$ 函数的公式

$$\Gamma(z+n)=(z+n-1)(z+n-2)\cdots z\Gamma(z)$$

两边取对数

$$\ln\Gamma(z+n)=\sum_{m=0}^{n-1}\ln(z+m)+\ln\Gamma(z)$$

求导

$$\frac{\Gamma'(z+n)}{\Gamma(z+n)}=\sum_{m=0}^{n-1}\frac{1}{z+m}+\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}$$

得到

$$\psi(z+n)=\psi(z)+\sum_{m=0}^{n-1}\frac{1}{z+m} \tag{4A.5}$$

特别，当$n=1$时，

$$\psi(z+1)=\psi(z)+\frac{1}{z}$$

取 z 为整数 k，则有

$$\psi(k+1)=\psi(k)+\frac{1}{k}=\psi(k-1)+\frac{1}{k-1}+\frac{1}{k}=\cdots=\psi(1)+\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{j}=\psi(1)+H_k \text{ (4A.5)}$$

现在来看$\psi(1)$.

$$\psi(1)=\lim_{z\to 1}\frac{\mathrm{d}\ln\Gamma(z)}{\mathrm{d}z}=\lim_{z\to 1}\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}$$

这一极限可由数值计算得到，结果为

$$\psi(1)=-\gamma \tag{4A.6}$$

其中$\gamma=0.5772157\cdots$是欧拉常数，且$\mathrm{e}^{\gamma}=1.781072\cdots$.

把(4A.6)代入(4A.5)式，得

$$\psi(k+1)=\psi(1)+\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{j}=-\gamma+H_k$$

此式用于(4.1.30)和(4.1.31)式.