Chapter 2

Hilbert Space

§2.1 线性空间，内积空间和希尔伯特空间

2.1.1 线性空间

1. 距离空间

当我们考虑一个集合中的两个元素之间的关系时，最常见的是希望描述这两个元素之间相互靠近的程度，或者是相互偏离的程度.例如，两个数 x 和 y 的差的绝对值的大小，就是这种关系的一种描述.我们用“距离”这个概念来定义这种关系.

定义 1 设 X 是一个非空集合，对于 X 中的任意两个元素 x 和 y，按照一定的法则定义一个非负实数 $\rho(x,y)$，满足下面三个条件，则称 $\rho(x,y)$ 是元素 x 和 y 之间的**距离**，X 是按照 $\rho(x,y)$ 做成的一个**距离空间**或**度量空间**.X 中的元素也称为它的**点**.空间 X 中满足 $\rho(x,a)\le r$ 的点 x 的全体称为以点 a 为中心 r 为半径的**球**(**闭球**)，也称为点 a 的**邻域**.

(i) $\rho(x,y)\geq 0$，等号当且仅当 $x=y$ 时成立，(非负性)；

(ii) $\rho(x,y)\leq \rho(x,z)+\rho(y,z)$，(三角不等式)；

(iii) $\rho(x,y)=\rho(y,x)$，(对称性).

以上三条称为**距离三公理**.

对称性也可以从前两条推导得到.事实上，在(ii)中取 $z=x$，则有

$$\rho(x,y)\leq \rho(x,x)+\rho(y,x)$$

由非负性知 $\rho(x,x)=0$，因此

$$\rho(x,y)\leq \rho(y,x)$$

由于 x 和 y 是任意的，交换 x 和 y 得到

$$\rho(y,x)\leq \rho(x,y)$$

要使这两个不等式同时成立只能取等号，这就得到了对称性.

以下是常见的距离空间.

例 1 实数空间 R.对于 R 中的任意两个实数 x 和 y， 定义

$$\rho(x,y)=|x-y|$$

为两个实数 x 和 y 之间的距离，它符合距离三公理.由此，R 是一个距离空间.

复数空间 Z 按此定义距离之后，也是一个距离空间.

例 2 令 R_n 是 n 维欧几里得空间.它的点有形式 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，对元素 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 和 $y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$ 定义

$$\rho(x,y)=[\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2]^{1/2}$$

作为距离.也可以定义

$$\rho(x,y)=\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|$$

或者

$$\rho(x,y)=\max_{i}|x_i-y_i|$$

作为距离.由此，n 维欧氏空间是一个距离空间.

例 3 以 $C[a,b]$ 表示定义在区间 $[a,b]$ 上连续函数的全体，对 $x(t),y(t)\in C[a,b]$，定义

$$\rho(x,y)=\max_{a\leq t\leq b}|x(t)-y(t)|$$

作为距离.由此，$C[a,b]$是一个距离空间.

定义 2 若函数$x(t)$在区间$[a,b]$上的积分

$$\int_a^b |x(t)|^p \,\mathrm{d}t < \infty, (p \ge 1)$$

即积分是有限的，则称函数$x(t)$在$[a,b]$上是 ***p* 次可积**的. $[a,b]$上的 p 次可积函数的全体构成 ***p* 次可积空间**，记为$L_p[a,b], (p \ge 1)$.

例 4 在区间$[a,b]$上的 p 次可积空间.对于$x(t), y(t) \in L_p[a,b]$，定义

$$\rho(x,y) = \left(\int_a^b |x(t)-y(t)|^p \,\mathrm{d}t\right)^{1/p} \tag{2.1.1}$$

作为距离.由此，p 次可积空间$L_p[a,b], (p \ge 1)$是一个距离空间.以后，当我们说到 p 次可积空间L_p时，我们总是默认了 $p \ge 1$.

2. 收敛和极限的概念

有了距离的概念，就可以在距离空间 X 中引进收敛和极限的概念.

定义 3 令$x, x_n (n = 1, 2, \cdots) \in X$，若当$n \to \infty$时，数列$\rho(x, x_n) \to 0$，或者说，对于给定的$\varepsilon > 0$，存在$N > 0$，使得当$n > N$时，$\rho(x, x_n) < \varepsilon$，就称点列$\{x_n\}$按照距离$\rho(x,y)$ **收敛于** x，记作

$$\lim_{n \to \infty} x_n = x \tag{2.1.2}$$

或者$x_n \to x (n \to \infty)$.这时，称$\{x_n\}$为**收敛点列**，x 称为点列$\{x_n\}$的**极限**.

由距离空间三公理及上述对极限的定义，易知距离空间中收敛点列的极限是唯一的.

收敛和极限是以距离来定义的，因此，以后在讲到收敛和极限时，我们实质上已经定义了某种距离.任何一个收敛和极限是针对于我们已经定义好了的距离而言的.

定义 4 设$\{x_n\}$是距离空间 X 中的一个点列.如果任给$\varepsilon > 0$，存在$N > 0$，使得当自然数$m, n > N$时，

$$\rho(x_m, x_n) < \varepsilon \tag{2.1.3}$$

则称$\{x_n\}$是 X 中**基本序列**或者**柯西序列**.

距离空间 X 中的收敛点列一定是这个空间中的柯西序列.反过来，距离空间 X 中的柯西序列不一定是这个空间中的收敛点列.

3. 空间的完备性

定义 5 如果距离空间 X 中的柯西序列收敛于 X 中的点，则称空间 X 是**完备的距离空间**，简称为**完备的空间**.否则，就称空间 X 是**不完备的**.

这是关于空间完备性的定义.除此之外，就没有其它的空间完备性的定义了.因此，以后提及空间的完备性，一定是指，可以在集合中定义距离而构成距离空间，此距离空间是完备的.

例 5 实数空间 R 在定义了距离 $\rho(x,y)=|x-y|$ 之后，是完备的.

例 6 我们把全体有理数的集合记为 Y，对于 Y 中的任意两个元素 x 和 y， 定义 $\rho(x,y)=|x-y|$ 为两个有理数 x 和 y 之间的距离，它符合距离三公理.由此，Y 是一个距离空间.我们取其中一个序列 $\{S_n\}$：$S_n=\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m!}$.容易看到，这个序列符合柯西序列的定义，因此是一个柯西序列.这个序列的极限是 $\mathrm{e}-1$，这不是一个有理数，证明见附录 2A.因而，此序列的极限不在有理数空间之内.因此，有理数空间是不完备的.

4. 线性空间

距离的概念虽然给出了空间中元素之间的某一种关系，但是元素之间还可以有其它的关系.仅有距离的概念，对于元素之间的关系的了解还是不完全清楚的.通常所考虑的空间，常常同时又是一个代数系统，即空间中元素之间存在某种代数关系.如果只着眼于空间中的代数结构，即元素之间的加法运算和数与空间元素的乘法运算时，就可以定义线性空间的概念.

定义 7 设 X 是某些元素组成的集合，K 是复数域(或者实数域)，如果下列条件(i)，(ii)成立，称 X 是 K 上的一个**线性空间**，简称 X 为**线性空间**.对应于 K 是复数域或者实数域，分别称 X 为**复线性空间**或者**实线性空间**.也可称 X 为**向量空间**，其中的元素也可称为**向量**.

(i) 在 X 内定义加法运算，用+号表示，使得 $x,y\in X$ 时， $x+y\in X$ ，且满足

(a) $x+y=y+x$(加法交换律)；

(b) $(x+y)+z=x+(y+z)$(加法结合律)；

(c) 在 X 内有一个零元素，记为 θ，对任何 $x\in X$ ，有 $x+\theta=x$；

(d) 对任何 $x\in X$ ，存在逆元素 $-x\in X$ ，使得 $x+(-x)=\theta$.

(ii) 对任何元素 $x,y\in X$ 和任何数 $\alpha,\beta\in K$ ，定义数与元素之间的数乘，例如 $\alpha x\in X$ ，且满足

(e) $1x=x$；

(f) $(\alpha\beta)x=\alpha(\beta x)$(数乘交换律)；

(g) $(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x$(数乘结合律)；

(h) $\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y$(数乘结合律).

其中的θ元素也称为零向量.上述的(a)~ (h)称为**线性空间八公理**.

以下是线性空间的例子.

例 7 实平面向量集R_2，即，$R_2=\{(x_1,x_2)\}$，x_1,x_2是实数.定义其加法为对应的坐标分量相加，数乘是数与坐标分量相乘.具体地讲，对于给定的实数α和向量$x=(x_1,x_2),y=(y_1,y_2)$，则加法和数乘分别是

$$x+y=(x_1+y_1,x_2+y_2),\ \alpha x=(\alpha x_1,\alpha x_2)$$

R_2中的零元素为$\theta=(0,0)$，$x=(x_1,x_2)$的逆元素为$-x=(-x_1,-x_2)$.显然，R_2在上述加法和数乘意义下构成实线性空间.

例 8 对于例 3 中的集合$C[a,b]$，其中的元素是$f(x)\in C[a,b]$.取任意实数α和$C[a,b]$中的任意两个元素$f,g\in C[a,b]$，定义加法和数乘运算如下，

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x),a\le x\le b$$

$$(\alpha f)(x)=\alpha f(x),a\le x\le b$$

$C[a,b]$中的零元素θ为$[a,b]$上恒为零的函数$\theta=f(x)\equiv 0$，$f(x)$的逆元素为$-f(x)$.依连续函数的性质，易知$C[a,b]$是实线性空间.

例 9 次数为$\le n$的实系数多项式$p_n(x)$可以写成

$$p_n(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$$

其中$a_i,(i=1,2,\cdots,n)$是给定的实数.既然是实数，a_i中的某些或者全部也可以是0.例如，四次多项式中包括$1+3x+5x^3$，尽管这一表达式的最高次数是 3.把定义在$[a,b]$上的 n 次实系数多项式的全体记为$P_n[a,b]$.

$$P_n[a,b]=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n,\quad a_i,(i=1,2,\cdots,n)\text{是给定的实数},\quad a\le x\le b$$

其中元素的加法运算和数乘运算定义为通常的多项式相加和与实数的相乘.则$P_n[a,b]$是一个实线性空间.

显然，$P_n[a,b]\subset C[a,b]$，即线性空间$P_n[a,b]$是线性空间$C[a,b]$一个子集.

5. 空间的维数和基底

定义 8 设 X 是一个线性空间，$x_1,x_2,\cdots,x_n\in X$.若一个向量$x\in X$ 可以写成如下形式

$$x=a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_kx_k$$

其中系数$a_1,a_2,\cdots,a_k$不全为零，我们就称 x 是$x_1,x_2,\cdots,x_k$的**线性组合**.并且称$x,x_1,x_2,\cdots,x_k$这$k+1$个向量是**线性相关**的.若当且仅当$a_1=a_2=\cdots=a_n=0$时，有

$$a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n=\theta$$

则称$x_1,x_2,\cdots,x_n$是**线性无关**的，否则称$x_1,x_2,\cdots,x_n$是**线性相关**的.如果$x_1,x_2,\cdots,x_n$是线性无关的，则称它是线性空间 X 的一个**线性无关组**.如果元素列$x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots$中的任意有限个元素都是线性无关的，则称$\{x_n\}$构成线性空间 X 的一个**线性无关系**.

定义 9 设$\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$是线性空间 X 的一个线性无关组.如果 X 的每一个非零元素 x 都是$\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$的线性组合，则说 X 是一个 ***n* 维的线性空间**，并且称$\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$为 X 的一组**基底**或者一个**基组**，简称一组**基**.此时，还称这一基组是**完备**的.如果$\{x_1,x_2,\cdots\}$是 X 的一个线性无关系，且 X 的每一个非零元素 x 均可表示为$x=\sum_{i=1}^{\infty}a_ix_i$，$a_i,(i=1,2,\cdots)$是实数，则称 X 为**无限维的线性空间**，$\{x_1,x_2,\cdots\}$是它的一组基底.

注意，基组的完备性与空间的完备性这两个概念是不同的.基组的完备性是指：此空间中的任何一个向量都可以用这一基组的线性组合来表示.

可以证明，线性空间的维数是确定的，不因选取不同的基底而改变.一个 n 维的线性空间的每一组基底都由 n 个元素组成，并且 n 维线性空间至少有一组基底.

基底选取合适，会非常有利于实际的计算.

例 10 设$X=P_n[a,b]$，选择$B_n=\{1,x,x^2,\cdots,x^n\}$，则$B_n$是 X 的一组基底.并且 X 是$n+1$维的线性空间.在$P_n[a,b]$中还可以选择其它形式的基底，有些从应用的角度来说比B_n要好.

例 11 设 $X=C[-1,1]$，选择 $A=\{x,|x|\}$，A 是一线性无关组，但它不能构成 $C[-1,1]$ 的一组基底，因为 $C[-1,1]$ 中的一些元素并不能由 $x,|x|$ 的线性组合表示.例如，元素 $\sin x\in C[-1,1]$，无论怎样选择 a_1,a_2，均不能用 $a_1x+a_2|x|$ 来表达 $\sin x$.

例 12 设 $X=C[0,2\pi]$，则 $A=\{1,\sin x,\sin 2x,\cdots,\sin nx\}$ 是一线性无关组.因为，若有常数 $a_0,a_1,\cdots,a_n$，使得

$$a_0+a_1\sin x+a_2\sin 2x+\cdots+a_n\sin nx\equiv 0$$

则必有 $a_1=a_2=\cdots=a_n=0$.事实上，取 $x_0,x_1,\cdots,x_n\in[0,\pi/2]$，且当 $i\neq j$ 时，$x_i\neq x_j$，$(i,j=0,1,2,\cdots,n)$，将 x_i，$(i=0,1,2,\cdots,n)$代入上面的方程，得一关于 $a_0,a_1,\cdots,a_n$ 的齐次线性方程组.

$$\begin{pmatrix}1 & \sin x_0 & \sin 2x_0 & \cdots & \sin nx_0\\ 1 & \sin x_1 & \sin 2x_1 & \cdots & \sin nx_1\\ 1 & \sin x_2 & \sin 2x_2 & \cdots & \sin nx_2\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & \sin x_n & \sin 2x_n & \cdots & \sin nx_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_0\\ a_1\\ a_2\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}=0$$

容易验证其系数矩阵的行列式不为零.故解得 $a_1=a_2=\cdots=a_n=0$.

2.1.2 内积空间

1. 内积空间

定义 10 设 X 是复线性空间.如果对 X 中的一对向量 x 和 y，与数域 F 内一个数有唯一的对应关系，记为 (x,y)，并满足以下四个条件，则称 (x,y) 为 x 与 y 的**内积**或者**纯量积**.

(i) $(x,y)=(y,x)^*$

(ii) $(x+y,z)=(x,z)+(y,z)$

(iii) $(\alpha x,z)=\alpha^*(x,z)$

(iv) $(x,x)\geq 0$，等号当且仅当 $x=\theta$ 时成立.

其中*号表示复共轭.以上四条常称为**内积四公理**.

在实向量空间中，条件(i)和(iii)中的*号不起作用，可以略去.不论是实内积

空间还是复内积空间，条件(i)意味着任何向量与其自身的内积总是实数，从而保证了条件(iv)的不等式有意义.

定义 11 在数域K上的定义了内积的线性空间X称为**内积空间**或者**准希尔伯特空间**.K 是实数域时相应的内积空间称为**实内积空间**，也称**欧几里得空间**.K 是复数域时相应的内积空间称为**复内积空间**，也称**酉空间**.

以下是内积的例子.

例 13 设 $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n), y=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)$ 是复 n 维数域空间 C^n 上的两个向量.如果定义内积

$$(x,y)=\sum_{i=1}^{n}\xi_i^*\eta_i \tag{2.1.4}$$

容易验证，它是满足内积公理的.如果等式右端的 ξ_i 不取复共轭，则当 F^n 是复数域时，不满足内积公理.

当定义

$$(x,y)=\sum_{i=1}^{n}p_i\xi_i^*\eta_i \tag{2.1.5}$$

时，只要 $p_i,(i=1,2,\cdots,n)$是一组给定的正数，也是满足内积公理的.此处给定的一组正数 $p_i,(i=1,2,\cdots,n)$称为**权**.即，向量的内积也可以定义成**带权的内积**.

例 14 若 $x(t)$ 和 $y(t)$ 是多项式空间中的两个向量，这些多项式定义在[0,1]区间上，则可取

$$(x,y)=\int_0^1 x^*(t)y(t)\mathrm{d}t \tag{2.1.6}$$

作为内积的定义.也可取

$$(x,y)=\int_0^1 x^*(t)y(t)w(t)\mathrm{d}t \tag{2.1.7}$$

来定义内积，其中在给定的区间内 $w(t)>0$，并且 $w(t)$ 不随向量而变化.称 $w(t)$ 为**权函数**.带权函数的内积也就是带权内积.

例 15 若 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 和 $g(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是 n 维函数空间的两个向量，每一维的定义区间都是$[a,b]$，则可取

$$(f,g)=\int_a^b \mathrm{d}x_1\int_a^b \mathrm{d}x_2\cdots\int_a^b \mathrm{d}x_n\rho(x_1,x_2,\cdots,x_n)f^*(x_1,x_2,\cdots,x_n)g(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$

作为带权内积的定义.其中 $\rho(x_1,x_2,\cdots,x_n)>0$ 是权函数.

定理 1 内积满足**施瓦兹不等式**:

$$|(x,y)|\le\sqrt{(x,x)}\sqrt{(y,y)} \tag{2.1.8}$$

证明 若 $x=\theta$ 或者 $y=\theta$，等号成立.若 x 与 y 都不是零向量，命 $z=\dfrac{x}{\sqrt{(x,x)}}$，

则显然有 $(z,z)=1$.对任意的复数λ，恒有

$$\begin{aligned}
&0\le(\lambda z-y,\lambda z-y)\\
&=|\lambda|^2(z,z)-\lambda^*(z,y)-\lambda(y,z)+(y,y)\\
&=|\lambda|^2-\lambda^*(z,y)-\lambda(z,y)^*+|(z,y)|^2-|(z,y)|^2+(y,y)\\
&=[\lambda^*-(z,y)^*][\lambda-(z,y)]|-|(z,y)|^2+(y,y)
\end{aligned}$$

作为特例，取 $\lambda=(z,y)$，上不等式简化为

$$|(z,y)|^2\le(y,y)$$

即

$$|(\frac{x}{\sqrt{(x,x)}},y)|^2\le(y,y)$$

或者

$$|(x,y)|^2\le(y,y)(x,x)$$

证明完毕.

例 16 在二维欧几里得空间，由于施瓦兹不等式，可以定义一个量

$$|\cos\varphi|=\frac{|(x,y)|}{\sqrt{(x,x)}\sqrt{(y,y)}}$$

显然 $|\cos\varphi|\le 1$.量φ可以称为向量 x 和 y 之间的夹角.

例 17 在 n 维酉空间中，由例 13 定义的内积

$$(x,y)=\sum_{i=1}^{n}\xi_i^*\eta_i \qquad\qquad (x,y)=\sum_{i=1}^{n}p_i\ \xi_i^*\ \eta_i$$

由施瓦兹不等式，得到

$$\left|\sum_{i=1}^{n}\xi_i^*\eta_i\right|^2\le\sum_{i=1}^{n}|\xi_i|^2\sum_{i=1}^{n}|\eta_i|^2 \qquad\qquad \left|\sum_{i=1}^{n}p_i\xi_i^*\eta_i\right|^2\le\sum_{i=1}^{n}p_i|\xi_i|^2\sum_{i=1}^{n}p_i|\eta_i|^2$$

此式称为**柯西不等式**.

例 18 由例 14 定义的内积

$$(x,y)=\int_0^1 x^*(t)y(t)\mathrm{d}t \qquad\qquad (x,y)=\int_0^1 x^*\ (t)y(t)w(t)\ \mathrm{d}t$$

由施瓦兹不等式，得到

$$\left|\int_0^1 x^*(t)y(t)\mathrm{d}t\right|^2\le\int_0^1|x(t)|^2\ \mathrm{d}t\int_0^1|y(t)|^2\ \mathrm{d}t$$

$$\left|\int_0^1 x^*(t)y(t)y(t)w(t)\mathrm{d}t\right|^2 \le \int_0^1 |x(t)|^2\ w(t)\mathrm{d}t\int_0^1 |y(t)|^2\ w(t)\mathrm{d}t$$

定理 2 在任何内积空间中，对任意向量 x 与 y，均有不等式：

$$\sqrt{(x+y,x+y)} \le \sqrt{(x,x)} + \sqrt{(y,y)} \tag{2.1.9}$$

此式称为**三角不等式**.

证明 利用施瓦兹不等式，

$$(x+y,x+y) = (x,x)+(y,y)+(x,y)+(y,x)$$

$$\le \sqrt{(x,x)}^2 + \sqrt{(y,y)}^2 + 2\sqrt{(x,x)}\sqrt{(y,y)} = \left(\sqrt{(x,x)}+\sqrt{(y,y)}\right)^2$$

证明完毕.

定理 3 在任何内积空间中，对任意向量 x 与 y，均有等式：

$$(x+y,x+y)+(x-y,x-y) = 2[(x,x)+(y,y)] \tag{2.1.10}$$

此式称为**平行四边形公式**.它的几何意义是：平行四边形对角线长度平方之和等于四边平方之和.

定义 12 一个向量 x 与其自身的内积的根号 $\sqrt{(x,x)}$ 称为该向量的**模**，记为$\|x\|$.即，定义

$$\|x\| \equiv \sqrt{(x,x)} \tag{2.1.11}$$

模一定不为负.

$$\|x\| \ge 0$$

定义 13 模等于 1 的向量称为**单位向量**.

显然，每一个向量 x 都可以通过 $\dfrac{x}{\sqrt{(x,x)}}$ 的手续而使之成为单位向量.这样的手续称为**归一化**.

2. 正交归一向量组

定义 14 当且仅当向量 x 与 y 的内积为零，$(x,y)=0$ 时，称 x 与 y **正交**.

由于 $(y,x)=(x,y)^*$，因此，当 $(x,y)=0$ 时，有 $(y,x)=0$.这样，虽然内积的定义没有像距离那样的对称关系，但是正交性却具有对称关系.特别是：零向量与所有向量正交，$(x,\theta)=0$.反之，若一个向量与所有的向量都正交，这个向量一定是零向量。

定义 15 若有向量集合 $\{x_1,x_2,\cdots\}$，对于任何 $i\ne j$ $(x_i,x_j)=0$，则称该向量集合是**正交向量集合**.若对于所有的 i 和 j，

$$(x_i,x_j)=\delta_{ij} \tag{2.1.12a}$$

则称向量集合$\{x_1, x_2, \cdots\}$是**正交归一的**.正交归一基组也称为**幺正基组**，简称为**幺正基**，常用$\{e_1, e_2, \cdots\}$来表示.

$$(e_i, e_j) = \delta_{ij} \tag{2.1.12b}$$

例如，三维直角坐标系的三个轴上的三个单位向量之间，就是正交归一的.

定义 16 在 n 维向量空间中，任取一组正交的基底之后，该空间中的所有非零向量都可以写成这一正交基底的线性组合，则称该正交基底是**完备**的.

如果一个非零向量 x 可以写成正交归一向量集的线性组合

$$x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i \tag{2.1.13}$$

那么组合系数α_i就特别容易求得，因为由(2.1.12)式，在(2.1.13)式两边用e_j做内积，得到

$$\alpha_j = (e_j, x), \quad (j = 1, 2, \cdots, n) \tag{2.1.14}$$

定理 4 正交归一集是线性无关的.

证明 当一个零向量θ写成正交归一集$\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$的线性组合时，$\theta = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$，其组合系数由(2.1.14)算得为$\alpha_j = (e_j, \theta) = 0, \quad (j = 1, 2, \cdots, n)$，因此线性组合的系数一定是零.又，线性组合的系数都是零时，得到的是零向量.**证明完毕**.

由此定理，任何 n 个向量的正交归一集是 n 维向量空间中的基.

定理 5 若$\{e_1, e_2, \cdots, e_m\}$是 m 维内积空间中任一正交归一集，对于该空间中的任意向量 x，写成该正交归一集的线性组合$x = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i e_i$之后，取前 $n\,(n \le m)$ 个正交归一基向量$\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$，有

$$\|x\|^2 \ge \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^2 \tag{2.1.15}$$

其中等号当且仅当$n = m$时成立.向量$x' = x - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$与$\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$中的每一个向量正交.式(2.1.15)称为**贝塞尔不等式**.

证明

$$
\begin{aligned}
0 \le \|x'\|^2 &= (x', x') = (x - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i, x - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i) \\
&= (x, x) - (x, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i) - (\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i, x) + (\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i, \sum_{j=1}^{n} \alpha_j e_j) \\
&= \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^2 - \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^2 + \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^2 = \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^2
\end{aligned}
$$

即得(2.1.15)式.又，

$$
(e_j, x') = (e_j, x - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i) = (e_j, x) - (e_j, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i) = \alpha_j - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (e_j, e_i) = 0
$$

证明完毕.

利用正交归一基组，容易得到

$$
(x, y) = (\sum_{i=1}^{m} (e_i, x) e_i, \sum_{j=1}^{m} (e_j, y) e_j) = \sum_{i=1}^{n} (x, e_i)(e_i, y) \tag{2.1.16}
$$

此式**称为帕赛瓦尔等式**.此式是正交归一基组完备性的一个等价的表述.

3. 度量矩阵

设$\{d_1, d_2, \cdots, d_n\}$是一基组.两个向量$x$和$y$用这一基组来表示，就是$x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i d_i$和$y = \sum_{i=1}^{n} \beta_i d_i$.做这两个向量的内积.

$$
\begin{aligned}
(x, y) &= \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i d_i, \sum_{j=1}^{n} \beta_j d_j \right) = \sum_{i.j=1}^{n} \alpha_i^* (d_i, d_j) \beta_j \\
&= (\alpha_1^*, \alpha_2^*, \cdots, \alpha_n^*) M \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} = \alpha^+ M \beta
\end{aligned} \tag{2.1.17}
$$

其中定义了矩阵

$$
M = \begin{pmatrix} (d_1, d_1) & (d_1, d_2) & \cdots & (d_1, d_n) \\ (d_2, d_1) & (d_2, d_2) & \cdots & (d_2, d_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (d_n, d_1) & (d_n, d_2) & \cdots & (d_n, d_n) \end{pmatrix}
$$

M由各基向量之间的内积决定.称矩阵M为在基$\{d_1, d_2, \cdots, d_n\}$下的**度量矩阵**.

度量矩阵有以下性质.

(i) 容易看出，$M^+ = M$，因此度量矩阵是一个厄米矩阵. 在实空间内，度量

矩阵是一个实对称矩阵.

(ii) 因为对于任意的 $x \neq 0$，有

$$(x, x) = \alpha^{+} M \alpha \geq 0$$

因此度量矩阵也是一个厄米正定矩阵，在实空间是一正定矩阵.

(iii) 当基组是幺正的，度量矩阵具有最简单的形式，就是单位矩阵.

显然，当基组是正交归一基组时，内积具有最简单的形式.因此，前面定义的内积的形式(2.1.4)-(2.1.7)时已经默认采用了正交归一基组.当基组非正交归一时，内积应该是含有度量矩阵的(2.1.17)的形式.不过，公式(2.1.15)-(2.1.17)是与基组的选择无关的.

以后我们写下的内积，总是采用(2.1.4)-(2.1.7)的最简单的形式，而不再使用(2.1.17)这样一般的形式.也就是说，我们总是默认基组是正交归一的.不过当我们有一基组时，不一定总是正好正交归一的.应该有一个方法能够把一个任意的基组转变为正交归一的.这个方法就是格莱姆-施密特正交化方法.

4. 格拉姆-施密特正交化方法

设 $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ 是 n 维向量空间中的一线性无关组.可以从这一基组来构造该空间中的一完备的正交归一集.构造的方法称为格莱姆-施密特正交化方法.方法如下，令

$$y_1 = x_1 \qquad e_1 = \frac{y_1}{\|y_1\|}$$

$$y_2 = x_2 - (e_1, x_2) e_1 \qquad e_2 = \frac{y_2}{\|y_2\|}$$

$$y_3 = x_3 - (e_2, x_3) e_2 - (e_1, x_3) e_1 \qquad e_3 = \frac{y_3}{\|y_3\|}$$

$$\vdots$$

$$y_n = x_n - \sum_{i=1}^{n-1} (e_i, x_n) e_i \qquad e_n = \frac{y_n}{\|y_n\|}$$

一般的步骤为

$$y_k = x_k - \sum_{i=1}^{k-1} (e_i, x_k) e_i,\ e_k = \frac{y_k}{\|y_k\|},\ (k = 1, 2, \cdots, n) \tag{2.1.18}$$

由此构造出来的新的模都是 1 的基组 $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$.它们是相互正交的，因为 e_k 总是和每一个 e_j, $(j < k)$ 正交的.这可用数学归纳法来证明.

$$(e_2, e_1) = (\frac{y_2}{\|y_2\|}, e_1) = \frac{1}{\|y_2\|}(x_2 - (e_1, x_2) e_1, e_1) = 0$$

假如对于 e_{k-1} 与每一个 e_j, $(j < k-1)$ 正交，那么，e_k 与每一个 e_j, $(j < k)$ 的内积为

$$(e_k,e_j)=(\frac{y_k}{\|y_k\|},e_j)=\frac{1}{\|y_k\|}(x_k-\sum_{i=1}^{k-1}(e_i,x_k)e_i,e_j)$$
$$=\frac{1}{\|y_k\|}[(x_k,e_j)-\sum_{i=1}^{k-1}(e_i,x_k)^*(e_i,e_j)]=\frac{1}{\|y_k\|}[(x_k,e_j)-\sum_{i=1}^{k-1}(x_k,e_i)\delta_{ij}]=0 \qquad (2.1.19)$$

结论：新的基组$\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$是幺正基.

以上的步骤归结为如下定理.

定理 6 在 n 维内积空间中恒存在幺正基组$\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$.

我们把用(2.1.18)式的办法产生的各向量 y_i 写成

$$y_k=\beta_k e_k,(k=1,2,\cdots,n)$$

容易证明：

$$\|y_k\|\le\|x_k\|,\ (k=1,2,\cdots,n) \qquad (2.1.20)$$

事实上，

$$\|y_k\|^2=|(y_k,y_k)|=\left|\left(y_k,x_k-\sum_{i=1}^{k-1}(e_i,x_k)e_i\right)\right|=|(y_k,x_k)|\le\|y_k\|\|x_k\|$$

其中，第三个等号用到(2.1.19)式，最后用到施瓦兹不等式.因此(2.1.20)式得证.这是因为向量 y_k 总是在向量 x_k 中减去某些部分而得到的.这就是说，正交化过程之后向量的长度多少有所“缩短”.

2.1.3 希尔伯特空间

定义 17 一个内积空间，如果其中每一个柯西序列都收敛于这个空间之内，称之为**完备的内积空间**，又称为**希尔伯特空间**.

也就是说，一个内积空间中可以定义距离，因此它同时也是一个距离空间，如果这个距离空间又是完备的话，那么就称之为希尔伯特空间.显然，不能定义距离的内积空间也就谈不上完备性，就不能称之为希尔伯特空间.定义了内积不见得一定能够定义距离.

定义 18 若定义在$[a,b]$上的复函数 $f(x)$ 在此区间上的积分$\int_a^b|f|^2\,\mathrm{d}x$存在且有极限，则称函数 $f(x)$ 在$[a,b]$上是**复平方可积**的，简称**平方可积**的，此空间记为 $L_2[a,b]$.这是前面定义 2 中 p 次可积的 p=2 的特殊情形.因为常用，特意列出.

平方可积函数与一个标量的乘积仍然是平方可积的.两个平方可积函数之和仍然是平方可积的.

定义 19 组元是定义在闭区间$[a,b]$上实变量 x 的复值函数，它们是平方可积的， 并且符合以下(i) (ii)两条要求，那么，这些组元的集合形成的向量空间，称之为**平方可积的函数空间**，记为$L_2[a,b]$，或者简记为L_2.常简称为**函数空间**.

(i) 加法规则 ：若 $f_1(x) \in L_2$， $f_2(x) \in L_2$ 则，

$(f_1 + f_2)(x) \equiv f_1(x) + f_2(x) = f(x) \in L_2$

(ii) 数乘规则：若 $f(x) \in L_2, \alpha \in Z$ 则， $\alpha f \equiv \alpha f(x) \in L_2$

如(2.1.1)式那样定义两个向量 f 和 g 之间的距离 $\rho(f,g)$

$$\rho(f,g) = \left[\int_a^b |f(x) - g(x)|^2 \, \mathrm{d}x\right]^{1/2} \qquad (2.1.24)$$

可知L_2是一个距离空间.

定义 20 属于函数空间L_2的两个函数 f_1 和 f_2 的**内积**定义为：

$$(f_1, f_2) = \int_a^b f_1^*(x) f_2(x) \mathrm{d}x$$

或者

$$(f_1, f_2) = \int_a^b f_1^*(x) f_2(x) w(x) \mathrm{d}x$$

其中权函数 $w(x) > 0$.

在闭区间$[a,b]$上的实变量的复平方可积的完备的内积空间，是一个希尔伯特空间.这是一个常用的希尔伯特空间.

根据模的定义，平方可积亦指模有限.

$$\|f\| = \left[\int_a^b |f|^2 \, w(x) \mathrm{d}x\right]^{1/2} < \infty$$

我们顺便指出一个二元函数 $k(x,y)$ 的平方可积性是指

$$\int_a^b w(y) \mathrm{d}y \int_a^b |k(x,y)|^2 \, w(x) \mathrm{d}x < \infty . \qquad (2.1.24)$$

显然，一个 n 元函数的平方可积性可以类似地定义.

任何一对平方可积函数的内积(f_1, f_2)存在.证明：

$$\left|\int_a^b f_1^* f_2 w(x)\mathrm{d}x\right| \le \int_a^b | f_1^* f_2| w(x)\mathrm{d}x = \int_a^b | f_1 || f_2| w(x)\mathrm{d}x$$

$$\le \frac{1}{2}\int_a^b (| f_1|^2 + | f_2|^2) w(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(\| f_1\| + \| f_2\|) < \infty.$$

若$(f, f) = 0$，并不隐含：对于在$[a,b]$中所有 x， $f(x) = 0$.但它只能在孤立点上取非零值，尽管孤立点的个数可能有无限多个.只能在孤立点上取非零值的函数也称为几乎处处为零的函数.

定义 21 如果一个函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的取值处处为零，$f(x) = 0, x \in [a,b]$，则称 $f(x)$ 为区间$[a,b]$上的**零函数**.在此区间上几乎处处等于零的函数称为**广义零函数**.若既非零函数又非广义零函数，则称为**非零函数**.在本书以后提到的函数，若无特别说明，都是指非零函数.

例如，在[0,1]区间上定义一个函数为：在有理数的位置上函数值为 1，在无理数的位置上函数值为 0.这是个广义零函数.

若$(f, f) = 0$，则f是个零函数或者广义零函数.

反之，若函数 $f(x)$ 是$[a,b]$上的一个零函数或者广义零函数，则一定能够有$(f, f) = 0$.并且，

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = 0 \tag{2.1.25}$$

此处讲的广义零函数，在孤立点上取的函数值是有限的.若在孤立点上取值为无限，这种情况将在第五章中讨论.

定理 7(雷尔兹-费雪) 设函数 $f_1(x), f_2(x), \cdots\cdots$ 是函数空间中的组元.若

$$\lim_{n,m\to\infty} \| f_n - f_m \|^2 \equiv \lim_{n,m\to\infty} \int_a^b | f_n - f_m |^2 \mathrm{d}x = 0 \tag{2.1.26}$$

则存在一平方可积函数 $f(x)$,而序列$\{f_n(x)\}$“平均”收敛于它；即存在一个f使得

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b | f(x) - f_n(x) |^2 \mathrm{d}x = 0 \tag{2.1.27}$$

即**平方可积函数(模有限的函数)空间是完备**的.

根据距离的定义(2.1.24)式，两个函数之差的模$\left[\int_a^b | f(x) - f_n(x) |^2 \mathrm{d}x\right]^{1/2}$就是一种距离.在这个距离空间内，式(2.1.26)符合(2.1.3).而函数序列$\{f_n(x)\}$与函数$f(x)$都在此距离空间内.因此，这是一个完备的距离空间.

§2.2 内积空间中的算子

2.2.1 算子与伴随算子

1. 算子

函数 $y=f(x)$ 表示，在实数域 $\boldsymbol{R}$ 中任取一个数 x，就可以通过这个表示式得到另一个实数 y.因此这个函数反映的是从实数集 $\boldsymbol{R}$ 到实数集 $\boldsymbol{R}$ 的一个对应规则.对于 n 元实变函数则是 $\boldsymbol{R}^n$ 中的点集到实数集 $\boldsymbol{R}$ 的一个对应规则.映射则是函数概念的推广.如果把定义域和值域都换成一般的集合.就可得到映射的概念.

定义 1 设 X 和 Y 是两个集合，如果存在一个法则 F，使对任何一个元素 $x\in X$，都存在唯一一个元素 $y\in Y$ 与之对应，则称 F 为集合 X 到集合 Y 的一个**映射**，简记为 $F:X\to Y$.元素 y 称为元素 x 在映射 F 下的**像**，记为 $y=F(x)$，也称 y 为 F 在 x 处的**值**.称 x 为 y 在 F 下的**原像**.X 称为映射 F 的**定义域**，Y 称为 F 的**值域**.当 $X=Y$ 时，F 称为集合到自身的一个映射.

例如，距离是集合到实数集的映射.

当定义域和值域都是实数集时，如果一个原像是一个实数，得到的映射也是一个实数，对应的映射就是一元实函数.

从两个原像映射得到一个像的例子是距离的定义式.

一个长度为 n 的复向量的模也是一个原像到一个像的映射，只不过定义域是 n 维的复数域，值域则是正实数域.

定义 2 设 V 和 U 是同一域 K 上的两个集合，T 是 V 到 U 的映射，如果 $x\in V$，$y\in U$，有 $Tx=y$，则称 T 是 V 到 U 的**算子**，也称 T 是 V 到 U 的**变换**. 设 T 是 V 到 V 的映射，若对所有 $x\in V$，$Tx=x$，则称 T 是**恒等算子**，也称为**单位算子**，也称为**单位变换**.常将单位变换记作 I： $Ix=x$.

需要明确的是，V 和 U 是都是同一域 K 上的两个空间的映射才称为变换.一般的映射的定义中，对于定义域 X 和值域 Y 没有原则上的限制.

例如，人取名是人群到汉字的映射，不能称之为变换。前后两个空间不同.

汉字重新排列之后成为密码，这可以称为变换，是汉字空间到汉字空间的映射.

简单地说，一个算子作用在一个向量上之后，就得到另外一个向量.例如求导就是一个算子.它将一个函数变成其导函数.

定义 3 设 V 和 U 是同一域 K 上的两个内积空间，T 是 V 到 U 的算子，如果算子 T 满足以下两个条件：

(i) 对所有 $x,y\in V$，$T(x+y)=Tx+Ty$ (2.2.1)

(ii) 对所有 $x\in V$，数域 K 中所有纯量 $\alpha\in K$，$T(\alpha x)=\alpha Tx$ (2.2.2)

则称 T 为 V 到 U 的**线性算子**或者**线性变换**.

例 1 定义一个积分算子 K 如下.

$$Kf \equiv \int_a^b k(x,y) f(y)\mathrm{d}y$$

$$Kf \equiv (k, f) \equiv \int_a^b k(x,y) f(y) w(y)\mathrm{d}y$$

算子 K 是线性的，因为

$$K(f_1+f_2) \equiv \int_a^b k(x,y)[f_1(y)+f_2(y)]\mathrm{d}y$$
$$= \int_a^b k(x,y) f_1(y)\mathrm{d}y + \int_a^b k(x,y) f_2(y)\mathrm{d}y = Kf_1 + Kf_2$$

$$K(f_1+f_2) \equiv (k, f_1+f_2) = (k, f_1)+(k, f_2) = Kf_1 + Kf_2$$

$$K(\alpha f) \equiv \int_a^b k(x,y)\alpha f\mathrm{d}y = \alpha\int_a^b k(x,y) f(y)\mathrm{d}y = \alpha Kf$$

$$K(\alpha f) \equiv (k, \alpha f) = \alpha(k, f) = \alpha Kf$$

因此，由此定义的积分算子是一个**线性积分算子**.其中的函数 $k(x,y)$ 称为**积分核**.

以下我们提到的算子都是指线性算子.

由定义 2，恒等算子 I 是指它作用在空间中任意元上，都不变.除了恒等算子，可能还有其它的算子，作用在某个元上的结果是不变的：

$$u = Tu \tag{2.2.3}$$

满足此式时，元 u 称为算子 T 的**固定点**，也称为**不动点**.此式可用于迭代求解.即，为了求出解 u，先设 u_0，用 $u_1 = Tu_0$ 得到 u_1，再用 $u_2 = Tu_1$ 得到 u_2，等等.那么由此得到系列 $u_0, u_1, \cdots, u_n, \cdots$ 是不断逼近 u.其中 u_0 称为初始值.这样求解的方法称为**迭代法**，或者**逐次逼近法**.可是这样得到的系列一定是逼近解的吗？如果算子 T 是个收缩算子，那么答案是肯定的.为此，先来定义收缩的概念.

定义 4 度量空间中两个元 u 和 v，在被算子 T 作用前后的距离满足如下关系

$$\rho(Tu,Tv) \le \lambda\rho(u,v) \tag{2.2.4}$$

则称算子 T 是**李普希兹连续**的.若(2.2.4)中的数 $\lambda < 1$，则称算子 T 是个**收缩算子**，简称**收缩**.

定理 1 设算子 T 是完备度量空间 X 中的收缩，则(2.2.3)式有且仅有一解.此解可以任选一初始值用迭代法求得.

证明 (i)固定点的唯一性.设此收缩有两个固定点，记为 u 和 v，$u = Tu$，$v = Tv$，那么有 $\rho(Tu,Tv) = \rho(u,v)$.因 T 是个收缩，必然有 $\rho(Tu,Tv) \le \lambda\rho(u,v)$，即 $\rho(u, v) \le \lambda\rho(u, v)$，其中 $\lambda < 1$.因而，只能是 $\rho(u,v) = 0$，也就是 $u = v$.(ii)固定点的存在性. 设 u_0 是初始值.经过上述迭代，就得到了序列 $u_0, u_1, \cdots, u_n, \cdots$.我们来证

明，这是个柯西序列.容易得到

$$\rho(u_n,u_{n+1})=\rho(Tu_{n-1},Tu_n)\le\lambda\rho(u_{n-1},u_n)\le\cdots\le\lambda^n\rho(u_0,u_1)$$

对于$k>n$，反复运用距离的三角不等式，或者由习题 1，可得

$$\begin{aligned}&\rho(u_n,u_k)\le\rho(u_n,u_{n+1})+\rho(u_{n+1},u_{n+2})+\cdots+\rho(u_{k-1},u_k)\\&\le\lambda^n\rho(u_0,u_1)+\lambda^{n+1}\rho(u_0,u_1)+\cdots+\lambda^{k-1}\rho(u_0,u_1)\\&=\lambda^n\rho(u_0,u_1)(1+\lambda+\lambda^2+\cdots+\lambda^{k-n-1})\le\rho(u_0,u_1)\frac{\lambda^n}{1-\lambda}\end{aligned}$$

已知$\lambda<1$，可见$k,n\to\infty$的极限时，距离$\rho(u_n,u_k)\to 0$.序列$\{u_n\}$是个柯西序列.

其极限记为 u.因空间是完备的，极限就在此空间内.所以，$u_n\to u$.证明完毕.

这一证明过程也说明，任选一个初始值，用迭代法即可求得解.

收缩算子的这种性质，也被称为**压缩映像原理**.数学中证明方程有解时，经常会用到这个原理.

注意，此定理没有用到内积的概念，只需要距离的概念，所以在完备的度量空间中适用.

2. 伴随算子

定义 5 取线性算子 T 的厄米共轭，记为$T^\dagger$，且对于任意两个向量 x 和 y 满足下式

$$(Tx,y)=(x,T^\dagger y) \tag{2.2.5}$$

则称$T^\dagger$是 T 的**伴随算子**或**共轭算子**.

需要说明一点，算子在具体作用到向量上时，总是具体表现为某种形式，例如在有限维向量空间中，线性变换就是用一个矩阵来表示，微分算子则是用一个微分符号来表示.我们说的算子的厄米共轭，是指取算子的具体的形式的复共轭，同时把其中含有的指标取成与原来相反的顺序.

伴随算子具有如下一些性质.

定理 2 设 X 是希尔伯特空间，A, B 是 X 到 X 的线性算子.对于复数域 C 上的任何复数$\alpha\in C$，有

(i) $(A+B)^\dagger=A^\dagger+B^\dagger$

(ii) $(\alpha A)^\dagger=\alpha^* A^\dagger$

(iii) $(A^\dagger)^\dagger=A$

(iv) $(A\bullet B)^\dagger=B^\dagger\bullet A^\dagger$

其中$\bullet$表示映射的复合，以后我们将此$\bullet$省略，把$A\bullet B$简洁地写成AB.

由(ii)，以后我们说到一个数的伴随时，就是指取它的复共轭.

定义 6 设 A 和 B 都是线性算子，若 $AB=BA=I$，则称 B 是 A 的**逆算子**，简称**逆**，并记为 $B=A^{-1}$.如果 $A^{\dagger}A=AA^{\dagger}$，则称 A 为**正规算子**.如果 $A^{\dagger}A=AA^{\dagger}=I$，则称 A 为**酉算子**.设 A，B 和 C 都是线性算子，若 $BA=I$，则称 B 是 A 的**左逆算子**，简称**左逆**；若 $AC=I$，则称 C 是 A 的**右逆算子**，简称**右逆**.

若一个算子的左逆和右逆都存在，那么，左右逆一定相等.这是因为，

$$B=B(AC)=(BA)C=C$$

此时的左右逆就是这个算子的逆，$B=C=A^{-1}$.以后我们总是只考虑左右逆或者都存在或者都不存在的情况.对于后者，我们就说算子的逆不存在.

例 2 对于 n 维欧几里得空间 E，是实数域上的 n 维向量空间.此空间中的元素是有 n 个分量的列向量 x. E 到 E 的线性变换 T 的变换矩阵用 B 表示，B 是一个幺正矩阵，即有 $BB^{\mathrm{T}}=B^{\mathrm{T}}B=I$，其中 B^{T} 是 B 的转置矩阵.此空间内向量 u 的变换是 $v=Bu$.T 的伴随算子 $T^{\dagger}$ 的变换矩阵是 B^{T}.两个向量 x 和 y 的内积写成 $(x,y)=x^{\mathrm{T}}y$，那么式(2.2.5)在本例中的表示就是

$$(Bx)^{\mathrm{T}}y=x^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}y$$

例 3 酉空间是复数域上的 n 维向量空间.对于 n 维酉空间 U，取定一基组后，U 到 U 的线性变换 T 就是给定基组下的一个变换矩阵，用 A 表示.设在此空间内有一个向量 u，经过线性变换 T 之后，成为此空间中另一个向量 v，写出这一变换，就是

$$v=Au$$

T 的伴随算子 $T^{\dagger}$ 的变换矩阵是 A^{+}，是 A 的厄米共轭矩阵.此空间内两个向量 x 和 y 的内积写成 $(x,y)=x^{+}y$.那么式(2.2.5)在本例中的表示就是

$$(Ax)^{+}y=x^{+}A^{+}y$$

此例可见，在酉空间中，与线性变换对应的变换矩阵是 A，它的伴随矩阵就是 A 的厄米共轭矩阵 A^{+}.若有 $AA^{+}=A^{+}A=I$，则这是酉变换.

例 4 线性积分算子.设 $k(s,t)$ 在 $a\le s,t\le b$ 区间上是可积(复值)函数. $L_2[a,b]$ 是二次可积空间.其中内积的定义为

$$(x,y)=\int_a^b x^*(t)\ y(t)\,\mathrm{d}t$$

T 是 $L_2[a,b]$ 到 $L_2[a,b]$ 的线性算子，其定义为：对 $x\in L_2[a,b]$，

$$(Tx)\ (s)=\int_a^b k(s,t)\ x(t)\,\mathrm{d}t\ ,\quad s\in[a,b]$$

此时，T 的伴随算子 $T^{\dagger}$ 为：对 $y \in L_2[a,b]$，

$$(T^{\dagger}y)\ (s) = \int_a^b k^*(t,s)\ y(t)\ \mathrm{d}t\ ,\quad s \in [a,b]$$

注意其中将积分核取复共轭并且变量位置要交换.那么式(2.2.5)在本例中的表示就是

$$\int_a^b [\int_a^b k^*(s,t) x^*(t) \mathrm{d}t] y(s) \mathrm{d}s = \int_a^b x^*(s) [\int_a^b k^*(t,s) y(t) \mathrm{d}t] \mathrm{d}s$$

3. 微分算子的伴随算子

以上说明了线性代数中表示伴随算子的伴随矩阵和积分算子的伴随算子.这是很容易确定的.对于微分算子的伴随算子则不是那么容易就能确定的.以下举例说明微分算子的伴随算子应该如何确定.

例 5 设有一阶微分算子 $L = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$，它作用于定义在区间 $[0,1]$ 上的函数 $u(x)$ 上的效果是：$Lu(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} u(x)$，并且已知在区域的边界上，函数满足条件 $u(0) = 2u(1)$.即，

$$Lu(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ u(x)\ ,\quad u(0) = 2u(1) \tag{2.2.6}$$

我们来求此微分算子的伴随算子.

根据定义式(2.2.5)，应该有

$$(v, Lu) = (L^{\dagger}v, u) \tag{2.2.7}$$

我们在函数 $f(x)$ 的定义区间上做此内积.

$$(v, Lu) = \int_0^1 v^*(x) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} u(x) \mathrm{d}x = [v^*(x) u(x)]_0^1 - \int_0^1 u(x) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} v^*(x) \mathrm{d}x$$

$$= [v^*(x) u(x)]_0^1 + \int_0^1 [-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} v(x)]^* u(x) \mathrm{d}x$$

如果要满足(2.2.7)，上式的第一项必须为零.利用 $u(0) = 2u(1)$ 的边界条件，有

$$[v^*(x) u(x)]_0^1 = u(1) v^*(1) - u(0) v^*(0) = u(1)\ [v^*(1) - 2v^*(0)] = 0$$

可见，伴随微分算子的表达式如下：

$$L^{\dagger} v(x) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} v(x)\ ,\quad v(1) = 2v(0) \tag{2.2.8}$$

注意，我们已经取了边界条件的复共轭.与伴随算子相应的边界条件不同于原来算子的边界条件(2.2.6).式(2.2.8)中的方程和边界条件分别成为(2.2.6)的伴随方程和伴随边界条件.

由此例可知，在求微分算子的伴随算子之前，先要知道它所作用的函数的边界条件.而伴随算子包括两部分：它的形式和它所作用的函数所应满足的边界条件.对于微分算子来说，伴随算子的定义必须与边界条件有关，因为需要用到分

部积分.

例 6 一个微分算子以及它所作用的函数满足的边界条件如下.

$$Lu(x)=\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}u(x),0<x<1;u(1)-\alpha u(0)=0,u'(1)-\beta u'(0)=0$$

我们求其伴随算子及其所作用的函数满足的边界条件.

由于是二阶微分方程，所以边界条件有两个等式.仍然根据伴随算子的定义，我们通过分部积分的办法把对函数 u 的微分转移到对函数 v 的微分.

$$\int_0^1\mathrm{d}xv^*(x)Lu(x)=\int_0^1\mathrm{d}xv^*(x)u''(x)=[v^*(x)u'(x)]_0^1-[v^{*\prime}(x)u(x)]_0^1+\int_0^1\mathrm{d}xu(x)v^{*\prime\prime}(x)$$

$$=v^*(1)u'(1)-v^*(0)u'(0)-[v^{*\prime}(1)u(1)-v^{*\prime}(0)u(0)]+\int_0^1\mathrm{d}xu(x)v^{*\prime\prime}(x)$$

$$=[\beta v^*(1)-v^*(0)]u'(0)-[v^{*\prime}(1)-\alpha v^{*\prime}(0)]u(0)+\int_0^1\mathrm{d}xu(x)v^{*\prime\prime}(x)$$

得到伴随方程和伴随边界条件：

$$L^\dagger\, v(x)=\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}v(x),0<x<1;\beta^*v(1)-v(0)=0,v'(1)-\alpha^*v'(0)=0$$

在例 5 中，$L=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$，那么$L^\dagger=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$，我们称$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$是$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$的形式伴随算子.当我们说形式伴随算子的时候，我们没有考虑作用的区间，也没有考虑边界条件.因此形式伴随算子并不是真正的伴随算子.只有满足合适的边界条件之后，形式伴随算子才是真正的伴随算子.例 5 中，满足$v(1)=2v(0)$的条件之后，$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$才是在$[0,1]$上满足$u(0)=2u(1)$条件的$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$真正的伴随算子.

例 6 中形式伴随算子恰好和算子本身的形式是一样的.$L^\dagger=\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}=L$.

例 7 一般形式的一阶微分算子

$$L=q_1(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}+q_0(x)\qquad(2.2.9a)$$

仍用例 5 中分部积分的办法，得到

$$(v,Lu)=\int_a^b v^*[q_1\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}+q_0)u]\mathrm{d}x=[q_1v^*u]_a^b+\int_0^1[(-q_1\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}+q_0-q_1'(x))v^*]u\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^1[(-q_1{}^*\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}+q_0{}^*-q_1{}^{*\prime}(x))v]^*u(x)\mathrm{d}x+[q_1v^*u]_a^b$$

因此，形式伴随算子是

$$L^\dagger\ =-q_1{}^*(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}+q_0{}^*(x)-q_1{}^{*\prime}(x)\qquad(2.2.9b)$$

当这个算子作用于定义在区间$[a,b]$上的函数时，如果要求这是个伴随算子，则必须满足以下的边界条件

$$[q_1(x)v^*(x)u(x)]_a^b = 0 \tag{2.2.9c}$$

例 8 一般形式的二阶微分算子

$$L = p_2(x)\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + p_1(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + p_0(x) \tag{2.2.10a}$$

这是本书以后考虑最多的微分算子.根据(2.2.7)式和利用分部积分，可以写出其形式伴随算子是

$$L^\dagger = p_2{}^*\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + (2p_2'^* - p_1{}^*)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + p_2''^* - p_1'^* + p_0{}^* \tag{2.2.10b}$$

当这个算子作用于定义在区间$[a,b]$上的函数时，如果要求这是个伴随算子，则必须满足以下的边界条件

$$[\, p_2(u'v^* - uv^{*\prime}) + (p_1 - p_2')uv^*]_a^b = 0 \tag{2.2.10c}$$

微分算子作用于定义在区间$[a,b]$上的函数时，我们有

$$(v, Lu) - (L^\dagger v, u) = \int_a^b \mathrm{d}x(v^*Lu - (L^\dagger v)^* u) = [J(u,v)]_a^b \tag{2.2.11}$$

将此式的上限 b 看做是一个变量，对之求导，就得到

$$v^*Lu - (L^\dagger v)^* u = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}J(u,v) \tag{2.2.12}$$

式(2.2.12)称为**拉格朗日等式**.而相应的积分形式(2.2.11)称为**格林公式**.称 $J(u,v)$ 为函数 u 和 v 的**结**.

2.2.2 自伴算子

1. 自伴算子的定义和性质

定义 7 若一个线性算子 A 与其伴随算子相等，

$$A^\dagger = A \tag{2.2.14}$$

则称 A 为**自伴算子**.或者称线性算子 A **是自伴的**.在实空间的自伴算子也称为**对称算子**，在复空间的自伴算子也称为**厄米共轭算子**，简称**厄米算子**.此时有

$$(Ax, y) = (x, Ay) \tag{2.2.15}$$

自伴算子的性质如下.

定理 3 (i) 设 A 和 B 是自伴算子，那么 $A+B$ 也是自伴算子.

(ii) 设 A 和 B 是自伴算子，当且仅当 $AB=BA$时，AB 也是自伴的.

(iii) 设 A 是自伴的，当且仅当α是实数时，αA 也是自伴的.

定理 4 在实空间中，若线性算子 A 是对称的，则

$$(y, Ax) = (x, Ay) \tag{2.2.16}$$

证明 设 x 和 y 是实向量，

$$(y,Ax)=(Ay,x)=(x,Ay)^{*}=(x,Ay)$$

最后一步用到向量 x 和 y 与算子 A 都是在实空间中的，因此 (x,Ay) 是个实数.**证明完毕**.

定理 5 若算子 A 是自伴的，则对空间中的任意向量 x，内积 $(x,Ax)=0$ 的充要条件是 $A=0$.

证明 充分条件是显然的，当 $A=0$ 时，对任意向量 x，一定有 $(x,Ax)=0$.下面分实空间和酉空间两种情况证明必要条件.

(i) 在实空间中，对任意两个向量 x 和 y，做以下内积.

$$(x+y,A(x+y))=(x,Ax)+(y,Ay)+(x,Ay)+(y,Ax)=0 \qquad (2.2.17)$$

由条件得

$$(x,Ay)+(y,Ax)=0 \qquad (2.2.18)$$

因 x 和 y 是实向量，由(2.2.16)式得，

$$(x,Ay)=0 \qquad (2.2.19)$$

因 x 和 y 是任意的两个向量，(2.2.19)表明只能有 $A=0$.

(ii) 在酉空间中，对任意两个复向量 x 和 y，与(2.2.17)一样地做内积.同样得到(2.2.18).

$$(x,Ay)+(y,Ax)=0 \qquad (2.2.20)$$

此式虽然与(2.2.18)的形式相同，不过要注意现在的 x 和 y 是复向量.将其中的 y 代之以 iy，就得到

$$(x,A\mathrm{i}y)+(\mathrm{i}y,Ax)=0$$

把 i 这个因子提出来时，后一项应有一负号.由此得到

$$(x,Ay)-(y,Ax)=0 \qquad (2.2.21)$$

将此式与(2.2.20)相加得到

$$(x,Ay)=0$$

因 x 和 y 是任意，故只能有 $A=0$.**证明完毕**.

定理 6 设 A 是酉空间的线性算子，则对所有向量 x，(x,Ax) 总是实数的充要条件是：A 为厄米算子.

证明 充分条件，若 A 是厄米的，

$$(x,Ax)=(Ax,x)=(x,Ax)^{*}$$

故 (x,Ax) 一定是实数.必要条件，当 (x,Ax) 是实数时，

$$(x, Ax) = (x, Ax)^* = (Ax, x) = (x, A^\dagger x)$$

因此得到

$$(x, (A - A^\dagger)x) = 0$$

因向量 x 是任意的，此式表明 $A = A^\dagger$，即 A 为厄米算子.**证明完毕**.

注意，此定理不能用于实空间，因为在实空间中任意的(x, Ax)总是实数，而不需要 A 是对称的条件.因此，实空间中，A 为对称算子是(x, Ax)为实数的充分条件，非必要条件.

例 9 例 2 中的变换矩阵 B 和例 3 中的变换矩阵 A 显然都是正规矩阵，它们代表了正规算子的变换，也就是正规变换.并且，它们也都是酉矩阵，它们代表了酉算子的变换，也就是酉变换.

厄米矩阵 $A = A^+$ 和实对称矩阵 $B = B^{\mathrm{T}}$ 都是有限维线性空间中自伴算子的表示矩阵.

对于自伴算子，例 2，例 3，例 4 中的内积分别写成如下形式.

$$(Bx)^{\mathrm{T}} y = x^{\mathrm{T}} By$$

$$(Ax)^+ y = x^+ Ay$$

$$\int_a^b \mathrm{d}s\,[\int_a^b k^*(t,s)\, x^*(t)\ \mathrm{d}t\,]\ \ y(s) = \int_a^b \mathrm{d}s\ \ x^*(s)\,[\int_a^b k(s,t)\ y(t)\ \mathrm{d}t\,]$$

对于微分算子 L，当形式伴随算子与算子复共轭的形式相等，$L^\dagger = L$，就称此算子形式自伴的.形式自伴的微分算子不一定是自伴的.是否真正的自伴算子还要看边界条件.

一般的一阶微分算子(2.2.9a)形式自伴的条件是

$$q_1(x) = -q_1^*(x), q_0(x) = q_0^*(x) - q_1^{*\prime}(x)$$

所以 $q_1(x) = \mathrm{i}c(x)$，令 $q_0(x) = a(x) + \mathrm{i}b(x)$，其中 a,b,c 三个函数都是实的。那么得到

$$q_0(x) = a(x) + \mathrm{i}b(x) = a(x) - \mathrm{i}b(x) + \mathrm{i}c'(x)$$

得到形式自伴的条件是

$$c'(x) = 2b(x)$$

最简单的情况是：c 是个常数，则 c'=b=0，$q_0(x)$是个实函数。这就是

$$q_0 = q_0^{\ *}, q_1 = -q_1^{\ *} \qquad (2.2.22)$$

即 q_0 是个实数，而 q_1 是个虚数. 一般情况下，如果(2.2.9c)式满足，算子(2.2.9)就

是自伴的.

对于一般的二阶微分算子，容易从(2.2.10)式看出形式自伴的条件.
一般的二阶微分算子(2.2.10a)形式自伴的条件是

$$p_2(x)=p_2^*(x), p_1(x)=2p_2^{*\prime}(x)-p_1^*(x), p_0(x)=p_2^{*\prime\prime}(x)-p_1^{*\prime}(x)+p_0^*(x)$$

由二阶导数项，显然，p_2 是实的。令 $p_i(x)=a_i(x)+\mathrm{i}b_i(x), i=0,1$，

由一阶导数项，得到

$$a_1(x)+\mathrm{i}b_1(x)=2p_2{}'(x)-a_1(x)+\mathrm{i}b_1(x), p_0(x)=p_2^{*\prime\prime}(x)-p_1^{*\prime}(x)+p_0^*(x)$$

这就要求

$$p_2{}'(x)=a_1(x)$$

再由零阶导数项，得到

$$a_0(x)+\mathrm{i}b_0(x)=p_2{}''(x)-a_1'(x)+\mathrm{i}b_1'(x)+a_0(x)-\mathrm{i}b_0(x)$$

$$=p_2{}''(x)-p_2{}'(x)+\mathrm{i}b_1'(x)+a_0(x)-\mathrm{i}b_0(x)$$

结果是

$$b_1'(x)=2b_0(x)$$

其中的一种较为简单的情况是：p_2，p_1，p_0 三个函数都是实的，并且

$$p_2'=p_1 \qquad (2.2.23a)$$

此时这个形式自伴算子可以写成紧缩的形式，

$$L=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(p_2(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x})+p_0(x) \qquad (2.2.23b)$$

此时函数 u 和 v 的结简化为

$$J(u,v)=p_2(u'v^*-uv^{*\prime}) \qquad (2.2.24)$$

如果

$$[p_2(u'v^*-uv^{*\prime})]_a^b=0 \qquad (2.2.25)$$

算子(2.2.23)就是自伴的.

例如，例 5 中的一阶微分算子 $L=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ 形式上不是自伴的.而动量算子 $p=\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ 则是形式自伴的.二阶微分算子 $L=\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}$ 则是形式自伴的，即 $L^\dagger=L$.例 6 中的边界条件满足之后，算子就是自伴的. 式(2.2.11)中的各种情况列于表 2.1.

表 2.1 式(2.2.11)中的各种情况.

	$L^\dagger\neq L$	$L^\dagger=L$

$[J(u,v)]_a^b \neq 0$	$L^\dagger$ 非 L 的伴随算子	L 是形式自伴算子
$[J(u,v)]_a^b = 0$	$L^\dagger$ 是 L 的伴随算子	L 是自伴算子

2. 算子的特征值

定义 8 当算子 A 作用在一个非零向量 x 上的结果等于一个数λ乘以这个向量

$$Ax = \lambda x \tag{2.2.26a}$$

那么，此式称为**特征值方程**，λ就称为这个算子的**特征值**，与特征值λ相应的向量称为**特征向量**.一个算子的伴随算子 $A^\dagger$ 的特征方程

$$A^\dagger y = \gamma y \tag{2.2.26b}$$

称为(2.2.26a)的**伴随特征方程**，或者简称**伴随方程**，其中的γ和 y 分别成为λ和 x 的**伴随特征值**和**伴随特征向量**.

特征向量总是对应于某一特征值的.一个特征值可能有不止一个相互线性无关的特征向量.若一个特征值λ有 k 个相互线性无关的特征向量与其对应

$$Ax_i = \lambda x_i, (i = 1, 2, \cdots, k) \tag{2.2.27}$$

那么称λ的**简并度**为 k.若特征向量是函数，也称为**特征函数**.物理学家常把特征值和特征函数称为**本征值**和**本征函数**.以后我们随便使用这两套名称.

有限维线性空间中的线性变换算子是一个变换矩阵，其特征值的计算在线性代数中已经讨论过了.微分算子的特征值也是容易讨论的.我们在下一章将对于二阶微分算子进行介绍.积分算子的特征值将在第八章中讨论.不管算子的具体形式如何，有一些共性我们是根据自伴算子的定义和内积的定义立即就可以得到的.

我们假定算子的特征值总是可以按照某种规则排序(比如实数就按从小到大排序)，那么，第 n 个特征值记为λ_n，相应的特征向量记为 x_n.

定理 7 如果算子 A 是正规算子，那么有以下结论成立.

(1) 若向量 x 是 A 的属于特征值λ的特征向量，则它也一定是 $A^\dagger$ 的属于特征值 λ^* 的特征向量，即，$Ax = \lambda x \Leftrightarrow A^\dagger x = \lambda^* x$.

(2) 属于不同特征值的特征向量是相互正交的.

证明 (1) 设 $Ax = \lambda x$，因 A 是正规算子，

$$(Ax, Ax) = (A^\dagger Ax, x) = (AA^\dagger x, x) = (A^\dagger x,\ A^\dagger x)$$

当 A 是正规的，则 $A - \lambda I$ 也是正规的.将上式中的 A 代之以 $A - \lambda I$，

$$((A-\lambda I)x, (A-\lambda I)x) = ((A-\lambda I)^\dagger x,\ (A-\lambda I)^\dagger x) = (A^\dagger x - \lambda^* x,\ A^\dagger x - \lambda^* x)$$

故 $(A-\lambda I)x = 0 \Leftrightarrow (A^\dagger - \lambda^* I)x$.从而 $Ax = \lambda x \Leftrightarrow A^\dagger x = \lambda^* x$.

(2) 若算子有两个不同的特征值 $Ax_1 = \lambda_1 x_1$ 和 $Ax_2 = \lambda_2 x_2$，做如下内积，

$$(A^\dagger x_1, x_2) = (x_1, Ax_2)$$

两边用特征方程代入，得到

$$(\lambda_1^* x_1, x_2) = \lambda_1(x_1, x_2) = \lambda_2(x_1, x_2)$$

因此，$(\lambda_1 - \lambda_2)(x_1, x_2) = 0$，当 $\lambda_1 \neq \lambda_2$，只能有 $(x_1, x_2) = 0$.因此，属于不同特征值的特征向量是相互正交的.**证明完毕**.

此定理中的 A 如果是自伴算子，就必然 $\lambda = \lambda^*$ 因此我们得到

推论 如果算子 A 是自伴算子，(i) A 的特征值一定是实数.(ii) 属于不同特征值的特征向量是相互正交的.

从定理的证明过程可以看到，取一个数的“伴随数”，就是数量矩阵的伴随矩阵，这个数就成为复共轭.因此，一个数的伴随数就是其复共轭.

在量子力学中，物理量是用微分算子来表示的，算子的特征值就是可测量的物理量.而可测物理量一定是实数.这就是说，表示物理量的微分算子一定是自伴算子.由上面的讨论可知，微分算子是自伴的，它是形式自伴的，并且结用上下限代入后一定为零.在常用的量子力学教科书上通常未提到结为零，这是因为，在实际的物理系统中，后一条件总是满足的.

物理学家常把能够代表物理量的算子称为**算符**.以后我们将不加区分地称算子或者算符.

实际上，对于伴随算子的特征值问题，有以下更为一般的定理.首先我们假设以下条件满足.若内积

$$(f, y) = 0 \tag{2.2.28}$$

其中 f 是空间中除 y 以外的任何一个向量，那么一定有 $y = 0$，即 y 是零向量.

定理 8 在满足上述条件下，(i) 若向量 x_n 是 A 的属于特征值 λ_n 的特征向量，那么，$A^\dagger$ 的特征值是 λ_n^*，相应的特征向量记为 y_n，也就是说，A 和 $A^\dagger$ 的特征值是一一对应，互为复共轭的.相应地特征向量和伴随特征向量也是一一对应的.(ii) 若一个特征向量和一个伴随特征向量是分别属于不同特征值的，那么它们之间相互正交，即

$$(\lambda_n - \lambda_m)(y_m, x_n) = 0 \tag{2.2.29}$$

证明 (i)根据已给条件，$Ax_n - \lambda_n x_n = 0$.任取一个向量 y 做内积，得到$(y, (A - \lambda_n I)\, x_n) = 0$.由伴随算子的定义，有 $((A - \lambda_n I)^\dagger y, x_n) = ((A^\dagger - \lambda_n^* I)y, x_n) = 0$.若 $(A^\dagger - \lambda_n^* I)y = f \neq 0$，由于 y 是任意取的，f 也是任意的，根据上述条件，只能是 x_n 恒为零.但是 x_n 是 A 的特征向量，不恒为零.所以只能是 $(A^\dagger - \lambda_n^* I)y = 0$.也即，只有特征向量满足此式.因此 λ_n^* 是 $A^\dagger$ 的特征向量.相应的特征向量记为 y_n. (ii) 若

已知 $Ax_n-\lambda_n x_n=0$ 和 $A^\dagger y_m-\lambda_m^* y_m=0$，做内积 $(y_m,Ax_n)=(y_m,\lambda_n x_n)=\lambda_n(y_m,x_n)$，同时又有 $(y_m,Ax_n)=(A^\dagger y_m,x_n)=(\lambda_m^* y_m,x_n)=\lambda_m(y_m,x_n)=\lambda_n(y_m,x_n)$，这就得到(2.2.29)式.当 $m\neq n$，则有

$$(y_m,x_n)=0,m\neq n \tag{2.2.30}$$

一个算子的特征向量与其伴随算子的特征向量之间的这种正交性，称为**双正交性**.此时，算子本身的属于不同特征值之间的特征向量是否具有正交性是无法证明的，即当 $m\neq n$ 时，(x_m,x_n) 不一定为零.

3. 等距变换

定义 9 保持向量的模不变的线性变换称为**等距变换**.即，若 U 是一线性算子，它作用在空间中的任意向量 x 上，有

$$\|Ux\|=\|x\| \tag{2.2.31}$$

此时算子 U 称为**等距变换算子**，或**等距算子**.

等距算子的这一定义与以下两种定义完全是等价的.

$$U^\dagger U=I \tag{2.2.32}$$

和

$$(Ux,Uy)=(x,y) \tag{2.2.33}$$

容易证明式(2.2.31)-(2.2.33)的两两之间都是互为充要条件的.

定理 9 等距算子的特征值的绝对值是 1.

证明 若 $Ux=\lambda x$，那么 $(Ux,Ux)=(\lambda x,\lambda x)=\|\lambda\|^2(x,x)=(x,x)$，故 $\|\lambda\|=1$.**证明完毕**.

定理 10 (i) 对内积空间，一个正交归一集 $\{e_i\}$ 经等距变换之后的集合 $\{Ue_i\}$ 仍然是一个正交归一集.(ii) 对希尔伯特空间，一个完备的正交归一集 $\{e_i\}$ 经等距变换之后的集合仍然是一个完备正交归一集.

证明 (i) 若 $(e_i,e_j)=\delta_{ij}$，那么 $(Ue_i,Ue_j)=(e_i,e_j)=\delta_{ij}$.

(ii) 只要证明等距变换后得到的正交归一集仍然是完备的.为此我们利用帕赛瓦尔等式(2.1.16)，因为它是正交归一基组完备性的一个等价的表述.

$$\sum_i(x,Ue_i)(Ue_i,y)=\sum_i(U^+x,e_i)(e_i,U^+y)=(U^+x,U^+y)=(x,UU^+y)=(x,y)$$

其中第二个等号是利用了正交归一基组 $\{e_i\}$ 是完备的.上式表示等距变换后得到的 $\{Ue_i\}$ 是完备的.**证明完毕**.

等距变换的一个最简单的例子是实际三维空间中的直角坐标系的旋转.这一变换把一直角坐标系变换成另一直角坐标系.这一变换不改变空间中任一向量的长度.变换矩阵的特征值的绝对值都是 1.

在 2.1.2 小节的例 16 中定义了两个向量之间的夹角.表达式如下：

$$|\cos\varphi| = \frac{|(x,y)|}{\sqrt{(x,x)}\sqrt{(y,y)}}$$

显然等距变换不改变两个向量之间的夹角.在这个意义上，等距变换是保角变换.

定义 10 若 $A^{\dagger} = -A$，则称 A 是**反自伴变换**.

反自伴变换显然是正规变换.由例 5 知，一阶微分算子 d/dx 是一个形式反自伴算子.

定理 11 反自伴变换的特征值为纯虚数.

证明 设 $Ax = \lambda x$，则，

$$\lambda^*(x,x) = (\lambda x, x) = (Ax, x) = (x, A^{\dagger}x) = (x, -Ax) = -\lambda(x,x)$$

可见 $\lambda = -\lambda^*$.**证明完毕**.

由此可知，动量算子必须带有一个纯虚数，才能得到实的特征值.这正是(2.2.22)式所表明的内容.

我们最后强调，以上讨论的关于算子的所有性质，对于任何线性算子都成立，即除了线性代数中的线性变换，对于积分算子，微分算子等也都是成立的.

在第七章中我们将对于算子做更进一步的讨论.

2.2.3 非齐次线性代数方程组有解的择一定理

我们来回顾线性代数方程组求解，因为有了伴随算子的概念，我们可以将求解的条件概括得更加全面，并可以将求解的条件用择一定理的形式表现出来.

设有一个非齐次的线性代数方程组如下.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \tag{2.2.34}$$

我们令

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = (y_1, y_2, \cdots, y_n)^{\mathrm{T}}, \quad b = (b_1, b_2, \cdots, b_n)^{\mathrm{T}}$$

那么上式写成

$$Ay = b \tag{2.2.35}$$

这是将向量 y 变换为向量 b 的线性变换.矩阵 A 就是线性变换的表示矩阵.在其中将向量 b 代之以零向量，就得到相应的齐次线性方程，

$$Au = 0 \tag{2.2.36}$$

取矩阵 A 的厄米共轭，就得到上述方程的伴随方程.

$$A^{+}v = 0 \tag{2.2.37}$$

有的文献将伴随方程的解写成 u^{+} 的形式.伴随方程就是 $A^{+}u^{+} = 0$ 的形式.一般地只要不是自伴算子，$A^{+} \neq A$，那么 $u^{+} \neq u$.

在线性代数中我们已经知道，如果矩阵 A 的行列式不为零，$\det A \neq 0$，则齐次方程(2.2.36)只有零解，方程(2.2.37)同此，因为必然有 $\det A^{+} = (\det A)^{*}$.此时，方程组(2.2.35)有唯一解：$y = A^{-1}b$.

当 $\det A = 0$ 是情况怎样呢？这时，齐次方程(2.2.36)及其伴随方程(2.2.37)是有非零解的.那么此时方程(2.2.35)是否无非零解呢？不一定.如果方程组(2.2.35)中的非齐次项 b 与齐次伴随方程(2.2.37)的解 v 正交，即

$$(b, v) = 0 \tag{2.2.38}$$

那么非齐次方程(2.2.35)可以有非零解.我们可以做以下的内积，

$$(Ay, v) - (y, A^{+}v) = (b, v) = 0$$

其中用到(2.2.35)和(2.2.37)式.根据伴随算子的定义知，此式的左边一定为零.因此我们就得到了(2.2.38).

注意，如果方程组(2.2.37)有 k 个线性无关的解 $v_i, i = 1, 2, \cdots, k$，那么(2.2.38)式指，向量 b 与每一个 v_i 都正交.

$$(b, v_i) = 0,\quad i = 1, 2, \cdots, k \tag{2.2.39}$$

以上内容总结为以下定理.

定理 12 非齐次线性代数方程组(2.2.35)有解的条件是，或者其系数矩阵 A 的行列式不为零，$\det A \neq 0$，或者 $\det A = 0$ 但同时非齐次项 b 与齐次伴随方程(2.2.37)的所有线性无关的解正交.

由于方程组(2.2.35)的有解的条件是在两个中选择一个，因此叫做**择一定理**.

式(2.2.39)也称为非齐次线性代数方程组有解的**相容性条件**.

以上是关于求解线性代数方程组的择一定理.求解微分方程和积分方程也有相应的择一定理.我们将分别在第三章和第八章中介绍.

§2.3 完备的正交归一函数集合.

2.3.1 收敛的类别

函数集合的完备性的定义依赖于收敛的概念.我们先给出关于函数的三种收敛的定义如下.

定义 1 一函数序列$\{h_n(x)\}$定义在$[a,b]$区间上，若

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b |h(x)-h_n(x)|^2 \,\mathrm{d}x = 0 \tag{2.3.1}$$

即对于任给ε存在一个$N(\varepsilon)$使当$n>N$时，

$$\int_a^b |h(x)-h_n(x)|^2 \,\mathrm{d}x < \varepsilon . \tag{2.3.2}$$

则称函数序列$\{h_n(x)\}$在$[a,b]$上**平均收敛**于$h(x)$.

定义 2 一函数序列$\{h_n(x)\}$定义在$[a,b]$区间上，对于在$[a,b]$中的任一x和任一$\varepsilon>0$，存在一个整数$N(x,\varepsilon)$，使得当 $n>N$，

$$|h(x)-h_n(x)| < \varepsilon \tag{2.3.3}$$

称函数序列$\{h_n(x)\}$在$[a,b]$上**逐点收敛**于$h(x)$.

定义 3 一函数序列$\{h_n(x)\}$定义在$[a,b]$上，对于任何$\varepsilon>0$，存在一个与 x 无关的整数$N(\varepsilon)$，使当$n>N$时，对于在$[a,b]$中所有的x满足

$$|h(x)-h_n(x)| < \varepsilon \tag{2.3.4}$$

则称函数序列$\{h_n(x)\}$在$[a,b]$上**一致收敛**于$h(x)$.

式(2.3.4)与第一章中定义零级ε-接近度的表达式是一样的.

由 2.1 节的内容我们知,任何收敛和极限都蕴含着我们已经定义了一种距离.此处的(2.3.2)-(2.3.4)三式的左边分别定义了三种距离,其中(2.3.3)和(2.3.4)两种距离虽然在形式上似乎是一样的，含义有差别.三种收敛的概念各对应于一种距离的定义.

以上三个定义中，$h_n(x)$本身可以是另一序列的部分和，即：$h_n(x)=\sum_{i=1}^{n}k_i(x)$.

例如，若$\lim_{n\to\infty}\int_a^b |h(x)-\sum_{i=1}^{n}k_i(x)|^2\,\mathrm{d}x=0$，则级数$\sum_{i=1}^{\infty}k_i(x)$平均收敛于$h(x)$.

逐点收敛，整数$N(x,\varepsilon)$与x有关；一致收敛，$N(\varepsilon)$与 x 无关.后者的条件更

强.

三种收敛之间的关系：若一致收敛，则一定是逐点收敛的.若一致收敛，则一定是平均收敛的.

对于一致收敛性，有以下定理.

定理 1 若对于任意$\varepsilon > 0$，存在一个整数$N(\varepsilon)$，使当所有$r > N$，$s > N$以及在$[a,b]$中的x，满足

$$\left|h_r(x) - h_s(x)\right| < \varepsilon$$

则函数序列$\{h_n(x)\}$在$[a,b]$上一致收敛.

对照式(2.1.3)知，定义了距离$\rho(h_r(x),h_s(x)) = \left|h_r(x) - h_s(x)\right|$之后，序列$\{h_n(x)\}$是一个柯西序列.这个序列是一致收敛的.

如果$h_n(x)$本身是另一序列的部分和，$h_n(x) \equiv \sum_{i=1}^{n} k_i(x)$，那么：

$$\left|h_r(x) - h_s(x)\right| = \left|\sum_{i=1}^{r} k_i - \sum_{i=1}^{s} k_i\right| = \left|\sum_{i=r+1}^{s} k_i(x)\right| < \varepsilon$$

若存在一致收敛或逐点收敛，我们可以写出

$$h(x) = \lim_{n\to\infty} h_n(x) = \sum_{i=1}^{\infty} k_i(x)$$

由 2.1.1 节可以看到，基于收敛和极限的概念，我们来定义空间完备性的概念.类似地，有了函数集合的收敛和极限的概念之后，我们就可以来定义函数集合，也就是函数空间的完备性了.

2.3.2 函数集合的完备性

定义 4 对于定义在$[a,b]$上的一函数集合$\{f_n\}$，若

$$(f_n, f_m) \equiv \int_a^b f_n^*(x) f_m(x) \mathrm{d}x = \delta_{nm}$$

则函数集合$\{f_n\}$称为在$[a,b]$上是**正交归一**的.

对于一个在$[a,b]$上非负的**权重函数** $w(x)$，若

$$(f_n, f_m) \equiv \int_a^b f_n^*(x) f_m(x) w(x) \mathrm{d}x = \delta_{nm}$$

则函数集 $\{f_n\}$是在$[a,b]$上对于**权重函数 $w(x)$正交归一**的.权函数为 1 时，就简称

为**正交归一**.

例 1 定义在$[-\pi,\pi]$上的傅里叶函数集 $f_n(x)=\dfrac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}}$，$(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$， 则$\{f_n\}$在$[-\pi,\pi]$上是正交归一的.容易验证，

$$(f_n,f_m)=\int_{-\pi}^{\pi}f_n^*(x)f_m(x)dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{i(m-n)x}dx=0\text{，当 }m\neq n$$

$$(f_n,f_n)=\int_{-\pi}^{\pi}f_n^*(x)f_n(x)dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}1dx=1$$

所以，$(f_n,f_m)=\delta_{mn}$.

利用平均收敛可以定义正交函数集的完备性.

定义 5 设$g(x)$为希尔伯特函数空间中的任何函数并设$\{f_i(x)\}$为希尔伯特函数空间中的正交归一函数集.若存在常数系列$\{a_i\}$，使得部分和序列$g_n(x)\equiv\sum_{i=1}^{n}a_i f_i(x)$平均收敛于$g(x)$，则称函数集$\{f_i(x)\}$是一个**完备的正交归一集合**.

等价地，若均方误差可以任意小，即

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b|g-g_n|^2\,dx=\lim_{n\to\infty}\int_a^b|g-\sum_{i=1}^{n}a_i f_i|^2\,dx=0$$

则集合$\{f_i\}$是一个完备的正交归一函数集.应注意系数$\{a_i\}$与 n 无关.

若$\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b|f-\sum_{i=1}^{n}a_i f_i|^2\,dx=0$，用符号表示：

$$f(x)\doteq\sum_{i=1}^{\infty}a_i f_i(x)\tag{2.3.5}$$

等号上面加一点表示在平均收敛的意义下相等.

定义 6 设$f(x)$为希尔伯特函数空间中的任意一个函数，并设存在一个正交归一函数集$\{f_i(x)\}$，使得级数$\sum_{i=1}^{\infty}c_i f_i(x)$一致收敛于$f(x)$，即

$$f(x)=\sum_{i=1}^{\infty}c_i f_i(x)\tag{2.3.6}$$

系数c_i叫做**广义傅里叶系数或展开系数**，也称为$f(x)$在基函数$f_i(x)$上的投影分量.式(2.3.6)称为$f(x)$的**广义傅里叶展开**.展开系数用下式来计算.

$$(f_n, f) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i (f_n, f_i) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \delta_{ni} = c_n$$

无限维空间中的贝塞尔不等式:

$$(f, f) \geq \sum_{i=1}^{\infty} |c_i|^2 \tag{2.3.7}$$

常见的是其中等号成立的情况：

$$(f, f) = \sum_{i=1}^{\infty} |c_i|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |(f_i, f)|^2 \tag{2.3.8}$$

此式叫做**完备性关系**.

与有限维空间一样，无限维空间中也有帕赛瓦尔关系

$$(f, g) = \sum_{i=1}^{\infty} (f, f_i)(f_i, g) \tag{2.3.9}$$

证明见习题.

定义 7 若没有与集合中每一个函数正交的非零函数，则正交归一函数集称作是**封闭**的.

定理 2 对于希尔伯特函数空间中一个正交归一函数集，当且仅当它是封闭的，则它是完备的.

2.3.3 *N* 维数域空间和希尔伯特函数空间

N 维数域空间 C^N 中的向量都是一组 N 个数.希尔伯特函数空间中的向量都是函数 $f(x)$.这两者都属于线性空间.在各自定义了内积之后，都属于内积空间.上面关于线性空间和内积空间的一些定义和概念在两者中都适用，一些公式是一一对应的.例如，基组，展开，内积，正交归一性，模，完备性，格莱姆-施密特正交化方法，贝塞尔不等式，帕赛瓦尔等式，等等.我们在表 2.2 中将 N 维数域空间 C^N 和希尔伯特函数空间作一对照.

表 2.2 N 维数域空间 C^N 和希尔伯特函数空间的对照.其中 N 维数域空间中的向量用黑体字母表示，内积用点·表示.

	N 维数域空间 C^N	希尔伯特函数空间
维数	N	既可以是有限维也可以是无限维的，即以下的 N 可以是无限大

基组	基矢$\{\boldsymbol{e}_i\}$	基函数$\{f_i(x)\}$
空间内向量用基组展开	任何向量可以用基矢展开 $\boldsymbol{x}=\sum_i x_i\boldsymbol{e}_i$	任何函数可以用基函数展开 $f(x)=\sum_{i=1}^{N}c_i f_i(x)$
内积的定义	$\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}=\sum_i x_i^* y_i$	$(f_1,f_2)=\int_a^b f_1^*(x)f_2(x)\mathrm{d}x$
带权内积的定义	$\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}=\sum_i p_i x_i^* y_i$ $p_i>0,(i=1,2,\cdots,n)$	$(f_1,f_2)=\int_a^b f_1^*(x)f_2(x)w(x)\mathrm{d}x$ $w(x)>0$
基组的正交归一性	$\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_j=\delta_{ij}$	$\int_a^b f_n^*(x)f_m(x)w(x)\mathrm{d}x=\delta_{nm}$
展开系数(投影分量)	$x_i=\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{e}_i$	$c_i=\int_a^b f^*(x)f_i(x)w(x)\mathrm{d}x$
模的平方	$\lVert\boldsymbol{x}\rVert^2=\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}=\sum_{i=1}^{N}\lvert x_i\rvert^2$	$\lVert f\rVert^2=(f,f)=\sum_{i=1}^{N}\lvert c_i\rvert^2$
零向量	$x_i=0,\quad(i=1,2,\cdots,N)$ $\Leftrightarrow\boldsymbol{x}=0$	$c_i=0,\quad(i=1,2,\cdots,N)$ $\Leftrightarrow f(x)=0$
线性无关(线性独立)和线性相关的概念	对于向量组 $\{\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_m\}$，如果 $\sum_i\lambda_i\boldsymbol{x}_i=0$，当且仅当 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_m=0$，则称 这向量组是线性无关的；否则，称该向量组线性相关的	对于函数组 $\{\varphi_1(x),\varphi_2(x),\cdots,\varphi_m(x)\}$，如果 $\sum_i a_i\varphi_i(x)=0$，当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_m=0$，则称这 函数组是线性无关的；否则，称该函数组线性相关的

实际上，在希尔伯特函数空间中，任何一个函数可以用一个完备集来展开.这个完备集中的函数组可以非正交的，只要是线性无关的函数组即可.与C^N中一个向量可以用一组非正交的基组展开一样，在希尔伯特空间中，也可以用非正交归一的函数集来展开一个函数，只是计算展开系数不太方便.这时，可以通过格莱姆-施密特方法构造一正交归一基函数组.

下一章可以看到，二阶微分方程的本征函数可以提供希尔伯特函数空间的完备函数集.

由于希尔伯特函数空间是完备的内积空间，2.2 节中关于内积空间中算子的理论在希尔伯特函数空间中完全适用.

§2.4 魏尔斯特拉斯定理与多项式逼近

2.4.1 魏尔斯特拉斯定理

定理 1(魏尔斯特拉斯定理) 若 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则存在一个多项式序列 $P_n(x)$，它在 $[a,b]$ 上一致地收敛于函数 $f(x)$：$\lim\limits_{n\to\infty} P_n(x)=f(x)$.

此定理表明：人们可以建立 x 幂的多项式序列，使它一致收敛于有限闭区间 $[a,b]$ 上连续的任意函数.作为一个推论，可以证明在任何闭区间 $[a,b]$ 上存在一个完备的正交归一函数集.这一定理有多种证明，详细的步骤可参看文献.此处只给出一个相当简单的证明.

证明思路：函数 $f(x)$ 定义在区间 $[a, b]$ 上，通过变量替换与加减某些多项式，过渡成为：函数 $h(x)$ 定义在区间 $[0,1]$ 上，并且 $h(0)=h(1)=0$.因而只要证明 $h(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上满足定理即可.构造函数 $P_n(x)=\int_{-1}^{1} f(x+t)\delta_n(t)\mathrm{d}t,\quad 0\le x\le 1$，其中 $\delta_n(x)$ 函数是一个具有某些特定的性质的多项式.再通过变量变换以及利用 $f(x)$ 的一致连续性，可以证明此定理.

定理证明：设 $f(x)$ 定义在 $[a, b]$ 上，考虑函数 $h(z)$：$h(z)=h\left(\dfrac{x-a}{b-a}\right)\equiv f(x)$，显然 $f(a)=h(0)$，$f(b)=h(1)$，且区间 $[a,b]$ 中的任一 x 相应于 $[0,1]$ 中的一个 z.于是，若 $h(z)$ 可以用 z 的多项式逼近，那么任一 $z=\dfrac{x-a}{b-a}$ 的多项式也是 x 的一个多项式，因此我们可以从逼近 h 的多项式过渡到逼近 f 的多项式.

同样，我们假设在 $z=0$ 和 $z=1$ 时，$\boldsymbol{h(x)=0}$，若不是这样，我们定义对于 $[0,1]$ 中的 z，$g(z)=h(z)-h(0)-z[h(1)-h(0)]$，显然 $g(0)=g(1)=0$，因为 $g(z)$ 和 $h(z)$ 的差只是一个多项式，若可用多项式逼近 $g(z)$，则我们可以用相同的多项式再加上多项式 $h(0)+z[h(1)-h(0)]$ 来逼近 $h(z)$.

于是，我们假定原始函数 $f(x)$ 定义在 $[0, 1]$ 上，且在 $f(0)=f(1)=1$，$f(x)$ 在 $[0, 1]$ 以外的值与要证明的内容无关，为证明过程方便起见，在这里令它恒等于零.

今设

$$P_n(x)=\int_{-1}^{1} f(x+t)\delta_n(t)\mathrm{d}t,\quad 0\le x\le 1 \tag{2.4.1}$$

其中

$$\delta_n(t)=\begin{cases} c_n(1-t^2)^n, & \text{对于 } 0\le|t|\le1 \\ 0, & \text{对于 } |t|>1 \end{cases} \tag{2.4.2}$$

我们要证明的是当 $n\to\infty$时，$\lim\limits_{n\to\infty}P_n(x)=f(x)$.

式(2.4.2)所给出的函数$\delta_n(x)$我们将在后面第五章做仔细介绍.此处先给出这个函数的基本性质．显然，这是个偶函数，取系数$c_n=\dfrac{(2n+1)!}{2^{2n+1}(n!)^2}$，得到在$[-1,1]$上$0\le\delta_n(x)\le1$，且在此区间上有规一化的特点.

$$\int_{-1}^{1}\delta_n(x)\mathrm{d}x=1 \tag{2.4.3}$$

对于任给定一个小于 1 的正数γ ($0<\gamma<1$)，

$$\int_{\gamma}^{1}\delta_n(x)\mathrm{d}x\le\sqrt{n}(1-\gamma^2)^n \tag{2.4.4}$$

其中$1-\gamma^2=z<1$是个小于 1 的数.当$n\to\infty$时，z^n是趋于零的，且z^n比$1/\sqrt{n}$更快地趋于零.证明如下：当$n\to\infty$时z^n与$1/\sqrt{n}$之比是零比零型的.可令$y=1/z>1$.那么

$$\lim_{n\to+\infty}z^n\sqrt{n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{n}}{y^n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2\sqrt{n}y^n\ln y}=0 \tag{2.4.5}$$

其中运用洛必达法则，分子和分母对 n 都求一次导.

由假设，$f(x)$在$[0,1]$以外为零，则$t\le-x$或$t\ge1-x$时 $f(x+t)\equiv0$.因此(2.4.1)式可以改写成

$$P_n(x)=\int_{-x}^{1-x}f(x+t)\delta_n(t)\mathrm{d}t$$

作变量置换$t\to t-x$，

$$P_n(x)=\int_0^1 f(t)\delta_n(t-x)\mathrm{d}t=\int_0^1 f(t)c_n[1-(t-x)^2]^n\mathrm{d}t$$

此式表明，x 幂的系数是对 t 的定积分，因此$P_n(x)$是一个 x 的 $2n$ 次多项式.

由于$f(x)$在闭区间**[0, 1]**上连续，所以是一致连续的.对于任给$\varepsilon>0$，存在γ使得对于$[0,1]$中所有 x，满足$|f(x+\gamma)-f(x)|<\varepsilon$.所以

$$\left|P_n(x)-f(x)\right|=\left|\int_{-1}^{1}\left[f(x+t)-f(x)\right]\delta_n(t)\mathrm{d}t\right|$$

$$\le\int_{-1}^{1}\left|f(x+t)-f(x)\right|\delta_n(t)\mathrm{d}t=\left(\int_{-1}^{-\gamma}+\int_{-\gamma}^{\gamma}+\int_{\gamma}^{1}\right)\left|f(x+t)-f(x)\right|\delta_n(t)dt$$

其中把δ_n函数的绝对值去掉了，因为$\delta_n(t)\ge 0$.令$|f(x)|$的最大值等于 M，则

$$\int_{\gamma}^{1}\left|f(x+t)-f(x)\right|\delta_n(t)\mathrm{d}t\le\int_{\gamma}^{1}[\left|f(x+t)\right|+\left|f(x)\right|]\delta_n(t)\mathrm{d}t\le 2Mn^{1/2}(1-\gamma^2)^n$$

另一部分$\int_{-1}^{-\gamma}\left|f(x+t)-f(x)\right|\delta_n(t)\mathrm{d}t$的估算同此.再由$f(x)$的一致连续性可知满足当$|t|<\gamma$时$|f(x+t)-f(x)|<\varepsilon/2$，所以

$$\int_{-\gamma}^{\gamma}\left|f(x+t)-f(x)\right|\delta_n(t)\mathrm{d}t<\frac{\varepsilon}{2}\int_{-\gamma}^{\gamma}\delta_n(t)\mathrm{d}t\le\frac{\varepsilon}{2}$$

故

$$\left|P_n(x)-f(x)\right|<4Mn^{1/2}(1-\gamma^2)^n+\frac{\varepsilon}{2}$$

由(2.4.5)式，当 n 值足够大时，$n^{1/2}(1-\gamma^2)^n$的值可以任意小，特别是可以小于$\varepsilon/2$.所以存在 N，使当$n>N$时，对于预先给定的任意小的ε满足$\left|P_n(x)-f(x)\right|<\varepsilon$，即$\lim_{n\to\infty}|P_n(x)-f(x)|=0$，也就是$P_n(x)$在$[0,1]$上一致收敛于连续函数$f(x)$.**证明完毕**.

2.4.2 多项式逼近

魏尔斯特拉斯定理使得我们在计算一个函数的数值时，可以用一个逼近它的多项式来代替这个函数做计算.

回顾一个函数的泰勒展开，也是相当于用一个特殊的多项式来逼近这个函数.泰勒展开与维尔斯特拉斯定理的多项式逼近的对照如表 2.3 所示.

表 2.3 泰勒展开与魏尔斯特拉斯定理的多项式逼近的对照.

	泰勒展开	魏尔斯特拉斯定理
对函数的要求	各阶导数存在，即“解析”	函数在区间连续
收敛范围	收敛半径可以有限也可以无限	有限区间
适用范围	仅能适用于收敛区间	收敛区域以外多项式逼近仍可以存在

泰勒展开仅能在已经明确的收敛区间内适用.而对于多项式逼近，魏尔斯特拉斯定理证明了在收敛区域内，多项式逼近一定存在.在收敛区域之外，并没有证明在收敛区域以外，就一定不能用多项式逼近.因此，在收敛区域以外，还是有可能使用多项式逼近的.下面只考虑在收敛区间内的逼近.

泰勒展开式是无穷多项的.例如e^{-x}在$x=0$点邻域上的泰勒展开式是

$$e^{-x}=1-x+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3+\cdots+(-1)^n\frac{x^n}{n!}+\cdots$$

在 $x=0$ 点附近，级数收敛较快，可以取前几项之和来计算 $x=0$ 附近各点的近似值.但是随着 x 增大，级数收敛得很慢.如果要达到预定的精确度，展开式的项数必然要取得相当多，这就给计算上带来了困难.

对于魏尔斯特拉斯定理证明的多项式逼近，也是指最高次数趋于无穷大的.无穷多项的形式对于实际的应用当然是不利的.我们希望，对于函数 $f(x)$，能够找到一个次数 n 是有限的且不是太高的多项式 $P_n(x)$，它与 $f(x)$ 之间的误差在 x_0 点附近可能不是很精确，而对于 $f(x)$ 的整个区间来说，其误差分布比较均匀.这就有一个如何来衡量误差的问题.以下提到的 n 次多项式 $P_n(x)$ 中的 n 都是有限的.

定义 1 设以 n 次多项式

$$P_n(x)=\sum_{k=0}^{n}a_kx^k$$

在区间 $[a,b]$ 上逼近已知函数 $f(x)$，我们称 $|f(x)-P_n(x)|$ 为**绝对误差**.

显然，绝对误差在区间内是随 x 而变化的.下面我们介绍如何在整个区间内评价误差的两个概念.

1. 一致逼近

定义 2 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，对于任意给定的正数 ε，总存在一个 n 次多项式 $P_n(x)$，使不等式

$$|f(x)-P_n(x)|\le\varepsilon$$

在区间 $[a,b]$ 上处处成立，那么称多项式 $P_n(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上**一致逼近**函数 $f(x)$.(这与第一章中定义的 ε-接近度的概念是类似的.)也可以说，对区间 $[a,b]$ 上任一点的误差绝对值都不超过预先要求的同一个精度 ε，称 ε 为**偏差值**.如果在 $x=\xi$ 处，多项式 $P_n(x)$ 与函数 $f(x)$ 的误差绝对值最大，即

$$\max_{x\in[a,b]}|f(x)-P_n(x)|=|f(x)-P_n(x)|_{x=\xi}=\varepsilon$$

则称 $x=\xi$ 为**偏差点**.以 $[f(x)-P_n(x)]_{x=\xi}$ 的正负号分别称为**正偏差点**和**负偏差点**.

这个定义以偏差值 ε 的大小可以衡量一致逼近的程度.与 $f(x)$ 一致逼近的多

项式可以有无数多个.不过不同多项式的逼近程度可能有所不同.

定义 3 如果固定 n，而变动多项式 $P_n(x)$，称

$$E_n=\min_{P_n}\left\{\max_{x\in[a,b]}|f(x)-P_n(x)|\right\}=\max_{x\in[a,b]}|f(x)-P_n^*(x)|$$

为 $f(x)$ 的**最小偏差**.称 $P_n^*(x)$ 为 $f(x)$ 的**最佳一致逼近多项式**.

对于最佳一致逼近的问题，切比雪夫证明了以下四个定理.

定理 2 当 n 固定后，在所有 n 次多项式中一定存在一个且只有一个 n 次多项式是 $f(x)$ 的最佳一致逼近多项式.

定理 3 如果给定了偏差值ε，与函数 $f(x)$ 一致逼近的多项式中，以最佳一致逼近多项式的次数为最低.若偏差值越小，也就是要求精确度越高，那么最佳一致逼近多项式的次数也越高.

定理 4 $P_n^*(x)$ 是$[a,b]$上连续函数 $f(x)$ 的 n 次最佳一致逼近的多项式的充要条件是：$P_n^*(x)-f(x)$ 在 $[a,b]$ 上至少有 $n+2$ 个正负交替的偏差点 ξ_i $(i=1,2,\cdots,n+2)$.

这样的点组称为**切比雪夫交错点组**.

定义 4 由

$$T_n(x)=\cos(n\cos^{-1}x),\quad(-1\le x\le 1)\tag{2.4.6}$$

定义的多项式称为**切比雪夫多项式**.$T_n(x)$ 是个 n 次多项式，其最高次项的系数是 2^{n-1}.如果将切比雪夫多项式的最高幂次的系数化为 1，称它为**首一切比雪夫多项式**，记为$\tilde{T}_n(x)$，即

$$\tilde{T}_n(x)=\frac{1}{2^{n-1}}T_n(x)\tag{2.4.7}$$

从定义式(2.4.6)容易看出$T_n(x)$ 有以下性质.

(i) 在$[-1,1]$区间上$T_n(x)$ 的绝对值小于等于 1.

$$|T_n(x)|\le 1\tag{2.4.8}$$

(ii) 在$[-1,1]$区间上$T_n(x)$ 具有$n+1$个极值点

$$x_l=\cos\frac{l\pi}{n},\ (l=0,1,2,\cdots,n)\tag{2.4.9}$$

$T_n(x)$ 在这些极值点上的值为

$$T_n(x_l)=T_n(\cos\frac{l\pi}{n})=(-1)^l,\quad (l=0,1,2,\cdots,n) \tag{2.4.10}$$

容易看出，这 $n+1$ 个极值是正负交替的，因此在它们之间有 n 个零点.

(iii) 区间 $[-1,1]$ 上，$T_n(x)$ 是带权正交归一的.

$$(T_m(x),\ T_n(x))=\int_{-1}^{1}\frac{T_m(x)T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x=\delta_{mn} \tag{2.4.11}$$

其中 $w(x)=1/\sqrt{1-x^2}$ 是权函数.

(iv) 区间 $[-1,1]$ 上的 n 次多项式 $P_n(x)\in H_{n+1}$ 总是可以用切比雪夫多项式展开如下，

$$P_n(x)=\sum_{l=0}^{n}c_lT_l(x) \tag{2.4.12}$$

系数 c_l 由以下内积决定

$$c_l=(P_n(x),T_l(x))=\int_{-1}^{1}\frac{P_n(x)T_l(x)}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x,\quad (l=0,1,2,\cdots,n) \tag{2.4.13}$$

一般地，最高次项的系数为 1 的多项式也称为 ***n* 次首一多项式**.例如，(2.4.7) 式定义的 $\tilde{T}_n(x)$ 就是 n 次首一切比雪夫多项式.

定理 5A 在 $[-1,1]$ 区间上所有 n 次首一多项式中，$\tilde{T}_n(x)$ 与零函数的偏差值最小，其偏差为 $\frac{1}{2^{n-1}}$.$\tilde{T}_n(x)$ 是此区间上零函数的最佳一致逼近多项式.

注意定理 5 与定理 4 的区别.定理 4 说，当 $P_n^*(x)$ 是 n 次多项式时，$P_n^*(x)-f(x)$ 应有 $n+2$ 个正负交替的偏差点.现在 $\tilde{T}_n(x)$ 是 n 次的，它在 $[-1,1]$ 上只有 $n+1$ 个正负交替的偏差点.

定理 5B 在 $[-1,1]$ 区间上所有 $n-1$ 次多项式 $P_{n-1}(x)$ 中，$x^n-\tilde{T}_n(x)$ 是 x^n 的最佳一致逼近多项式.

2. 平方逼近(以下自己看)

定义 5 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上平方可积，若找到一个 n 次多项式 $P_n(x)$，使得

$$\delta=\int_a^b[f(x)-P_n(x)]^2\mathrm{d}x \tag{2.4.18}$$

为最小，则称为 $P_n(x)$ 与 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的**平均平方误差**，简称**均方误差**.这是一

种以δ的大小来衡量$P_n(x)$与$f(x)$的逼近程度的方法.需要注意的是，如果$P_n(x)$是与$f(x)$的均方误差很小的函数，在个别点上它与$f(x)$的误差有可能很大.

定义 6 一已知$f(x)\in C[a,b]$且平方可积，在所有 n 次多项式中找出一个$P_n^*(x)$，使得

$$\Delta=\int_a^b[f(x)-P_n^*(x)]^2w(x)\mathrm{d}x \tag{2.4.19}$$

为最小，则称在$[a,b]$上$P_n^*(x)$**最佳平方逼近(最小平方逼近)于**$f(x)$.Δ称为**带权**$w(x)$**的均方误差**.这是一种以Δ的大小来衡量$P_n^*(x)$与$f(x)$的逼近程度的方法.定义 5 中的均方误差其实为权函数$w(x)=1$的特例.

本章重点

线性空间、内积空间和希尔伯特空间的定义。
距离的定义及其作用。它的作用体现在收敛概念的定义上。
空间完备性的定义。
内积的定义。
贝塞尔不等式(2.1.15)。帕萨瓦尔不等式(2.1.16)。
算子、伴随算子、自伴算子的定义。矩阵算子、积分算子、微分算子的具体形式。注意微分算子对于边界条件的要求。
三种收敛的概念。完备性关系。带权正交规一。
希尔伯特空间中的向量。

轻点：
用算子的形式证明非齐次线性代数方程组有解的唯一性定理。以后在第三章和第七章还会分别遇到微分方程和积分方程有解的唯一性定理。
维尔斯特拉斯定理的思想。
一致逼近的概念。

小贴士

本章介绍了一些基本的概念。这些概念都应记住。而且应该是永不忘记的。越是基本的概念，越是重要。越是重要的内容，越应该牢记。
从本章开始，每一章中至少有些内容在以后的章节中会用到。应注意这方面的联系。

柯西不等式是施瓦兹不等式(2.1.8)的特例。在第七章中还会提到。见(7.1.16)式。

本章介绍的收缩算子，本书的直接应用不多。但这是一个重要的算子，许多方程能够进行迭代求解，都是基于收缩算子的性质。所以有的书籍上将之称为原理：称收缩算子为**压缩映像原理**。

本章提到的一些内容，同学们以前是接触过的。例如，广义傅里叶展开，就是以前的傅里叶展开的推广。算子的特征值和特征向量，在量子力学中，已经求出了若干具体的哈密顿算子的特征值和特征向量。向量的带权正交规一，在量子力学中也已经遇到过了。可以说，本章关于算子和希尔伯特空间的基本理论，是对于量子力学中所用到的数学理论的回顾和总结。

本章介绍的算子理论，对于量子力学也是特别有用的。因为量子力学的一个基本假设是：力学量由厄米算符来表示。算子常见的有两种方式。一是矩阵的方式。例如：角动量算子，自旋算符等。二是微分算符的方式。例如，哈密顿算符，动量算符，角动量算符等。当然，还有其它形式的算符，例如势能算符等。粒子的产生和湮灭算符，粒子数算符等。(量子力学或者高量中，有用积分算子来表示力学量吗？)

高等量子力学的课程中，会提到希尔伯特空间的概念。本章就是其比较完整的理论。

设有一个算符 A，我们称，内积 $\langle y|A|y\rangle=(y,Ay)$ 是算符 A 在 y 这个态中的平均值。其中等号的左边是一种简记的方式，这就是量子力学中采用的方式。所以，本章中关于算子的内容，其实有许多我们已经在量子力学中接触到了。但是量子力学中讲的算符，一般是微分算符。而本章讲的是一般意义上的算符，可以是坐标变换，微分，积分等算子。

习题

1. 证明：距离满足以下不等式：

$$\rho(x,y)\le\rho(x,z_1)+\rho(z_1,z_2)+\cdots+\rho(z_{n-1},z_n)+\rho(z_n,y)$$

这一不等式的几何意义是：一个多边形的一条边的长度小于等于所有其它边的长度之和.

2. 证明：每一个收敛点列一定是柯西序列.

3. 连续函数空间 $C[-1,1]$ 是不完备的.可以定义一连续函数的序列 $\{y_n(t)\}$ 如下.

$$y_n(t)=\begin{cases}0, & -1\le t\le 0\\ nt, & 0<t<1/n\\ 1, & 1/n\le t\le 1\end{cases}$$

序列中的每一个元素都是连续函数.证明：这一序列是个柯西序列，但收敛于一

个不连续的函数.

4. 我们已经距离说明有理数空间是不完备的.还有别的不完备空间吗？请举例说明.

9. 若$\{x_1, x_2, \cdots, x_m\}$是 m 维内积空间中任一正交归一集，对于该空间中的任意向量 x 和 y，证明帕赛瓦尔等式：$(x, y) = \sum_{i=1}^{m}(x, x_i)(x_i, y)$.注意这是在有限维情况下的证明.

10. 由 2.1 节例 12 知，设 $X = C[0, 2\pi]$，则 $A = \{1, \sin x, \sin 2x, \cdots, \sin nx\}$是一线性无关组.定义该空间中两个连续函数 $f_1(x), f_2(x)$ 的内积为 $(f_1, f_2) = \int_0^{2\pi} f_1^*(x)\ f_2(x)\ \mathrm{d}x$.证明这组基是正交但不归一的.正交归一基组应该写成什么形式？

11. 在六次多项式空间 $X = P_6[-1,1]$，则 $A = \{1, x, x^2, x^3, x^4, x^5, x^6\}$是一线性无关组.定义该空间中两个六次多项式 $f_1(x), f_2(x)$ 的内积为$(f_1, f_2) = \int_{-1}^{1} f_1^*(x) f_2(x)\mathrm{d}x$.证明这组基非正交归一的.请构造正交归一基组.最后得到的正交归一基组是什么多项式？为什么得到的是这一多项式而不是其它多项式？

14. 证明：若三个向量a, b, c有以下关系：

$$c = a + b$$

并且 a 和 b 正交，那么它们的模满足关系

$$\|c\|^2 = \|a\|^2 + \|b\|^2$$

15. 一个微分算子以及它所作用的函数满足的边界条件如下.

$$Lu(x) = (\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + 1)u(x), 0 < x < 1; u(0) - \alpha u(1) = 0$$

求其伴随算子及其所作用的函数满足的边界条件.

18. 微分方程$u''(x) = f(x), 0 < x < 1$只有一个边界条件$u(0) = \gamma$.请证明其伴随方程有三个边界条件.(提示，在求伴随边界条件时，还需要用到原微分方程.)

19. 三阶微分算子的一般形式是

$$L = r_3(x)\frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}x^3} + r_2(x)\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + r_1(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + r_0(x)$$

写出其形式伴随算子和结函数.若要求此算子是自伴的，条件是什么？

22. 已知形式自伴的二阶微分算子是

$$L = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(p_2(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}) + p_0(x)$$

一个齐次二阶微分方程

$$Lu(x)=0, a<x<b$$

加上齐次边界条件

$$\begin{pmatrix}\alpha_{1,1} & \alpha_{1,2}\\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u(a)\\ u'(a)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\beta_{1,1} & \beta_{1,2}\\ \beta_{2,1} & \beta_{2,2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u(b)\\ u'(b)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$$

称为二阶微分方程的齐次边值问题.令

$$\alpha=\begin{pmatrix}\alpha_{1,1} & \alpha_{1,2}\\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2}\end{pmatrix}, \beta=\begin{pmatrix}\beta_{1,1} & \beta_{1,2}\\ \beta_{2,1} & \beta_{2,2}\end{pmatrix}$$

若算子 L 的伴随算子的齐次边值问题具有完全相同的形式，即方程是

$$L^{\dagger}v(x)=0, a<x<b$$

边界条件是

$$\begin{pmatrix}\alpha_{1,1} & \alpha_{1,2}\\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v(a)\\ v'(a)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\beta_{1,1} & \beta_{1,2}\\ \beta_{2,1} & \beta_{2,2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v(b)\\ v'(b)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$$

即齐次边界条件中的系数α和β不变.那么称这一齐次边值问题是自伴的[12].

证明，齐次边值问题为自伴的充要条件是，

$$p_2(b)\det\alpha = p_2(a)\det\beta$$

并证明，对于如下两种特殊的边界条件，这一条件总是满足的.一是未混合边界条件： $\alpha_{1,1}u(a)+\alpha_{1,2}u'(a)=0, \beta_{2,1}u(b)+\beta_{2,2}u'(b)=0$. 一是周期性边界条件：

$$y(a)=y(b), p_2(a)y'(a)=p_2(b)y'(b)$$

23. 证明，等距变换的三个定义式，(2.2.31)-(2.2.33)的两两之间都是互为充要条件的.

24. 证明：若一致收敛，则一定是逐点收敛的.若一致收敛，则一定是平均收敛的.

25. 证明：函数序列

$$f_n(x)=\frac{2\sqrt{n}}{(\pi/2)^{1/4}}nx\mathrm{e}^{-(nx)^2}$$

对所有 x 点逐点收敛于零，即

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=0$$

但不平均收敛于零，即

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|f_n(x)-0|^2\,\mathrm{d}x=1\neq 0$$

此例说明，逐点收敛不蕴含平均收敛.

26. 证明 2.3.1 小节中的定理 1.

27. 将贝塞尔完备性关系(2.3.8)用于函数 $f+\lambda g$ 并随后减去对于 f 和 g 的相应的等式，试用这种方法来证明希尔伯特空间中的帕赛瓦尔关系(2.3.9).第 9 题证明的

是有限维的情况，本题证明的是无限维的情况.

33. 证明：在$[-1,1]$区间上$T_n(x)$具有$n+1$个极值点如式(2.4.9)所示.

34. 从切比雪夫多项式的定义$T_n(x)=\cos(n\cos^{-1}x)$出发，

(1) 求特殊点的值：$T_n(1)=?\ T_n(-1)=?\ T_{2n+1}(0)=?\ T_{2n}(0)=?$

(2) 写出奇偶性关系，即$T_n(-x)$与$T_n(x)$的关系.

(3) 求出$T_n(x)$的零点的位置.

(4) 证明递推公式

$$T_{n+1}-2xT_n+T_{n-1}=0$$

$$(1-x^2)T_n'=nxT_n-nT_{n+1}$$

$$2(1-x^2)T_n'=n(T_{n-1}-T_{n+1})$$

$$2T_nT_m=T_{n+m}+T_{n-m}, n>m$$

35. 证明$T_n(x)$具有带权函数$\rho(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$的正交性：

$$\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,T_n(x)\,T_m(x)\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\,\delta_{nm}\,\varepsilon_m\text{，其中，}\varepsilon_0=2,\varepsilon_m=1,(m\geq 1).$$

38. 计算求和$\sum_{n=0}^{\infty}t^ne^{in\theta}$.将得到的结果两边取实数，从而证明以下公式：

$$\frac{1-xt}{1-2xt+t^2}=\sum_{n=0}^{\infty}T_n(x)t^n$$

此式称为切比雪夫多项式的母函数关系.

39. 证明：$|T_n'(x)|\leq n^2,-1\leq x\leq 1$.等号在何时成立？

附录 2A 数 e 不是一个有理数的证明

以下无穷级数之和得到的数记为 e，

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}=\mathrm{e} \tag{2A.1}$$

级数$\sum_{n=0}^{k}\frac{1}{n!}$是随 k 的增加而单调升的，并且在$k\to\infty$时趋于极限 e.

用反证法，设以下极限是个有理数，

$$\lim_{k\to\infty}\sum_{n=0}^{k}\frac{1}{n!}=\frac{p}{q} \tag{2A.2}$$

其中 p 和 q 都是正整数，并且总是可以设$q>2$.当 k 足够大时，$\left|\frac{p}{q}-\sum_{n=0}^{k}\frac{1}{n!}\right|$一定足够小.我们设

$$\left|\frac{p}{q}-\sum_{n=0}^{k}\frac{1}{n!}\right|<\frac{1}{4q!} \tag{2A.3}$$

只要取 k 足够大，这一点总是可以办到的.由于$\sum_{n=0}^{k}\frac{1}{n!}$是随 k 的增加而单调升，因此

$$0<\frac{p}{q}-\sum_{n=0}^{k}\frac{1}{n!}<\frac{1}{4q!}$$

此时两边乘以$q!$，并进行移项，得到

$$0<p(q-1)!-q!\sum_{n=0}^{q}\frac{1}{n!}<\frac{1}{4}+q!\sum_{n=q+1}^{k}\frac{1}{n!} \tag{2A.4}$$

此不等式的中间肯定是个正整数，右边可以如下来估计.

$$\frac{q!}{(q+1)!}+\frac{q!}{(q+2)!}+\cdots+\frac{q!}{k!}$$
$$<\frac{1}{q+1}+\frac{1}{(q+1)(q+2)}+\cdots+\frac{1}{(q+1)(q+2)\cdots(k-1)k}$$
$$<\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{3^{k-q}}<\frac{1}{2}$$

将这一结果代入(2A.4)，得到

$$0<\text{正整数}<\frac{3}{4}$$

出现矛盾，因为一个正整数不可能小于 3/4.因而，式(2A.2)中右边是个有理数的假设不正确.式(2A.1)的求和极限值 e 应该不是一个有理数.