Chapter 3

Ordinary Linear Differential Equations of Second Order

§3.1 二阶线性常微分方程的一般理论

3.1.1 解的存在唯一性定理

物理问题经常在数学上表现为二阶微分方程，可以是常微分方程或者偏微分方程.通常情况下，偏微分方程是通过分离变量法来分解为几个常微分方程的.因而，解决常微分方程是解决偏微分方程的基础.

定义 1 凡联系自变量 x，未知函数 y 及其某些导数或微分的方程，称为**常微分方程**，简称**微分方程**.

定义 2 微分方程中出现的未知函数的最高阶导数的阶数，称为**微分方程的阶**.

定义 3 如果在微分方程中，未知函数及其所出现的导数都没有二次以上的幂次，则称为**线性微分方程**，否则称为**非线性微分方程**.

在实际问题中，最常遇到的是二阶线性常微分方程.它的一般形状是

$$y''(x)+p(x)y'(x)+q(x)y(x)=f(x) \tag{3.1.1}$$

常称这种形式是**二阶线性常微分方程的标准型**.如果 $f(x)\equiv 0$，则称方程是**齐次的**；如果 $f(x)\neq 0$ 则称方程是**非齐次的**. 对于齐次方程

$$y''(x)+p(x)y'(x)+q(x)y(x)=0 \tag{3.1.2}$$

可以证明(解的存在唯一性定理)：对于以下的初值问题

$$\begin{cases} y''+p(x)y'+q(x)y=0 \\ y(x_0)=\alpha, y'(x_0)=\beta \end{cases} \tag{3.1.3}$$

其中 $x\in[a,b]$， x_0 在区间 $[a,b]$ 上，解存在且唯一.

我们不在此给出冗长的证明过程，只介绍证明的思路.令 $z=y'$ 之后，原方程就变成了如下的方程组.

$$\begin{cases} z'=-p(x)z-q(x)y \\ y'=z \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} y' \\ z' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -q(x) & -p(x) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}$$

这是一阶的齐次线性方程组.它与原方程等价.容易看出，与原方程等价的问题是，我们只要一般地证明下述初值问题的的解存在与唯一性就行了.

$$\begin{cases} y_1'=a_{11}(x)y_1+a_{12}(x)y_2 \\ y_2'=a_{21}(x)y_1+a_{22}(x)y_2 \\ y_1(x_0)=\alpha, y_2(x_0)=\beta \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \tag{3.1.4}$$

证明的过程是，先设两个初始函数 $y_{1,1},y_{2,1}$(可以取 $y_{1,1}=\alpha, y_{2,1}=\beta$)，代入(3.1.4)式的右边，经过积分后，左边得到两个新的函数 $y_{1,2},y_{2,2}$，把新的函数再代入(3.1.4)式的右边，又经过积分得到新的函数 $y_{1,3},y_{2,3}$，每一次的积分常数都用初值来定。如此下去，这样就得到了一函数序列 $\{y_{1,n},y_{2,n}\}$.然后证明这一函数序列是一致收敛于(3.1.4)的解的.这就是说，方程(3.1.4)一定是有解的，这就是解的存在性.由于这一函数序列是逐步逼近方程的解的，这一过程称为**逐步逼近法**.

要证明解的唯一性，就假设有两对函数 $y_1(x)$， $y_2(x)$ 和 $z_1(x)$， $z_2(x)$ 满足方

程(3.1.4)，那么令

$$u_1 = y_1 - z_1，\quad u_2 = y_2 - z_2$$

对于初值问题

$$\begin{cases} u_1' = a_{11}(x)u_1 + a_{12}(x)u_2 \\ u_2' = a_{21}(x)u_1 + a_{22}(x)u_2 \\ u_1(x_0) = 0, u_2(x_0) = 0 \end{cases} \tag{3.1.5}$$

其解一定为零，$u_1 = 0, u_2 = 0$.(可以这样来看，仍然运用逐步逼近法，现在的初始函数值 $u_{1,1} = \alpha = 0, u_{2,1} = \beta = 0$.)因而，$y_1 \equiv z_1, y_2 \equiv z_2$.我们把定理叙述如下.

定理 1(解的存在唯一性定理) 如果函数 $a_{ij}(x)$ $(i, j = 1,2)$ 在含 x_0 的某一区间 $[a,b]$ 上连续，则在该区间上，初值问题(3.1.4)有且只有一组解 $y_1 = y_1(x), y_2 = y_2(x)$.

由唯一性定理的证明过程，我们也可以把唯一性定理叙述为：如果有两个函数 y_1 和 y_2 都满足(3.1.2)且满足同样的初始条件，那么，这两个函数是相等的，$y_1 \equiv y_2$.本章附录 A 我们利用收缩算子的概念来证明(3.1.4)的解的存在唯一性.

对于高阶的齐次线性常微分方程，同样有初值问题的解的存在与唯一性定理.证明的思路也与二阶的情况一样，先化成一阶线性微分方程组，然后用逐次逼近法证明.

对于边值问题，可能有解，可能无解。这要根据边界条件来定。

我们先介绍齐次方程解的结构，然后给出非齐次方程解的表达式.

3.1.2 齐次方程解的结构

1. 基本解组

定义 4 设有两个函数 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$，如果存在两个不同时为零的常数 c_1 和 c_2，使得

$$c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) = 0 \tag{3.1.6}$$

在区间 $[a,b]$ 上恒成立，我们就说 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 是在区间 $[a,b]$ 上**线性相关**的.反之，如果只有当 c_1 和 c_2 同时为零，(3.1.6)式才成立，那么称这两个函数是**线性无关**的.线性无关也称作线性独立.例如 $\sin x$ 和 $\cos x$ 这两个函数就是线性无关的；x^2 和 x^3

两个函数也是线性无关的.线性无关的概念实际上在第二章介绍希尔伯特空间时已经介绍过了，这儿只是针对常微分方程两个解函数的情况重复了一遍.

根据上面的定义，如果函数 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 在区间$[a, b]$上线性相关，那么一定存在两个不同时为零的常数 c_1 和 c_2，使得(3.1.6)式在区间 $[a,b]$ 上成立.将(3.1.6)式微分一次，便得

$$c_1 y_1'(x) + c_2 y_2'(x) = 0 \tag{3.1.7}$$

定义 5 行列式

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} \tag{3.1.8}$$

称为由函数 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 构成的**朗斯基行列式**.类似地，可以定义 N 个函数的朗斯基行列式，它是由 N 个函数及其零次、一次至 $N-1$ 次的导数所构成.

如果线性方程组(3.1.6)和(3.1.7)有非零解 c_1 和 c_2，那么，系数行列式，也就是 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 构成的朗斯基行列式应该为零.

$$W(y_1, y_2) = 0 \tag{3.1.9}$$

这样，我们就得到以下的定理.

定理 2 若函数 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 线性相关，则它们的朗斯基行列式处处等于零.

必须指出，定理 2 的逆定理不成立.即若 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 的朗斯基行列式恒等于 0，这两个函数未必线性相关.例如

$$y_1(x) = \begin{cases} (x-1)^2, 0 \le x \le 1 \\ 0, 1 \le x \le 2 \end{cases} \qquad y_2(x) = \begin{cases} 0, 0 \le x \le 1 \\ (x-1)^2, 1 \le x \le 2 \end{cases}$$

这两个函数在 $[0, 2]$ 区间上是线性无关的，因为当恒等式

$$c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) = 0$$

在 $[0,1]$ 上成立时，可以推知 $c_1 = 0$；若上式在 $[1, 2]$ 上成立可得 $c_2 = 0$；故若上式在 $[0, 2]$ 上成立，只有 $c_1 = c_2 = 0$.但是他们的朗斯基行列式

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} (x-1)^2 & 0 \\ 2(x-1) & 0 \end{vmatrix} = 0, 0 \le x \le 1$$

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} 0 & (x-1)^2 \\ 0 & 2(x-1) \end{vmatrix} = 0, 1 \le x \le 2$$

即在$[0,2]$上$W(y_1,y_2)=0$.

那么在什么条件下，定理 2 的逆定理成立呢？请看下面的定理.

定理 3 设函数$y_1(x)$和$y_2(x)$都是方程(3.1.2)的解，如果$W(y_1,y_2)$在(a,b)中的某点等于 0，那么$y_1(x)$和$y_2(x)$在$[a,b]$上线性相关.

证明 事实上，如果在点x_0有$W(y_1(x_0),y_2(x_0))=0$，那么一定存在有一对不同时为零的数c_1和c_2，使得

$$c_1y_1(x_0)+c_2y_2(x_0)=0 \tag{3.1.10a}$$

$$c_1y_1'(x_0)+c_2y_2'(x_0)=0 \tag{3.1.10b}$$

考虑函数

$$y(x)=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)$$

由于$y_1(x)$和$y_2(x)$都是方程(3.1.2)的解，$y(x)$也是它的解.另一方面，由(3.1.10)式，$y(x)$满足

$$y(x_0)=0, y'(x_0)=0$$

也就是说，$y(x)$ 是满足初值问题(3.1.5)的，因此其解在(a,b)上恒等于零.即，在$[a,b]$上对不同时为零的数c_1和c_2，总有$y(x)=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)=0$.**证明完毕**.

由以上的证明过程，我们得到

推论 设$y_1(x)$和$y_2(x)$都是方程(3.1.2)的解，如果$y_1(x)$和$y_2(x)$线性相关，则$W(y_1,y_2)$处处为零，如果它们线性无关，则$W(y_1,y_2)$处处不为零.

如果$y_1(x)$和$y_2(x)$都是方程(3.1.2)的解，则朗斯基行列式还有下面这样一个重要的性质.把它对x求导，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}W(y_1,y_2)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} y_1' & y_2' \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1'' & y_2'' \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ -py_1'-qy_1 & -py_2'-qy_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ -py_1' & -py_2' \end{vmatrix}=-p\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}=-p(x)W(y_1,y_2)$$

其中，对n阶行列式的求导，就是分别对每一行求导得到一个行列式，然后对所有这些行列式求和.利用行列式的性质：把某行的倍数加到另一行上去，则行列式的值不变.还利用了原方程：

$$y_1''(x) = -p(x)y_1'(x) - q(x)y_1(x)$$

$$y_2''(x) = -p(x)y_2'(x) - q(x)y_2(x)$$

最后的结果是，W满足微分方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}W = -p(x)W$$

积分的结果为

$$W = W_0 \exp[-\int_{x_0}^{x} p(t)\mathrm{d}t] \tag{3.1.11}$$

其中$W_0 = W(x_0)$是朗斯基行列式在x_0点的值.

式(3.1.11)称为**刘维尔公式**.它给出了方程的系数和朗斯基行列式之间的关系.从此式也可以看出，一旦y_1和y_2在$[a,b]$上都是方程(3.1.2)的解，则在(a,b)范围内，如果W在某点为零，则它处处为零，如果W在某点不为零，则它处处不为零.

需要说明的是，1)定理 3 及其推论的适用区域是(a,b)，不包括端点.从习题 7 我们可以看到，有时候，满足同样边界条件的两个线性无关的解，朗斯基行列式在端点处的值也可以为零.2) 刘维尔公式(3.1.11)对于$p(x)$的奇点或者不可积分的点不适用，因而，定理 3 及其推论对于这样的点也不适用.

定理 4(齐次方程解的结构定理) 设$y_1(x)$和$y_2(x)$是方程(3.1.2)的一对线性无关的解，则对任意常数c_1和c_2，

$$y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) \tag{3.1.12}$$

也是方程(3.1.2)的解.反之，方程(3.1.2)的任意一个解也一定可以表成(3.1.12)的形式.

定义 6 如果$y_1(x)$和$y_2(x)$是方程(3.1.2)的一对线性无关的解，取两个彼此无关的常数c_1和c_2，构成表达式(3.1.13)，命c_1和c_2取各种可能的值时，就得到方程(3.1.2)的所有可能的解.表达式(3.1.13)称为方程(3.1.2)的**通解**.通解的表达式(3.1.13)中的$y_1(x)$和$y_2(x)$都叫做方程的**特解**.一对线性无关的特解$y_1(x)$和$y_2(x)$叫做**基本解组**.

现在的事情全部归结为求方程(3.1.2)的一个基本解组，或者是求两个线性无关的特解.可是，要真正找到一对线性无关的解，并没有什么一般的办法.

不过，若能用某种方法找到一个不恒等于零的特解$y_1(x)$，那么，就有可能通过积分的办法找到另一个与之线性独立的解$y_2(x)$.其方法如下.

设 $y_1(x)$ 是方程(3.1.2)的一个非零解，那么一定存在一个解 $y_2(x)$，使得 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 线性无关.这时由刘维尔公式有

$$y_1 y_2' - y_1' y_2 = c\exp[-\int p(t)\mathrm{d}t]$$

两边同除以 y_1^2

$$\frac{y_1 y_2' - y_1' y_2}{y_1^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{y_2}{y_1} = \frac{c}{y_1^2}\exp[-\int p(t)\mathrm{d}t]$$

积分之，得

$$y_2 = y_1 \int \mathrm{d}x \frac{c}{y_1^2} \exp\ [-\int p(x)\ \mathrm{d}x] + c_1 y_1 \tag{3.1.14}$$

这样，y_2 就通过 y_1 表示出来了.

式(3.1.14)也称为**刘维尔公式**.它给出了从一个特解求出另一个特解的普遍的方法.式(3.1.14)也表明这样一个事实：一旦求出一个 y_2 是与 y_1 线性无关的，那么 y_2 加上 y_1 的任意倍数后，仍然是与 y_1 线性无关的.于是，求解方程(3.1.2)的通解问题就归结到求它的一个非零特解.

例 1 求方程 $xy'' - y' = 0$ 的通解.

解答 容易看出，$y = 1$ 是它的一个特解，因而另一个与它线性无关的特解便可由刘维尔公式来找.

$$y'' - \frac{1}{x}y' = 0$$

$$y_2 = \int \mathrm{d}x \exp[\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x] = \frac{x^2}{2}$$

故这方程的通解为

$$y = c_1 + c_2\frac{x^2}{2}$$

3.1.3 非齐次方程的解

1. 通解的表达式

齐次方程(3.1.2)的解的结构了解清楚之后，我们现在可以来给出非齐次方程(3.1.1)的解.我们先叙述如下的定理.

定理 9 若 $w(x)$ 是非齐次方程(3.1.1)的一个特殊解，则对齐次方程(3.1.2)的任意解 $u(x)$，函数 $u(x)+w(x)$ 也是非齐次方程(3.1.1)的解.反之，方程(3.1.1)的任何一个解 $y(x)$ 都能表示成

$$y(x)=u(x)+w(x) \tag{3.1.17}$$

的形式.

证明 事实上，若 $u(x)$ 是(3.1.2)的解，将 $u(x)+w(x)$ 代入(3.1.1)，

$$\begin{aligned}&(u+w)''+p(u+w)'+q(u+w)\\&=u''+pu'+qu+w''+pw'+qw=0+f=f\end{aligned}$$

所以 $u(x)+w(x)$ 也是 (3.1.1)的解.

反之，设 $y(x)$ 是(3.1.1)的任意解，将 $y(x)-w(x)$ 代入(3.1.1)，

$$\begin{aligned}&(y-w)''+p(y-w)'+q(y-w)\\&=y''+py'+qy-w''-pw'-qw=f-f=0\end{aligned}$$

可见，函数 $u(x)=y(x)-w(x)$ 是齐次方程(3.1.2)的解.从而非齐次方程的任意解可写成(3.1.17)的形式.**证明完毕**.

因而，为了求得非齐次方程(3.1.1)的所有解，只要找到其一个特殊的解 $w(x)$，将它和齐次方程(3.1.2)的所有解相加.设 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 是(3.1.2)的一对线性无关的特解，那么在表达式中

$$y=c_1y_1+c_2y_2+w \tag{3.1.18}$$

命 c_1,c_2 取各种可能的常数值，就得到了(3.1.1)的全部解.式(3.1.18)称为(3.1.1)的**通解**，其中 w 称为(3.1.1)的一个**特解**.

2. 特解的表达式

从 3.2 节至第 4 章，我们会介绍对于一些具体的 $p(x),q(x)$，如何来求解齐次方程的一对线性无关的特解.此处我们假定 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 已经求出，写出特解

$w(x)$ 的表达式.

设 $w(x)$ 可以用 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ “线性组合”，写成以下形式.

$$w(x) = a_1(x)y_1(x) + a_2(x)y_2(x) \tag{3.1.19}$$

组合系数也是 x 的函数.式(3.1.19)显然是应该满足方程(3.1.1)的.现在有两个函数 $a_1(x), a_2(x)$ 是待求的，因此要有两个限制条件.为此，先将(3.1.19)求导一次.

$$w'(x) = a_1(x)y_1'(x) + a_2(x)y_2'(x) + a_1'(x)y_1(x) + a_2'(x)y_2(x)$$

我们先加一限制条件，令后两项之和为零：

$$a_1'(x)y_1(x) + a_2'(x)y_2(x) = 0 \tag{3.1.20}$$

那么就得到

$$w'(x) = a_1(x)y_1'(x) + a_2(x)y_2'(x) \tag{3.1.21}$$

将它再求导一次

$$w''(x) = a_1(x)y_1''(x) + a_2(x)y_2''(x) + a_1'(x)y_1'(x) + a_2'(x)y_2'(x) \tag{3.1.22}$$

将(3.1.19) (3.1.21)和(3.1.22)代入(3.1.1)，

$$w'' + pw' + qw = f$$

$$a_1(y_1'' + py_1' + qy_1) + a_2(y_2'' + py_2' + qy_2) + a_1'y_1' + a_2'y_2' = f$$

由于 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 是齐次方程的解，上式只剩下

$$a_1'(x)y_1'(x) + a_2'(x)y_2'(x) = f(x) \tag{3.1.23}$$

式(3.1.20)和(3.1.23)构成了求解 $a_1'(x), a_2'(x)$ 的线性方程组.由于 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 是线性无关的，其朗斯基行列式如(3.1.8)式,处处不为零.容易解得，

$$a_1'(x) = -\frac{y_2(x)f(x)}{W(y_1, y_2)}, a_2'(x) = \frac{y_1(x)f(x)}{W(y_1, y_2)}$$

积分之得，

$$a_1(x) = -\int \frac{y_2(x)f(x)}{W(y_1, y_2)}\mathrm{d}x, a_2(x) = \int \frac{y_1(x)f(x)}{W(y_1, y_2)}\mathrm{d}x$$

此处可不用考虑积分常数，反正我们只需要找到一个特解就行.故特解可写成

$$w(x) = -y_1(x)\int \frac{y_2(x)f(x)}{W(y_1, y_2)}\mathrm{d}x + y_2(x)\int \frac{y_1(x)f(x)}{W(y_1, y_2)}\mathrm{d}x \tag{3.1.24}$$

例 2 求方程 $xy'' - y' = x^2$ 的满足初始条件 $y(1) = 1, y'(1) = 1$ 的解.

解答 这个方程所对应的齐次方程的两个线性无关解已经在例 1 中求出为 1 和 $x^2/2$.其朗斯基行列式为

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x^2/2 \\ 0 & x \end{vmatrix} = x$$

套用公式(3.1.24)，注意原方程应该写成 $y'' - y'/x = x$，这样才能得到正确的 $f(x)$.

$$w(x) = -\int \frac{x^2 x}{2x} \mathrm{d}x + \frac{x^2}{2} \int \frac{x}{x} \mathrm{d}x = -\frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} x = \frac{x^3}{3}$$

于是原方程的通解为

$$y(x) = c_1 + c_2 \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$

由初始条件求出两个系数为 $c_1 = \dfrac{2}{3}, c_2 = 0$.故满足初始条件的解为

$$y(x) = \frac{2}{3} + \frac{x^3}{3}$$

非齐次方程另一种标准解法是格林函数方法，我们将在第六章中介绍.

§3.2 斯图姆-刘维尔型方程的特征值问题

3.2.1 斯图姆-刘维尔型方程的形式

现在把二阶线性常微分方程写成如下的含一个参数 λ 的形式：

$$A(x)y'' + B(x)y' + [\lambda - C(x)]y = 0, (a \le x \le b) \tag{3.2.1}$$

其中 $A(x)$、$B(x)$ 和 $C(x)$ 都是实函数，λ是一个常数.

定义

$$\rho(x) = \frac{1}{A(x)} \exp \int \frac{B(x)}{A(x)} \mathrm{d}x \tag{3.2.2}$$

和

$$p(x) = A(x)\rho(x) = \exp \int \frac{B(x)}{A(x)} \mathrm{d}x \tag{3.2.3}$$

这两个函数的求导为

$$\rho'(x) = -\frac{A'(x)}{A^2(x)}\exp\int\frac{B(x)}{A(x)}\mathrm{d}t + \frac{B(x)}{A^2(x)}\exp\int\frac{B(x)}{A(x)}\mathrm{d}x = -\frac{A'(x)}{A(x)}\rho(x) + \frac{B(x)}{A(x)}\rho(x)$$

$$p'(x) = A'(x)\rho(x) + A(x)\rho'(x)$$

$$= A'(x)\rho(x) + A(x)[-\frac{A'(x)}{A(x)}\rho(x) + \frac{B(x)}{A(x)}\rho(x)] = B(x)\rho(x)$$

给方程(3.2.1)两边的各项同乘以$\rho(x)$，则可把方程(3.2.1)化为如下形式：

$$\rho(x)A(x)y'' + \rho(x)B(x)y' + \rho(x)[\lambda - C(x)]y = 0$$

$$p(x)y'' + p'(x)y' + [\lambda\rho(x) - \rho(x)C(x)]y = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[p(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}] + [\lambda\rho(x) - q(x)]y = 0 \qquad (a \le x \le b) \tag{3.2.4}$$

其中

$$q(x) = C(x)\rho(x) \tag{3.2.5}$$

在区间$[a,b]$内连续.

定义 1 形如(3.2.4)的二阶微分方程称为**斯图姆-刘维尔(*S-L*)型方程**.其中的$p(x)$称为**核函数**，$\rho(x)$称为方程的正交函数系解的**权函数**.

如果我们定义一个算符 L(斯图姆-刘维尔算符)如下：

$$L = -A(x)\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} - B(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + C(x) = \frac{1}{\rho(x)}[-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}p(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + q(x)] \tag{3.2.6}$$

式(3.2.3)就成为如下的形式

$$Ly = \lambda y, \qquad (a \le x \le b) \tag{3.2.7}$$

下面定义带权$\rho(x)$的内积

$$(f,g) = \int_{-\infty}^{\infty} f^*(x)g(x)\rho(x)\mathrm{d}x \tag{3.2.8}$$

我们要求算符 L 是厄米算符，这是指

$$(Lf,g) = (f,Lg) \tag{3.2.9}$$

厄米算符就是自伴算符. 由于$A(x)$、$B(x)$和$C(x)$都是实函数，且微分算符已经写成(3.2.6)式最后的形式，由(2.2.23)式知，这已经是一个形式自伴算符.还要求满足的条件就是(2.2.25)式，

$$[p(x)(g(x)f^{*\prime}(x) - f^*(x)g'(x))]_a^b = [p(x)W(g,f^*)]_a^b = 0 \tag{3.2.10}$$

其中$W(g,f^*)$是函数g, f^*的朗斯基行列式.注意，由于(3.2.6)式中分母上有一因子$\rho(x)$，内积总是带权$\rho(x)$的.以后提到斯图姆-刘维尔算子(3.2.6)而不加说明时，

都是指自伴算子.

3.2.2 斯图姆-刘维尔方程的边界条件

可以对斯图姆-刘维尔方程求其通解.实际应用中，总是会加上边界条件.常见的有以下一些边界条件.

1. 三类齐次边界条件

第一类齐次边界条件

$$y(a)=0, y(b)=0 \tag{3.2.11}$$

第二类齐次边界条件

$$y'(a)=0, y'(b)=0 \tag{3.2.12}$$

第三类齐次边界条件

$$y(a)-hy'(a)=0\text{，}\quad y(b)+hy'(b)=0 \tag{3.2.13}$$

这是区间端点的函数值本身及其导数的线性组合，其中 h 是正常数.

也可以在 a, b 两点给出不同的齐次边界条件.如在 $x=a$ 点处给出第一类齐次边界条件， $x=b$ 点处给出第二类齐次边界条件.

上述三类边界条件可以概括写为

$$\alpha_1 y'(a)+\alpha_2 y(a)=0\text{，}\quad \beta_1 y'(b)+\beta_2 y(b)=0 \tag{3.2.14a}$$

其中 α_1， α_2， β_1， β_2 是实常数，且

$$\alpha_1^2+\alpha_2^2\neq 0\text{，}\quad \beta_1^2+\beta_2^2\neq 0 \tag{3.2.14b}$$

即 α_1 和 α_2 不同时为零，β_1 和 β_2 不同时为零.注意，由(3.2.13)式，应有：α_1 和 α_2 反号， β_1 和 β_2 同号.

2. 周期性边界条件

$$y(a)=y(b), y'(a)=y'(b) \tag{3.2.15a}$$

这要求函数 $p(x)$，$q(x)$，$\rho(x)$均为周期函数：

$$p(a)=p(b), q(a)=q(b), \rho(a)=\rho(b) \tag{3.2.15b}$$

3. 自然边界条件

如果在区间$[a,b]$的端点 a，有 $p(a)=0$，这时可从理论上证明，如果 $y_1(x)$， $y_2(x)$ 是方程(3.2.3)的两个线性无关的解， $\lim\limits_{x\to a} y_1(a)=$有限值 的话，则 $y_2(x)$ 必在

a 点附近无界.因此，当 $p(a)=0$ 时，为了保证符合物理实际的通解的有界性，就在通解上附加一个自然边界条件：

$$y(a)<\infty \text{，当 } p(a)=0 \tag{3.2.16a}$$

此时由于 $y(a)$ 有限且 $p(a)=0$，可以得到

$$[p(x)y(x)y'(x)]_{x=a}=0 \tag{3.2.16b}$$

同理，如果 $p(b)=0$，在 b 端加上自然边界条件：

$$y(b)<\infty \text{，当 } p(b)=0 \tag{3.2.17a}$$

此时由于 $y(a)$ 有限且 $p(b)=0$，可以得到

$$[p(x)y(x)y'(x)]_{x=b}=0 \tag{3.2.17b}$$

如果在两端 $p(a)=0$ 且 $p(b)=0$，则在两端均附加自然边界条件：$y(a)<\infty$ 且 $y(b)<\infty$.这样的条件常出现在方程的通解在区域端点为无穷大时的情况.

4. 一般情形

二阶微分方程最一般的边界条件是如下的形式.

$$B_1(y)=\alpha_{1,1}y(a)+\alpha_{1,2}y'(a)+\beta_{1,1}y(b)+\beta_{1,2}y'(b)=\gamma_1 \tag{3.2.18a}$$

$$B_2(y)=\alpha_{2,1}y(a)+\alpha_{2,2}y'(a)+\beta_{2,1}y(b)+\beta_{2,2}y'(b)=\gamma_2 \tag{3.2.18b}$$

其中 $B_1(y)$ 和 $B_2(y)$ 是表达式的简写形式.常见的是写成如下形式

$$B_1(y)=\gamma_1 \text{，} \quad B_2(y)=\gamma_2 \tag{3.2.18c}$$

文献上还有将这两式更进一步简写成

$$B(y)=\gamma \tag{3.2.18d}$$

当 γ_1,γ_2 都为零，即 $\gamma=0$，就是**齐次边界条件**.否则就是**非齐次边界条件**.以上列出的三类边界条件，周期边界条件和自然边界条件，分别是特殊的情况，也是解决实际问题时经常遇到的情况.除了以上这些边界条件，还可能有其它的边界条件.例如，对于振子振动的问题，经常给出初始时刻的振动位移和振动速度，这时给出的就是(3.1.3)式的初始条件.我们将上述或者其它的边界条件和初始条件统称为边界条件.

3.2.3 斯图姆-刘维尔特征值问题

定义 2 方程(3.2.3)与一定的边界条件一起构成**斯图姆-刘维尔特征值问题**.在此边界条件下，使得方程有非零解的参数λ的值称为方程的**特征值**.与特征值λ对应的解函数称为λ的**特征函数**.

1. 关于斯图姆-刘维尔特征值问题的定理

下述斯图姆-刘维尔的四个定理总结了这类特征值问题的共同性质，即特征值和特征函数的性质.

定理 1(存在定理) 如果在区间$[a,b]$上，$p(x)$及其导数连续，$q(x)$连续或者最多在边界上有一阶极点，则斯图姆-刘维尔特征值问题存在无限多个分立的实数特征值，它们构成一个单调递增数列，即

$$\lambda_1 \le \lambda_2 \le \lambda_3 \le \lambda_4 \le \cdots \le \lambda_n \le \lambda_{n+1} \le \cdots \tag{3.2.19}$$

相应于这无穷多个特征值有无穷多个特征函数

$$y_1(x), y_2(x), y_3(x), \cdots \tag{3.2.20}$$

它们称为特征函数族.如果区域是无限的并且是自然边界条件，那么，特征值可能是连续的.特征值的全体$\{\lambda_n\}$称为这一特征值问题的**谱**.

定义 3 特征值的全体$\{\lambda_n\}$称为这一特征值问题的**谱**.若$\{\lambda_n\}$是一系列分立的值，则称为**分立谱**；若为连续值，则称为**连续谱**.

定理 2(非负定理) 若(3.2.3)式中的$\rho(x) > 0, p(x) \ge 0, q(x) \ge 0$，所有的特征值均不为负，即

$$\lambda_n \ge 0, n = 1, 2, 3, \cdots \tag{3.2.21}$$

定理 3(正交性定理) 对应于不同特征值λ_m和λ_n的特征函数$y_m(x)$和$y_n(x)$在区间$[a,b]$上带权$\rho(x)$正交，即

$$\int_a^b y_m^*(x) y_n(x) \rho(x) \mathrm{d}x = 0 \tag{3.2.22}$$

定理 4(完备性定理) 特征函数族$\{y_n(x)\}$在区间$[a,b]$上构成一个完备系.任意一个具有一阶连续导数及至少分段连续二阶导数的函数$f(x)$，只要它满足特征值问题的边界条件，则一定可以按特征函数系$\{y_n(x)\}$展开为绝对一致收敛的级数，即

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n y_n(x) \tag{3.2.23}$$

式中的 f_n 称为展开系数.它们用如下的方法来确定.在(3.2.23)两边乘以 $\rho(x)$，在区间$[a,b]$上积分，利用(3.2.22)式，可得到

$$f_n = \frac{\int_a^b \rho(x) f(x) y_n^*(x) \mathrm{d}x}{\int_a^b \rho(x) |y_n(x)|^2 \,\mathrm{d}x} \tag{3.2.24}$$

式(3.2.23)的右边的级数称为**广义傅立叶级数**，f_n 叫做**广义傅里叶系数**.式(3.2.24)中，分母上的积分的平方根叫做 $y_n(x)$ 的**模**，记做 N_n，即

$$N_n^2 = \int_a^b \rho(x) |y_n(x)|^2 \,\mathrm{d}x \tag{3.2.25}$$

所以(3.2.24)式也可改写为

$$f_n = \frac{1}{N_n^2} \int_a^b \rho(x) f(x) y_n^*(x) \mathrm{d}x \tag{3.2.26}$$

如果特征函数 $y_n(x)$ 的模等于 1，$y_n(x)$ 就称为**规一化特征函数**.这时(3.2.26)又可化简为

$$f_n = \int_a^b \rho(x) f(x) y_n^*(x) \mathrm{d}x \tag{3.2.27}$$

若特征函数 $y_n(x)$ 除以模(这是常数),也就成了规一化的特征函数了.

在许多的情况下，定理 4 的条件可以适当放宽.把对函数 $f(x)$ 要求一阶连续导数及至少分段连续二阶导数，放宽成函数 $f(x)$ 是分段光滑的，(3.2.23)式的展开收敛至 $f(x)$ 的每一点的左右极限的平均值，

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n y_n(x) = \frac{1}{2}[f(x+0^+) + f(x-0^+)]$$

包括不连续点.对于具体的特征函数系，可参看本章后面 3.4 节的一些定理和第四章 4.7 节关于傅里叶-贝塞尔级数的定理.

3.2.4 斯图姆-刘维尔特征值问题举例

(1) 若 $p(x)=1$，$q(x)=0$，$\rho(x)=$常数，$a=0, b=l$，两端固定，则得

$$y'' + \lambda y = 0 \tag{3.2.34a}$$

$$y(0)=y(l)=0 \tag{3.2.34b}$$

特征值是$\lambda_n=(n\pi/l)^2$，特征函数是$y_n=\sin(n\pi x/l)$，是[0, l]上的一个正交完备系. 在两端固定的小振动问题中遇到，例如琴弦的振动.

(2) 若$p(x)=1$，$q(x)=0$，$\rho(x)=$常数，$a=0,b=l$，边界条件如下，

$$y''+\lambda y=0 \tag{3.2.35a}$$

$$y'(0)=0, y'(l)+\gamma y(l)=0 \tag{3.2.35b}$$

特征值是$\lambda_n=\mu_n{}^2$，其中μ_n是方程$-\mu\sin\mu l+\gamma\cos\mu l=0$的正根，特征函数是$y_n=\cos\mu_n x$，也是$[0,l]$上的一个正交完备系.此方程在研究有界杆上温度分布问题是遇到.

(3) 若$p(x)=x,\rho(x)=x,q(x)=\nu^2/x$，$a=0,b=R$，则成为

$$\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x})+(\lambda-\frac{\nu^2}{x^2})y=0 \qquad (0\le x\le R) \tag{3.2.36}$$

此方程称为ν阶贝塞尔方程或者ν阶柱函数方程.它的解称为ν阶贝塞尔函数或者ν阶柱函数.此方程在用柱坐标解决物理问题时经常遇到.

(4) 若$p(x)=x^2,\rho(x)=x^2,q(x)=\nu(\nu+1)$，$a=0,b=R$，则成为

$$\frac{1}{x^2}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(x^2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x})+[\lambda-\frac{\nu(\nu+1)}{x^2}]y=0 \tag{3.2.37}$$

此方程称为ν阶球贝塞尔方程.它的解称为ν阶球贝塞尔函数.在求解电磁波满足的亥姆霍兹方程时会遇到.

(5) 若$p(x)=1-x^2,\rho(x)=1,q(x)=0$，$a=-1,b=1$，则成为勒让德方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[(1-x^2)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}]+\lambda y=0 \qquad (-1\le x\le 1) \tag{3.2.38}$$

在求解例如均匀电场中的导体球外的电势时，得到此方程.

(6) 若$p(x)=1-x^2,\rho(x)=1,q(x)=m^2/(1-x^2)$，$a=-1,b=1$，则成为连带勒让德方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[(1-x^2)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}]+(\lambda-\frac{m^2}{1-x^2})y=0 \qquad (-1\le x\le 1) \tag{3.2.39}$$

此方程在求解角动量的特征方程时遇到.

(7) 若$p(x)=\mathrm{e}^{-x^2}$，$\rho(x)=\mathrm{e}^{-x^2}$，$q(x)=0$，$a=-\infty,b=\infty$，则成为厄米方程

$$\frac{1}{e^{-x^2}}\frac{d}{dx}(e^{-x^2}\frac{dy}{dx})+2\lambda y=0 \qquad (-\infty<x<\infty) \tag{3.2.40}$$

$$y''-2xy'+2\lambda y=0 \qquad (-\infty<x<\infty)$$

此方程在求解简谐振子的特征方程时遇到.

(8) 若 $p(x)=xe^{-x},\rho(x)=e^{-x},q(x)=0$， $a=0,b=\infty$，则成为拉盖尔方程

$$e^{x}\frac{d}{dx}(xe^{-x}\frac{dy}{dx})+\lambda y=0 \qquad (0\le x<\infty) \tag{3.2.41}$$

$$xy''+(1-x)y'+\lambda y=0 \qquad (-\infty<x<\infty)$$

此方程在求解氢原子的径向特征方程时遇到.

§3.3 斯图姆-刘维尔型方程的多项式解集

多项式是最简单的函数.前一章介绍过魏尔斯特拉斯定理，任何函数都可以用多项式一致逼近.因而，我们特别关注于多项式.现在我们来讨论斯图姆-刘维尔特征值问题的解是多项式的情况.即

$$y_n(x)=Q_n(x)=\sum_{i=0}^{n}c_ix^i \tag{3.3.1}$$

是 n 次多项式.此时的斯图姆-刘维尔特征值问题也称为**多项式的斯图姆-刘维尔系统**.

3.3.1 核函数和权函数的可能的形式

1. 可选择的参量

解是多项式，这就对于核函数和权函数的形式规定了特殊的要求.在(3.3.1)式中分别取 $n=0,1,2$ 再代入(3.2.1)式得到：

$$[\lambda_0-C(x)]Q_0=[\lambda_0-C(x)]c_0=0$$

$$B(x)Q_1'+[\lambda_1-C(x)]Q_1=B(x)c_1+[\lambda_1-C(x)](c_1x+c_0)=0$$

$$\begin{aligned}&A(x)Q_2''+B(x)Q_2'+[\lambda-C(x)]Q_2\\&=A(x)c_2+B(x)(2c_2x+c_1)+[\lambda-C(x)](c_2x^2+c_1x+c_0)=0\end{aligned}$$

由此可知，此时的 $A(x)$、 $B(x)$ 和 $C(x)$ 三个实函数应该具有如下形式：

$$A(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 \tag{3.3.2a}$$

$$B(x) = B_0 + B_1 x \tag{3.3.2b}$$

$$C(x) = C_0 \tag{3.3.2c}$$

由(3.3.2)可知多项式的斯图姆-刘维尔固有值问题的所有性质可用六个参数 $A_0, A_1, A_2, B_0, B_1, C_0$ 决定.显然，C_0 是可以归并到λ中去的.或者，我们可直接令 $C_0 = 0$.

$$(A_0 + A_1 x - A_2 x^2) y'' + (B_0 + B_1 x) y' + \lambda y = 0$$

这样，实际上是五个参量.但是对于式(3.2.6)定义的算符 L 由于以下原因存在 3 个自由度.

(i) 可使变量 x 位移常数α_2，于是$Q_n(x)$被$Q_n(x+\alpha_2)$代替，而特征值不变.

$$(A_0 - A_2 x^2) y'' + (B_0 + B_1 x) y' + \lambda y = 0$$

(ii) 变量 x 可以乘以常数α_3：$x \to \alpha_3 x$，于是$Q_n(x)$被换为$Q_n(\alpha_3 x)$而特征值保持不变.

$$(A_0 - A_0 x^2) y'' + (B_0 + B_1 x) y' + \lambda y = 0$$

(iii) 算符 L 可以被乘以一个常数α_1，它不改变Q_n而使特征值乘以α_1.

$$(1 - x^2) y'' + (B_0 + B_1 x) y' + \lambda y = 0$$

这样，有三个自由度是非本质的，并不是 5 个参数全都自由变化.完全自由的参数只有$5-3=2$个.以下可以随意规定其中的三个参量，只剩下两个参量是待定的即可.

以上的三个步骤，具体地说明了参量是可以减少三个的。一旦知道了实际上可变的参量只有两个，那么，其中有三个就是可随意来确定的了。上面的步骤中，我们实际上是这样来确定三个参量的：

$$A_0 = 1, A_1 = 0, A_2 = -1$$

其实，还可以有其它的选择方式，例如：

$A_0 = 1, A_1 = 1, A_2 = 0$；　$A_0 = 1, A_1 = 0, A_2 = 0$

等等。还有其它的方式也是可以的，只要觉得对于讨论问题方便的就行。

在算符 L 是厄米的条件(3.2.10)中，如果 f 和 g 都是多项式，那么，要求当 $x \to \infty$ 时，$p(x)$ 比 x 的任意次方的倒数都更快地趋于零.$B(x)=0$时，$p(x)$就是一个常数，就不满足这个要求.一个最简单的例子就是方程 $y''+y=0$，此方程的

两个线性无关的特解是 $y=\sin x$ 和 $y=\cos x$，当 $x\to\infty$ 时，y 都不能趋于零.当 $B(x)=$常数时，也不满足要求，见习题 9.因此 $B(x)$ 中 x 的一次项一定存在.

$A(x)$ 可以是 x 的二次函数，线性函数和常数.我们就分别按照这三种情况来讨论.

2. $A(x)$ 是二次的 此时有

$$p(x)=\exp\int\frac{B_0+B_1x}{A_0+A_1x+A_2x^2}\mathrm{d}x \tag{3.3.3}$$

i) $A(x)$ 存在复根.为方便取 $A_2=1$，设 ω 和 ω^* 是 $A(x)$ 的两个复根，则(习题 10)：

$$p(x)=[A(x)]^{B_1/2}\exp\left[\frac{B_0+B_1\operatorname{Re}\omega}{|\operatorname{Im}\omega|}\tan^{-1}\left(\frac{x-\operatorname{Re}\omega}{|\operatorname{Im}\omega|}\right)\right] \tag{3.3.4}$$

可以看出，$p(x)$ 永不为零，即当 $x\to\infty$ 时，$p(x)$ 不趋于零，所以不能满足端点要求.因此 $A(x)$ 复根的情形不予考虑.

ii) $A(x)$ 存在实根. 为方便，选参数使得 $A_2=1$ 且 $A(x)=1-x^2$，那么它的根是 $\omega=\pm1$.取 $B_0=s-r$ 和 $B_1=-(r+s+2)$.即，只有 r 和 s 两个参数是待定的.于是 ，

$$\frac{B(x)}{A(x)}=\frac{-(r+s+2)x+s-r}{1-x^2}=\frac{s+1}{1+x}-\frac{r+1}{1-x} \tag{3.3.5}$$

可以算得：

$$p(x)=(1+x)^{s+1}(1-x)^{r+1} \tag{3.3.6}$$

或

$$\rho(x)=(1+x)^s(1-x)^r \tag{3.3.7}$$

当 $|x|\to\infty$ 时，$p(x)$ 是不能比 x 的任意次方的倒数都更快地趋于零的.不过，若 $r>-1,s>-1$，则在 $x=1$ 和 $x=-1$ 处，$p(\pm1)=0$.如此，可以把 $[-1,1]$ 区间上 $\rho(x)$ 的表达式(3.3.7)与在此区间以外 $\rho(x)$ 为零的解连接起来.就符合要求了.

于是，得到符合要求的权函数是

$$\rho(x)=\begin{cases}(1+x)^s(1-x)^r,|x|\le1\\ 0,|x|>1\end{cases}\quad (r,s>-1) \tag{3.3.8}$$

此时，相应的解是多项式$Q_n(x)$，带有参数 r 和 s，称为指标 r，s 的**雅可比多项式**，用 $J_n^{(r,s)}(x)$ 来表示.它也称为**广义超球多项式**，用 $P_n^{(r,s)}(x)$ 来表示，特别地，当$r=s$时，$P_n^{(r,r)}(x)$称为**超球多项式**.

如果对算符 L，令 $x\to 1-2x$，

$1-x^2\to 1-(1-2x)^2=1-1+4x-4x^2=4x(1-x)$，

那么在 $[0,1]$区间内，$A(x)=x(1-x)$

$x\in[-1,1]\to x\in[0,1]$

$B(x)=-(r+s+2)x+r+1$则

$$\frac{B(x)}{A(x)}=\frac{-(r+s+2)x+r+1}{x(1-x)}=\frac{r+1}{x}-\frac{s+1}{1-x} \tag{3.3.9}$$

求得

$$p(x)=x^{r+1}(1-x)^{s+1} \tag{3.3.10}$$

对于$r,s>-1$，权重函数就是

$$\rho(x)=x^r\,(1-x)^s \tag{3.3.11}$$

这就是说，在区间$[-1,1]$上对于权重函数$\rho(x)=(1+x)^s(1-x)^r$与区间$[0,1]$上对于$\rho(x)=x^r(1-x)^s$的正交多项式的差别仅在于一个变量的线性变换.

现在来看定义在$[-1,1]$上的雅可比多项式的一些特殊情形,也就是r,s的的数值取一些特殊值的情形.我们只关注那些$r=s$的情形.那么由(3.3.5)看出 $B(x)=-2(r+1)x$，即$B_1=-2(r+1), B_0=0$.

容易看出，只要是$B_0=0$，则斯图姆-刘维尔算符 L 在变量置换$x\to -x$下是不变的.如果令 P 表示把 x 变成 $-x$ 的算子，则$PL=LP$.即任何 L 的特征函数可以同时选作 P 的特征函数.P 称为**宇称算子**，它在物理领域中起着重要的作用.

1) 对于$r=s=\mu(>-1)$，$\rho(x)=(1-x^2)^\mu$相应的多项式称为指标μ的**超球多项式**或**盖金堡尔多项式**，表示成$G_n^\mu(x)\equiv P_n^{(\mu,\mu)}(x)$.

2) 对于$r=s=-1/2$，$\rho(x)=(1-x^2)^{-1/2}$记$T_n(x)\equiv J_n^{(-1/2,-1/2)}(x)$，令$x=\cos\theta$，

由于在 $\theta\in[-\pi,\pi]$ 上，$T_n(\cos\theta)\propto\cos n\theta$，所以在 $[-1,1]$ 上以 x 为变量时，$T_n(x)\propto\cos(n\cos^{-1}x)$，这样的多项式就是**切比雪夫多项式**.

3) 对于 $r=s=0$，$\rho(x)=1$，则 $J_n^{(0,0)}(x)=P_n(x)$，称为**勒让德多项式**.

3. $A(x)$是一个线性函数

$A(x)$选择为 $A(x)=x$ 的形式.只保留 $B(x)$ 中的两个参量未定.于是

$$p(x)=\exp[\int\frac{B_0+B_1x}{x}\mathrm{d}x]=\exp(B_0\ln x+B_1x)=x^{B_0}\mathrm{e}^{B_1x} \tag{3.3.12}$$

若 $B_1<0$，则为满足无限远处的条件，$\rho(x)$必须选择为对所有 $x<a$ (a 待定)为零. 若 $B_0>0$ 则在 $x=0$ 处 $p(0)=0$，所以把 $x=0$ 作为连接点，则条件得到满足.(若 $B_1>0$，则 $p(x)$必须在正的 x 轴上为零，一般约定选取 $B_1<0$.)为方便取 $B_1=-1$.

取 $B_0=s+1, s>-1$，则对于正 x，

$$\rho(x>0)=x^s\mathrm{e}^{-x}; \tag{3.3.13}$$

对于负 x，$\rho(x\le 0)=0$. 对应于这种条件的 $Q_n(x)$ 称为**索宁多项式**，记为 $S_n^{\mu}(x)$. 如果 $s=m$ 取整数，就是 m 阶的**连带拉盖尔多项式**，记为 $L_n^m(x)$.若 $s=0$，则 $L_n^0(x)\equiv L(x)$ 称为**拉盖尔多项式**.

此时的定义区间是$[0,\infty)$，此区间不是关于原点对称的.因此，就不要求斯图姆-刘维尔算符 L 在 $x\to -x$ 变换下的不变性. B_0 就可以不为零.这样的方程和函数应该出现在涉及径向的方程中.例如二维极坐标和三维球坐标系的亥姆霍兹方程分离变量之后导致的径向方程.

4. $A(x)$是常数

那么，最简单地，选择 $A(x)=1$即可.于是

$$p(x)=\exp[\int(B_0+B_1x)\mathrm{d}x]=\mathrm{e}^{B_0x}\mathrm{e}^{B_1x^2/2}=\beta\exp[\frac{1}{2}B_1(x+\frac{B_0}{B_1})^2] \tag{3.3.14}$$

选择 $B_1<0$，则 $x\to\pm\infty$ 时，第二个因子更快地趋于 0.这样，总是满足无穷远处

的条件.为方便计，选择 $B_1=-2, B_0=0$， $\beta=1$.可得

$$\rho(x)=\mathrm{e}^{-x^2}, \tag{3.3.15}$$

对应的 $Q_n(x)$ 是**厄米多项式**.

此时定义区间是关于原点对称的. $B_0=0$，也就符合斯图姆-刘维尔算符 L 在 $x\to -x$ 变换下的不变性.

表 3.1 斯图姆-刘维尔正交多项式完备集及有关参量.

$A(x)$	A_0	A_1	A_2	B_0	B_1	权函数 $\rho(x)$	适用区间	多项式名称 特征值 λ_n
是 x 的二次函数	1	0	–1	$s-r$	$-(r+s+2)$	$(1-x)^r(1+x)^s$	$[-1,1]$	广义超球 $n(n+r+s+1)$
	0	1	–1	$r+1$	$-(r+s+2)$	$x^r(1-x)^s$	$[0,1]$	雅可比 $n(n+r+s+1)$
	1	0	–1	0	$-2(\mu+1)$	$(1-x^2)^\mu$	$[-1,1]$	盖金堡尔 $n(n+2\mu+1)$
	1	0	–1	0	–1	$(1-x^2)^{-1/2}$	$[-1,1]$	切比雪夫 n^2
	1	0	–1	0	–2	1	$[-1,1]$	勒让德 $n(n+1)$
是 x 的线性函数	0	1	0	$\mu+1$	–1	$x^\mu \mathrm{e}^{-x}$	$[0, \infty)$	索宁 n
	0	1	0	$m+1$	–1	$x^m \mathrm{e}^{-x}$	$[0, \infty)$	连带拉盖尔 $n(\geq m)$
	0	1	0	1	–1	e^{-x}	$[0, \infty)$	拉盖尔 n
常数	1	0	0	0	–2	e^{-x^2}	$(-\infty,\infty)$	厄米 $2n$

其中， $r,s>-1$，m 和 n 是自然数，μ可以是不等于负整数的任意实数或者复数.

一旦给出了一个权函数，那么，对应的多项式就原则上可以全都计算出来。我们只要运用多项式的带权正交归一化的公式：

$$\int_a^b \mathrm{d}x Q_m^*(x)Q_n(x)\rho(x)=\delta_{mn} \tag{A}$$

从 n=0 开始，按照 n=0,1,2,……的顺序来逐个求出 $Q_n(x)$。

以厄米多项式为例，权函数和区间见表 3,1 最后一行。

n=0，设 $Q_0(x)=c$。是常数。代入式(A)。

$$\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x Q_0(x)Q_0(x)\rho(x)=c^2\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\mathrm{e}^{-x^2}=c^2\sqrt{\pi}=1$$

$$c=\frac{1}{\pi^{1/4}}$$

n=1，设 $Q_1(x)=a_0+a_1x$。是常数。代入式(A)。

$$\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}xQ_1(x)Q_0(x)\rho(x)=c\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\mathrm{e}^{-x^2}(a_0+a_1x)=a_0c=0$$

$$a_0=0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}xQ_1(x)Q_1(x)\rho(x)=a_1^2\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\mathrm{e}^{-x^2}x^2=a_1^2(-\frac{\partial}{\partial\alpha}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\mathrm{e}^{-\alpha x^2})_{\alpha=1}$$

$$=a_1^2(-\frac{\partial}{\partial\alpha}\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\alpha}})_{\alpha=1}=a_1^2(\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\alpha}^3})_{\alpha=1}=a_1^2\frac{\sqrt{\pi}}{2}=1$$

$$a_1=\frac{\sqrt{2}}{\pi^{1/4}}$$

n=2，设 $Q_2(x)=a_0+a_1x+a_2x^2$。是常数。代入式(A)。

$$\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}xQ_2(x)Q_0(x)\rho(x)=0;\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}xQ_2(x)Q_1(x)\rho(x)=0;\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}xQ_2(x)Q_2(x)\rho(x)=1$$

利用此三式，可求解出三个数 a_0,a_1,a_2。等等，依此类推，原则上，可求出任何有限 n 的 $Q_n(x)$。

3.3.2 多项式的级数表达式和微商表示

1. 多项式的级数表达式

斯图姆-刘维尔多项式的级数表达式见表 3.2.

表 3.2 斯图姆-刘维尔多项式的级数表达式.

多项式名称	级数表达式
广义超球多项式	$P_n^{(r,s)}(x)=(r+1)_n\sum_{k=0}^{n}\frac{(r+s+1+n)_k}{k!(n-k)!(r+1)_k}(\frac{x-1}{2})^k$
雅可比多项式	$J_n^{(r,s)}(x)=\frac{(s-r-n)_n}{(s)_n}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k n!(r+n)_k}{k!(n-k)!(1+r-s)_k}(1-x)^k$
盖金堡尔多项式	$G_n^{\mu}(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(n-k-1)!!}{k!(n-2k)!}\frac{(2\mu)_{n+k}}{(\mu+1/2)_k}(\frac{x-1}{2})^k$
切比雪夫多项式	$T_0(x)=1$， $T_n(x)=\frac{n}{2}\sum_{k=0}^{[n/2]}(-1)^k\frac{(n-k-1)!}{k!(n-2k)!}(2x)^{n-2k}$，　$(n\geq1)$

勒让德 多项式	$P_n(x)=\sum_{k=0}^{[n/2]}\frac{(-1)^k(2n-2k)!}{2^n k!(n-k)!(n-2k)!}x^{n-2k}$
索宁 多项式	$S_n^{\mu}(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!(n-k)!}\frac{(\mu+1)_n}{(\mu+1)_k}x^k$
连带拉盖尔 多项式	$L_n^{(m)}(x)=\sum_{k=0}^{n-m}\frac{(-1)^{m+k}(n!)^2}{k!(m+k)!(n-m-k)!}x^k$
拉盖尔 多项式	$L_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k(n!)^2}{(k!)^2(n-k)!}x^k$
厄米 多项式	$H_n(x)=\sum_{k=0}^{[n/2]}\frac{(-1)^k n!}{k!(n-2k)!}(2x)^{n-2k}$

表 3.2 中的符号如下.

$$\left[\frac{l}{2}\right]=\begin{cases}l/2, & l\text{为偶数}\\ (l-1)/2, & l\text{为奇数}\end{cases}$$

令

$$(\alpha)_k=\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+k-1)=\frac{\Gamma(\alpha+k)}{\Gamma(\alpha)}，\ (\alpha)_0=1 \tag{3.3.16a}$$

$(\alpha)_k$ 称为高斯符号.若 $\alpha=n$ 是整数，

$$(n)_k=n(n+1)\cdots(n+k-1)=\frac{(n+k-1)!}{(n-1)!} \tag{3.3.16b}$$

$\Gamma(\alpha)$ 函数的定义是

$$\Gamma(z)=\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-t}t^{z-1}\mathrm{d}t, \mathrm{Re}\,z>0 \tag{3.3.17}$$

其中 z 是复数.

2. 广义洛巨格公式

斯图姆-刘维尔系统的多项式解可由广义洛巨格公式来统一地表达：

$$Q_n(x)=K_n\frac{1}{\rho(x)}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}[A^n(x)\rho(x)] \tag{3.3.18}$$

其中常数 K_n 的选择取决于物理上的应用.这个解是正交的多项式.这样我们就要证明三点，第一要证明这个 $Q_n(x)$的表达式是多项式，并且最高次数为 n；第二要证明正交性；第三要证明它是多项式的斯图姆-刘维尔系统的解.我们省略这一

证明过程.

将表 3.1 中的各 $A(x)$和相应的权函数$\rho(x)$代入(3.3.18)式，得到各种情况的洛巨格公式列于表 3.3.

表 3.3 斯图姆-刘维尔多项式解的洛巨格公式.

广义洛巨格公式$Q_n(x)$	$K_n \dfrac{1}{\rho(x)} \dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}[A^n(x)\rho(x)]$
广义超球多项式$P_n^{(r,s)}(x)$	$\dfrac{(-1)^2}{2^n n!}(1-x)^{-r}(1+x)^{-s} \dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}[(1-x)^{n+r}(1+x)^{n+s}]$
雅可比多项式$J_n^{(r,s)}(x)$	$\dfrac{x^{1-s}(1-x)^{s-r}}{(s)_n} \dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}[x^{n+s-1}(1+x)^{n+r-s}]$
盖金堡尔多项式$G_n^{\mu}(x)$	$\dfrac{(-1)^n(\mu+1)_n}{2^n n!(\mu)_n}(1-x^2)^{-\mu} \dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(1-x^2)^{n+\mu}$
切比雪夫多项式$T_n(x)$	$\dfrac{(-1)^n}{(2n-1)!!}(1-x^2)^{1/2} \dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(1-x^2)^{n-1/2}$
勒让德多项式$P_n(x)$	$\dfrac{(-1)^n}{2^n n!} \dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(1-x^2)^n$
索宁多项式$S_n^{\mu}(x)$	$\dfrac{1}{n!}x^{-\mu}\mathrm{e}^x \dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^{n+\mu}\mathrm{e}^{-x})$
连带拉盖尔多项式$L_n^m(x)$	$\dfrac{(-1)^n n!}{(n-m)!}\mathrm{e}^x \dfrac{\mathrm{d}^{n-m}}{\mathrm{d}x^{n-m}}(x^n\mathrm{e}^{-x})$
拉盖尔多项式$L_n(x)$	$\mathrm{e}^x \dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^n\mathrm{e}^{-x})$
厄米多项式$H_n(x)$	$(-1)^n\mathrm{e}^{x^2} \dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\mathrm{e}^{-x^2}$

其中，$r,s>-1$，m 和 n 是自然数，μ可以是不等于负整数的任意实数或者复数.

式(3.3.18)也称为多项式解 $Q_n(x)$的微商表示.不过，并不是只有多项式解才有微商表示.在下一节中，我们还会介绍一些与多项式的斯图姆-刘维尔系统有关的一些方程和函数.它们不是多项式解，但是也有相应的微商表示.只是不能写成(3.3.18)式那样统一的表达式，因为前面已经证明了(3.3.18)式一定是个多项式.现在将相应的微商表示列于表 3.4.

表 3.4 与多项式的斯图姆-刘维尔系统有关的一些解的微商表示.

$Q_n(x)$	微商表示
第二类 切比雪夫函数 $U_n(x)$	$\dfrac{(-1)^{n-1}n}{(2n-1)!!}\dfrac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}x^{n-1}}(1-x^2)^{n-1/2}$
第二类 切比雪夫多项式 $U_n^*(x)$	$\dfrac{(-1)^{n-1}(n+1)}{(2n+1)!!\sqrt{1-x^2}}\dfrac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}x^{n-1}}(1-x^2)^{n+1/2}$
第一类 连带勒让德函数 $P_l^m(x)$	$\dfrac{(-1)^l}{2^l l!}(1-x^2)^{m/2}\dfrac{\mathrm{d}^{l+m}}{\mathrm{d}x^{l+m}}(1-x^2)^l$
第一类 韦伯-厄米函数 $\Psi_n(x)$	$(-1)^n\mathrm{e}^{x^2/2}\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\mathrm{e}^{-x^2}$
韦伯函数 (抛物柱函数) $D_n(x)$	$(-1)^n\mathrm{e}^{x^2/4}\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\mathrm{e}^{-x^2/2}$

其中，$r,s>-1$，m 和 n 是自然数.

3.3.3 母函数关系

定义 1 设函数 $f(t)$ 在 $t=0$ 的某邻域内可展开为收敛的幂级数

$$f(t)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n t^n$$

则称 $f(t)$ 是序列 $\{a_n\}$ 的**母函数**，也称**普通生成函数**，简称**普生成函数**.如果有一个函数 $g(t)$ 可以展开成以下收敛级数的形式：

$$g(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n!}t^n$$

则称 $g(t)$ 是序列 $\{a_n\}$ 的**指数生成函数**，简称**指生成函数**.

定义 2 设 $\{Q_n(x)\}$ 是某一函数序列，如果有一个二元函数 $F(x,t)$ 在 (x,t) 空间的某个邻域内可以展开成以下关于 x,t 收敛的级数的形式：

$$F(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}Q_n(x)t^n \tag{3.3.34}$$

则称 $F(x,t)$ 是函数序列 $\{Q_n(x)\}$ 的**母函数**，也称**普通生成函数**，简称**普生成函数**.

如果有一个二元函数 $G(x,t)$ 可以展开成以下关于 x,t 收敛的级数的形式：

$$G(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{Q_n(x)}{n!}t^n \tag{3.3.35}$$

则称 $G(x,t)$ 是函数序列 $\{Q_n(x)\}$ 的**指数生成函数**，简称**指生成函数**.式(3.3.34)和(3.3.35)都称为 $\{Q_n(x)\}$ 的**母函数关系**.

母函数关系对于推导一些递推公式是非常有用的.

我们把后几节要讲到的一些函数的母函数列于表 3.5 和表 3.6 中.从这两个表中可以明显看出以下一些关系.在盖金堡尔多项式 $G_n^m(x)$ 中取 $m=1/2$ 就得到勒让德多项式 $P_n(x)$，$P_n(x)=G_n^{1/2}(x)$，这一点与表 3.1 是一致的;连带勒让德函数 $P_n^m(x)$ 中取 $m=0$ 就得到勒让德多项式 $P_n(x)$， $P_n(x)=P_n^0(x)$.

表 3.5 一些函数的普生成函数

母函数的展开系数 $Q_n(x)$	母函数 $G(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}Q_n(x)t^n$
广义超球多项式 $P_n^{(r,s)}(x)$	$2^{r+s}\dfrac{(1-t+x)^{-r}(1+t+x)^{-s}}{x}$
盖金堡尔多项式 $G_n^{\mu}(x)$	$\dfrac{2^{\mu}\Gamma(\mu+1/2)}{(1-2xt+t^2)^{\mu+1/2}\sqrt{\pi}}$
切比雪夫多项式 $T_n(x)$	$\dfrac{1-xt}{1-2xt+t^2}$
第二类 切比雪夫函数 $U_{n+1}(x)$	$\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{1-2xt+t^2}$
第二类 切比雪夫多项式 $U_n^*(x)$	$\dfrac{1}{1-2xt+t^2}$

勒让德多项式 $P_n(x)$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}}$
第一类 连带勒让德函数 $P_n^m(x)$	$\dfrac{(2m-1)!!(1-x^2)^{m/2}}{(1-2xt+t^2)^{m+1/2}}$
索宁多项式 $S_n^{\mu}(x)$	$\dfrac{1}{(1-t)^{\mu+1}}\exp(-\dfrac{xt}{1-t})$

表 3.6 一些函数的指生成函数

母函数的展开系数 $Q_n(x)$	母函数 $F(x,t)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{Q_n(x)}{n!}t^n$
雅克比多项式 $(s)_n J_n^{(r,s)}(\dfrac{1-x}{2})$	$\dfrac{2^{r-1}(1-t+\sqrt{1-2xt+t^2})^{1-s}}{(1+t+\sqrt{1-2xt+t^2})^{r-s}}$
拉盖尔多项式 $L_n(x)$	$\dfrac{1}{1-t}\exp(-\dfrac{xt}{1-t})$
厄米多项式 $H_n(x)$	$\exp(2xt-t^2)$
第一类 韦伯-厄米函数 $\Psi_n(x)$	$\exp(2xt-t^2-x^2/2)$
韦伯函数(抛物柱函数) $D_n(x)$	$\exp(2xt-t^2-x^2/4)$
半奇数阶贝塞尔函数 $J_{n-1/2}(x)$	$\sqrt{\dfrac{2}{\pi x}}\cos\sqrt{x^2-2xt}$
半奇数阶贝塞尔函数 $(-1)^n J_{-n+1/2}(x)$	$\sqrt{\dfrac{2}{\pi x}}\sin\sqrt{x^2-2xt}$
第一类球贝塞尔函数 (球贝塞尔函数) $j_{n-1}(x)$	$\dfrac{1}{x}\cos\sqrt{x^2-2xt}$
第二类球贝塞尔函数 (诺依曼函数) $y_{n-1}(x)$	$\dfrac{1}{x}\sin\sqrt{x^2-2xt}$

还有这样的情况：函数序列的母函数既不是普生成函数也不是指生成函数，例如连带拉盖尔多项式和第二类勒让德函数.还有，整数阶贝塞尔函数和变形贝塞尔函数的母函数展开之后，求和关系是从 $-\infty$ 至 $+\infty$.这些母函数关系都未列入表 3.5 和表 3.6 中.

§3.4 与多项式的斯图姆-刘维尔系统有关的方程和函数

我们已经看到，一旦要求斯图姆-刘维尔方程(3.2.1)的解是多项式，那么 $A(x)$ 和 $B(x)$ 的系数已在表 3.1 中列出. $A(x)$ 和 $B(x)$ 的系数如表 3.1 确定之后，就求得特征值以及对应的多项式特解.不过，斯图姆-刘维尔方程还可以有一个与多项式线性无关的解，因为我们已经在 §3.1 节中说明了，二阶常微分方程可以有一对线性无关的特解.既然一个已经是多项式的，另一个就应该是非多项式的解.原则上，非多项式的特解可以从多项式的特解利用刘维尔公式(3.1.14)得到.

这两个线性无关的特解的线性组合构成该特征值的通解，将通解代入边界条件，得到线性组合的系数的值.

对于多项式的斯图姆-刘维尔方程求导若干次以后，所得到方程就不属于多项式系统了，有些被称为连带方程.既然连带方程是由多项式的斯图姆-刘维尔型方程求导若干次以后得到的，它的特征函数一般就比较容易求得.

本节我们简要介绍拉盖尔函数，勒让德函数、切比雪夫函数和厄米函数.

3.4.1 拉盖尔函数

1. 索宁多项式(广义拉盖尔多项式)

方程

$$xy'' + (\mu+1-x)y' + \lambda y = 0, (0 \le x \le \infty) \tag{3.4.1}$$

称为**广义拉盖尔方程**.μ可以是不等于负整数的任意实数或者复数.当满足以下边界条件

$$y(x=0) < \infty\text{，}\quad y(x=+\infty) \sim x^n \tag{3.4.2}$$

时，特征值为

$$\lambda = n, (n = 0,1,2,\cdots). \tag{3.4.3}$$

特征函数用洛巨格公式表示如下：

$$S_n^\mu(x) = \frac{1}{n!} x^{-\mu} \mathrm{e}^x \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^{n+\mu}\mathrm{e}^{-x}) \tag{3.4.4}$$

这是一个 n 次的多项式，称为**索宁多项式**，又称为**广义拉盖尔多项式**，记为 $S_n^\mu(x)$. 式(3.4.4)列于表 3.3.

索宁多项式的级数表达式是

$$S_n^\mu(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!(n-k)!} \frac{(\mu+1)_n}{(\mu+1)_k} x^k \tag{3.4.5}$$

列于表 3.2.

索宁多项式的母函数关系是

$$\frac{1}{(1-t)^{\mu+1}}\exp\left(-\frac{xt}{1-t}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}S_n^{\mu}(x)t^n \tag{3.4.6}$$

这一母函数列于表 3.5.

索宁多项式的规一化系数是

$$\int_0^{\infty}\mathrm{d}x x^{\mu}\mathrm{e}^{-x}\,|\,S_n^{\mu}(x)|^2=\frac{\Gamma(\mu+n+1)}{n!} \tag{3.4.7}$$

索宁多项式具有以下加法公式.

$$S_n^{\mu+\nu+1}(x+y)=\sum_{k=0}^{n}S_k^{\mu}(x)S_{n-k}^{\nu}(y)$$

方程(3.4.1)的另一个特解可由刘维尔公式得到.

2. 拉盖尔多项式

在(3.4.1)中取 $\mu=0$，

$$xy''+(1-x)y'+\lambda y=0 \tag{3.4.8}$$

称为**拉盖尔方程**.它在(3.4.2)的边界条件下，特征值是(3.4.3)式，特征函数是**拉盖尔多项式**，记为 $L_n(x)$，用洛巨格公式表示如下：

$$L_n(x)=\mathrm{e}^{x}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^n\mathrm{e}^{-x}) \tag{3.4.9}$$

这是一个 n 次的多项式.式(3.4.9)列于表 3.3.

拉盖尔多项式的级数表达式是

$$L_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k(n!)^2}{(k!)^2(n-k)!}x^k \tag{3.4.10}$$

虽然拉盖尔方程(3.4.8)是在广义拉盖尔方程(3.4.1)中取 $\mu=0$ 得到的，可是特征函数拉盖尔多项式并不是简单地在索宁多项式中取 $\mu=0$.比较(3.4.5)和(3.4.10)可知，

$$L_n(x)=n!S_n^0(x) \tag{3.4.11}$$

盖尔多项式的母函数关系是

$$\frac{1}{1-t}\exp\left(-\frac{xt}{1-t}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{L_n(x)}{n!}t^n \tag{3.4.12}$$

这一母函数式列于表 3.6.式(3.4.11)右边有一因子，使得拉盖尔多项式的母函数是指生成函数，而索宁多项式的母函数是普生成函数.

由(3.4.7)和(3.4.11)式知，拉盖尔多项式的规一化系数如下.

$$\int_0^\infty \mathrm{d}x\mathrm{e}^{-x}\,|L_n(x)|^2=(n!)^2$$

方程(3.4.8)的另一个特解可由刘维尔公式得到.

3. 连带拉盖尔多项式

对于拉盖尔方程(3.4.8)求导 m 次可得到**连带拉盖尔方程**

$$xy''+(m+1-x)y'+(\lambda-m)y=0 \tag{3.4.13}$$

$$(xy'')'+((1-x)y')'+\lambda y'=xy'''+(1+1-x)y''+(\lambda-1)y'=0$$
$$y'=z\Rightarrow xz''+(2-x)z'+(\lambda-1)z=0$$
……
$$(xy'')^{(m)}+((1-x)y')^{(m)}+\lambda y^{(m)}=xy^{(m+2)}+(m+1-x)y^{(m+1)}+(\lambda-m)y^{(m)}=0$$
$$y^{(m)}=z\Rightarrow xz''+(m+1-x)z'+(\lambda-m)z=0$$

其中 m 是正整数且 $0\le m\le n$.当满足以下边界条件

$$y(x=0)<\infty\,,\quad y(x\to+\infty)\sim x^{n-m} \tag{3.4.14}$$

时，特征值为

$$\lambda=n,(n=m,m+1,m+2,\cdots)\,. \tag{3.4.15}$$

特征函数用洛巨格公式表示如下：

$$L_n^{(m)}(x)=(-1)^m\frac{n!}{(n-m)!}x^{-m}\mathrm{e}^x\frac{\mathrm{d}^{n-m}}{\mathrm{d}x^{n-m}}(x^n\mathrm{e}^{-x}) \tag{3.4.16}$$

这是一个 $n-m$ 次的多项式，称为**连带拉盖尔多项式**.式(3.4.16)列于表 3.3.

连带拉盖尔多项式的级数表达式是

$$L_n^{(m)}(x)=\sum_{k=0}^{n-m}\frac{(-1)^{m+k}(n!)^2}{k!(m+k)!(n-m-k)!}x^k \tag{3.4.17}$$

列于表 3.2.

连带拉盖尔多项式的母函数关系是

$$\frac{(-1)^m}{(1-t)^{m+1}}\exp(-\frac{xt}{1-t})=\sum_{n=m}^{\infty}L_n^{(m)}(x)t^{n-m} \tag{3.4.18}$$

这一关系未列入母函数关系表中.

定理 1 若 $f(x)$ 在 $(0,\infty)$ 上任一有限区间上分段光滑，则

$$\sum_{n=0}^{\infty}c_nL_n^{(m)}(x)=\frac{1}{2}[f(x+0^+)+f(x-0^+)]$$

其中

$$c_n=\frac{n!}{\Gamma(n+m+1)}\int_0^\infty x^m\mathrm{e}^{-x}L_n^{(m)}(x)f(x)\mathrm{d}x$$

连带拉盖尔方程(3.4.13)是从拉盖尔方程(3.4.8)对 x 求导 m 次得到的.恰好，方程的解连带拉盖尔多项式也可以从拉盖尔多项式对 x 求导 m 次得到，即有以下关系式：

$$L_n^{(m)}(x)=\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}L_n(x) \tag{3.4.19}$$

在连带拉盖尔方程(3.4.13)中取 $m=0$ 时就回到拉盖尔方程(3.4.8).在连带拉盖尔多项式中取 $m=0$ 时就回到拉盖尔多项式，$L_n^{(0)}(x)=L_n(x)$.

连带拉盖尔多项式与索宁多项式之间有关系式

$$L_n^{(m)}(x)=(-1)^m n!S_{n-m}^m(x) \tag{3.4.20a}$$

或者

$$L_{n+m}^{(m)}(x)=(-1)^m (n+m)!S_n^m(x) \tag{3.4.20b}$$

广义拉盖尔方程、拉盖尔方程和连带拉盖尔方程，它们的另一个线性无关的解都属于合流超几何函数.

拉盖尔方程在求解氢原子的径向特征函数的方程时遇到.

3.4.2 勒让德函数

1. 勒让德多项式

方程：

$$(1-x^2)y''-2xy'+\lambda y=0 \tag{3.4.21}$$

称为**勒让德方程**.当满足以下边界条件

$$y(x=\pm 1)<\infty \tag{3.4.22}$$

时，特征值为

$$\lambda=l(l+1),(l=0,1,2,\cdots). \tag{3.4.23}$$

用特征值代入勒让德方程后，

$$(1-x^2)y''-2xy'+l(l+1)y=0 \tag{3.4.24}$$

它称为 ***l* 阶勒让德方程**，其特征函数用洛巨格公式表示如下：

$$P_l(x)=\frac{(-1)^l}{2^l l!}\frac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{d}x^l}(1-x^2)^l \tag{3.4.25}$$

这是一个 l 次的多项式，称为**勒让德多项式**.式(3.4.25)列于表 3.3.

勒让德多项式的级数表达式是

$$P_l(x)=\sum_{k=0}^{[l/2]}(-1)^k\frac{(2l-2k)!}{2^l k!(n-k)!(l-2k)!}x^{l-2k} \tag{3.4.26}$$

列于表 3.2.

勒让德多项式的母函数关系

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}}=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)t^n,\quad t<1 \tag{3.4.27}$$

这一母函数列于表 3.5. 勒让德多项式 $P_l(x)$ 也称为**第一类勒让德函数**.

这一母函数展开的扩展形式如下。先做如下改造：

$$\frac{r_1}{\sqrt{r_1^2-2xtr_1^2+r_1^2t^2}}=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)\frac{r_1^nt^n}{r_1^n},t<1$$

然后令 $r_2=r_1t$，

$$\frac{1}{\sqrt{r_1^2-2xr_1r_2+r_2^2}}=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)\frac{r_2^n}{r_1^{n+1}},r_2<r_1$$

最后统一写成如下形式：

$$\frac{1}{\sqrt{r_1^2-2xr_1r_2+r_2^2}}=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)\frac{r_<^n}{r_>^{n+1}}$$

其中，将 r_1 和 r_2 中的较大者记为 $r_>$，较小者记为 $r_<$。这一展开形式在实际计算中会用到。

勒让德多项式的规一化系数如下.

$$\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\,|P_n(x)|^2=\frac{2}{2n+1}$$

定理 2 若 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上有定义，$(1-x^2)^{-1/4}f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上的积分存在且绝对收敛，则

$$\sum_{n=0}^{\infty}c_nP_n(x)=\frac{1}{2}[f(x+0^+)+f(x-0^+)],(-1<x<1)$$

其中

$$c_n=\frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1}P_n(x)f(x)\mathrm{d}x$$

这一展开级数称为**傅里叶-勒让德级数**.

勒让德方程(3.4.24)的另一个线性无关的解记为 $Q_l(x)$.它可从刘维尔公式求得.

$$Q_l(x)=P_l(x)\int\frac{\mathrm{d}x}{[P_l(x)]^2(1-x^2)} \tag{3.4.28}$$

称 $Q_l(x)$ 为**第二类勒让德函数**.在边界处 $x=\pm1$， $Q_l(\pm1)$ 的值是无穷大的. $Q_l(x)$ 的母函数关系是

$$\frac{1}{x-t}=\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)Q_n(x)P_n(t) \tag{3.4.29}$$

这一表达式的特点是：它把线性无关的两个特解在一个母函数关系中表出.此关系式未列入母函数关系表.

勒让德方程(3.4.24)的通解就是

$$y=AP_l(x)+BQ_l(x)$$

2. 连带勒让德函数

对于勒让德方程(3.4.24)求导 m 次，并将方程(3.4.24)中的函数 y 代之以 $(1-x^2)^{k/2}y^{(k)}$，可得到连带勒让德方程

$$(1-x^2)y''-2xy'+[l(l+1)-\frac{m^2}{1-x^2}]y=0 \tag{3.4.34}$$

其中 m 是正整数且 $0\le m\le l$.当满足边界条件(3.4.22)时，特征值为

$$l,(l=m,m+1,m+2,\cdots). \tag{3.4.35}$$

连带勒让德方程的两个线性无关的解分别为**第一类连带勒让德函数**

$$P_l^m(x)=(1-x^2)^{m/2}\frac{\mathrm{d}^m P_l(x)}{\mathrm{d}x^m} \tag{3.4.36}$$

和**第二类连带勒让德函数**

$$Q_l^m(x)=(1-x^2)^{m/2}\frac{\mathrm{d}^m Q_l(x)}{\mathrm{d}x^m} \tag{3.4.37}$$

在边界处 $x=\pm1$， $P_l^m(x)$ 满足(3.4.22)的边界条件， $Q_l^m(\pm1)$ 的值是无穷大的.

$P_l^m(x)$ 的微商表示是

$$P_l^m(x)=\frac{(-1)^l}{2^l l!}(1-x^2)^{-m/2}\frac{\mathrm{d}^{l+m}}{\mathrm{d}x^{l+m}}(1-x^2)^l \tag{3.4.38}$$

列于表 3.4.

$P_l^m(x)$ 的母函数关系是

$$\frac{(2m-1)!!(1-x^2)^{m/2}}{(1-2xt+t^2)^{(2m+1)/2}}=\sum_{n=0}^{\infty}P_n^m(x)t^n \tag{3.4.39}$$

这一母函数关系列于表 3.5.

连带勒让德多项式的规一化系数如下.

$$\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\,|P_n^m(x)|^2=\frac{(n+m)!}{(n-m)!}\frac{2}{2n+1}$$

定理 3 任何一个在$[-1,1]$上连续且在端点为零的函数$f(x)$可以按连带勒让德函数系在平均收敛的意义下展开成

$$f(x)=\sum_{n=m}^{\infty}c_n P_n^m(x)$$

其中

$$c_n=\frac{2n+1}{2}\frac{(n-m)!}{(n+m)!}\int_{-1}^{1}P_n^m(x)f(x)\mathrm{d}x$$

方程(3.4.34)的通解为

$$y=AP_l^m(x)+BQ_l^m(x)$$

注意，虽然连带勒让德方程是从勒让德方程对 x 求导 m 次得到的，可是方程的解连带勒让德函数不能简单地看做由勒让德函数对 x 求导 m 次得到，见(3.4.36)和(3.4.37)式.

在连带勒让德方程中取$m=0$时就回到勒让德方程.在连带勒让德函数中取$m=0$时就回到勒让德函数，$P_n^0(x)=P_n(x),Q_n^0(x)=Q_n(x)$.

3. 球谐函数

三维拉普拉斯方程在球坐标下的形式是

$$\nabla^2 u=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial u}{\partial r})+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta})+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}=0 \qquad (3.4.40)$$

采用分离变量法，设

$$u=R(r)\Theta(\theta)\Phi(\varphi) \qquad (3.4.41)$$

代入(3.4.40)式，并乘以$\frac{r^2}{R\Theta\Phi}$，分离变量得到

$$\frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(r^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r})=\lambda \qquad (3.4.42)$$

$$\frac{1}{\Theta\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}(\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta})+\frac{1}{\Phi\sin^2\theta}\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}\varphi^2}=-\lambda \qquad (3.4.43)$$

式(3.4.43)式再写分离变量成

$$\frac{1}{\Phi}\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}\varphi^2}=-m^2,\quad m=0,\pm1,\pm2,\cdots \qquad (3.4.44)$$

$$\frac{\sin\theta}{\Theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}(\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta})+\lambda\sin^2\theta=m^2 \qquad (3.4.45)$$

对于(3.4.45)式，令$x=\cos\theta$，并将$\Theta(\theta)$改记为$p(x)$，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}=\sin\theta\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}=\sqrt{1-x^2}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}f(\theta)=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)=\sin\theta\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)=\sqrt{1-x^2}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)$$

则变为

$$(1-x^2)\frac{\mathrm{d}^2p}{\mathrm{d}x^2}-2x\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}+(\lambda-\frac{m^2}{1-x^2})p=0 \tag{3.4.46}$$

这就是**连带勒让德方程**.如果定解问题与φ无关，$\Phi(\varphi)$亦φ无关，，那么$m=0$，这时方程(3.4.46)成为

$$(1-x^2)\frac{\mathrm{d}^2p}{\mathrm{d}x^2}-2x\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}+\lambda p=0 \tag{3.4.47a}$$

这就是**勒让德方程**.(3.4.46)和(3.4.47)的具有物理意义的解的特征值是

$$\lambda=l(l+1),(l=0,1,2,\cdots)，\quad m=0,\pm1,\pm2,\cdots,\pm l \tag{3.4.47b}$$

注意，仅从方程(3.4.44)，特征值|m|的取值是没有上限的.但是由于(3.4.46)的限制，|m|是有上限的，如(3.4.47b)所示.

连带勒让德方程(3.4.49)的在边界上解析的解已知为连带勒让德函数$\Theta(\theta)=P_l^m(\cos\theta)$.方程(3.4.44)的解是$\Phi(\varphi)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi}$.乘积

$$Y_l^m(\theta,\varphi)=\Theta(\theta)\Phi(\varphi)=P_l^m(\cos\theta)\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi} \tag{3.4.48}$$

称为**球谐函数**，它是方程(3.4.43)的解.

定理 4 任何一个在球面上连续的函数$f(\theta,\varphi)$可以按球谐函数系展开为一平均收敛的级数，

$$f(\theta,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}A_{mn}Y_n^m(\theta,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}(a_n^m\cos m\varphi+b_n^m\sin m\varphi)P_n^m(\cos\theta)$$

其中

$$a_n^m=\frac{2n+1}{2\pi\varepsilon_m}\frac{(n-m)!}{(n+m)!}\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi f(\theta,\varphi)P_n^m(\cos\theta)\cos m\varphi\sin\theta$$

$$b_n^m=\frac{2n+1}{2\pi}\frac{(n-m)!}{(n+m)!}\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi f(\theta,\varphi)P_n^m(\cos\theta)\sin m\varphi\sin\theta$$

$$\varepsilon_m=\begin{cases}2,\ m=0\\1,\ m\neq0\end{cases}$$

本节讨论的勒让德函数，包括勒让德多项式，连带勒让德函数，球谐函数等，它们也统称为**球函数**.

4. 最佳平方逼近

勒让德多项式 $P_n(x)$ 的最高次项的系数是 $\dfrac{2n(2n-1)\cdots(n+1)}{2^n n!}=\dfrac{(2n)!}{2^n(n!)^2}$.如果将勒让德多项式的最高幂次化为 1，称它为**首一勒让德多项式**，记为 $\tilde{P}_n(x)$，即

$$\tilde{P}_n(x)=\frac{2^n(n!)^2}{(2n)!}P_n(x)$$

定理 5 在 $[-1,1]$ 区间上所有最高项系数为 1 的 n 次多项式中，$\tilde{P}_n(x)$ 与零的平方偏差最小.因此 $\tilde{P}_n(x)$ 是零的最佳平方逼近 n 次多项式.

3.4.3 切比雪夫函数

1. 切比雪夫函数

方程

$$(1-x^2)y''-xy'+\lambda y=0 \qquad (-1\le x\le 1) \tag{3.4.49}$$

称为**切比雪夫方程**.这个方程的求解比较方便，只要做以下的变换.令

$$x=\cos\theta \tag{3.4.50}$$

$$(1-x^2)y''-xy'+\lambda y=0$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta}=-\frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta}=-\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta}$$

$$=\frac{1}{\sin\theta}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}\theta^2}-\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta}\right)=\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}\theta^2}-\frac{\cos\theta}{\sin^3\theta}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta}$$

$$(1-x^2)y''-xy'+\lambda y$$

$$=\sin^2\theta\left(\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}\theta^2}-\frac{\cos\theta}{\sin^3\theta}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta}\right)+\cos\theta\frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta}+\lambda y$$

$$=\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}\theta^2}+\lambda y=0$$

原方程成为

$$\frac{\mathrm{d}^2z(\theta)}{\mathrm{d}\theta^2}+\lambda z(\theta)=0 \tag{3.4.51}$$

显然，这一方程的特征值是

$$\lambda=n^2 \tag{3.4.52}$$

两个线性无关的解分别为

$$z_1(\theta)=\cos n\theta \tag{3.4.53}$$

和

$$z_2(\theta)=\sin n\theta \tag{3.4.54}$$

相应地，原方程(3.4.49)的两个线性无关的解分别为

$$y_1=\cos(n\cos^{-1}x)=T_n(\cos\theta)=T_n(x) \tag{3.4.55}$$

和

$$y_2=\sin(n\cos^{-1}x)=U_n(\cos\theta)=U_n(x) \tag{3.4.56}$$

易见，在$[-1,1]$区域内

$$\max|T_n(x)|=1,\max|U_n(x)|=1 \tag{3.4.57}$$

即这两个特解的绝对值总是小于等于 1 的.

$T_n(x)$ 是一个 n 次的多项式，它就是已经在第二章 2.4.2 小节中定义的切比雪夫多项式，也称为**第一类切比雪夫函数**.这个解在边界 $x=\pm 1$ 处的值 $y(x=\pm 1)$ 是解析的.由(3.4.55)式容易看出 $T_n(1)=1,T_n(-1)=(-1)^n$.在 2.4.2 小节中我们已经列出了切比雪夫多项式的一些性质.

切比雪夫多项式的洛巨格公式是

$$T_n(x)=\frac{(-1)^n}{(2n-1)!!}(1-x^2)^{1/2}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(1-x^2)^{n-1/2} \tag{3.4.58}$$

这一公式列于表 3.3.

切比雪夫多项式的级数表达式是

$$T_0(x)=1 \tag{3.4.59a}$$

$$T_n(x)=\frac{n}{2}\sum_{k=0}^{[n/2]}(-1)^k\frac{(n-k-1)!}{k!(n-2k)!}(2x)^{n-2k},\quad (n\geq 1) \tag{3.4.59b}$$

式(3.4.59)列于表 3.2.

切比雪夫多项式的母函数关系

$$\frac{1-xt}{1-2xt+t^2}=\sum_{n=0}^{\infty}T_n(x)t^n \tag{3.4.60}$$

这一母函数列于表 3.5.

定理 6 若 $f(x)$ 在$[-1,1]$上分段光滑，则

$$\frac{c_0}{2}+\sum_{n=0}^{\infty}c_nT_n(x)=\frac{1}{2}[f(x+0^+)+f(x-0^+)],(-1\le x\le 1)$$

其中

$$c_n=\frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}}f(x)\mathrm{d}x$$

式(3.4.56)的$U_n(x)$称为**第二类切比雪夫函数**，它不是多项式.$U_n(x)$满足的边界条件是$y(x=\pm1)=0$，由(3.4.56)式容易看出$U_n(x=\pm1)=0$.易证，$U_n(x)$与切比雪夫多项式之间有如下关系.

$$\frac{\mathrm{d}T_n(x)}{\mathrm{d}x}=[-\sin(n\cos^{-1}x)]n(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}})=\frac{nU_n(x)}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$U_n(x)=\frac{\sqrt{1-x^2}}{n}\frac{\mathrm{d}T_n(x)}{\mathrm{d}x} \tag{3.4.61}$$

由此可得到$U_n(x)$的级数表达式

$$U_n(x)=\sqrt{1-x^2}\sum_{k=0}^{[(n-1)/2]}(-1)^k\frac{(n-k-1)!}{k!(n-2k-1)!}(2x)^{n-2k-1} \tag{3.4.62}$$

$U_n(x)$的微商表示为

$$U_n(x)=\frac{(-1)^{n-1}n}{(2n-1)!!}\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}x^{n-1}}(1-x^2)^{n-1/2} \tag{3.4.63}$$

列于表 3.4.

第二类切比雪夫函数的母函数关系

$$\frac{\sqrt{1-x^2}}{1-2xt+t^2}=\sum_{n=0}^{\infty}U_{n+1}(x)t^n \tag{3.4.64}$$

注意其中的展开系数是U_{n+1}而不是像通常那样的U_n，见表 3.5.

切比雪夫方程(3.4.49)的通解为

$$y=AT_n(x)+BU_n(x)$$

2. 连带切比雪夫函数

对于切比雪夫方程(3.4.49)求导 m 次，可得到**连带切比雪夫方程**

$$(1-x^2)y''-(2m+1)xy'+(\lambda-m^2)y=0 \tag{3.4.65}$$

其中 m 是正整数且$0\le m\le n$.当满足以下边界条件

$$y'(x=\pm 1)<\infty \tag{3.4.66}$$

时，特征值为

$$\lambda=(n+m)^2. \tag{3.4.67}$$

方程的两个特解都称为**连带切比雪夫函数**，它们可以从切比雪夫函数对 x 求导 m 次得到，即有以下关系式：

$$T_n^{(m)}(x)=\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}T_n(x) \tag{3.4.68}$$

和

$$U_n^{(m)}(x)=\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}U_n(x) \tag{3.4.69}$$

$T_n^{(m)}(x)$ 和 $U_n^{(m)}(x)$ 分别称为 n 次 m 阶的第一类、第二类连带切比雪夫函数.在连带切比雪夫方程(3.4.65)中取 $m=0$ 时就回到切比雪夫方程(3.4.49).在连带切比雪夫函数中取 $m=0$ 时就回到切比雪夫函数，$T_n^{(0)}(x)=T_n(x),U_n^{(0)}(x)=U_n(x)$.

连带切比雪夫方程(3.4.65)的通解为

$$z=AT_n^{(m)}(x)+BU_n^{(m)}(x)$$

当 $m>1$ 时，实际上 $T_n^{(m)}(x)$ 和 $U_n^{(m)}(x)$ 都很少用.常用的是取

$$\lambda=(n+m)^2,(n=0,1,2,\cdots)$$

这时连带切比雪夫方程成为以下形式

$$(1-x^2)z''-(2m+1)xz'+n(n+2m)z=0$$

与表 3.1 中的盖金堡尔方程的形式一致，所以此式就是盖金堡尔方程.它的通解为

$$z=AC_n^m(x)+DU_n^m(x)$$

其中

$$C_n^m(x)=\frac{1}{2^{m-1}(m-1)!(n+m)}\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}T_{n+m}(x)$$

$$D_n^m(x)=\frac{1}{2^{m-1}(m-1)!(n+m)}\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}U_{n+m}(x)$$

$C_n^m(x)$ 称为 n 次 m 阶的盖金堡尔多项式.盖金堡尔方程中的 m 如果不取整数，而是取为 $m=1/2$，那么就成为勒让德方程.

3. 第二类切比雪夫多项式

当 $m=1$ 时的连带切比雪夫方程

$$(1-x^2)y''-3xy'+(\lambda-1)y=0 \tag{3.4.70}$$

满足 $y(x=\pm 1)$ 解析的特征值为

$$\lambda=(n+1)^2,(n=0,1,2,\cdots) \tag{3.4.71}$$

相应的特征函数为

$$U_n^*(x)=\frac{1}{n+1}\frac{\mathrm{d}T_{n+1}(x)}{\mathrm{d}x} \tag{3.4.72}$$

它称为**第二类切比雪夫多项式**.因 $T_{n+1}(x)$ 是 $n+1$ 次多项式，所以 $U_n^*(x)$ 是 n 次多项式. $T_{n+1}(x)=\cos(n+1)\theta$，则由上式得到

$$U_n^*(x)=\frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta} \tag{3.4.73}$$

将 $T_{n+1}(x)$ 级数表达式(3.4.58)中的 n 换成 $n+1$ 代入(3.4.72)，得到 $U_n^*(x)$ 的级数表达式

$$U_n^*(x)=\sum_{k=0}^{[n/2]}(-1)^k\frac{(n-k)!}{k!(n-2k)!}(2x)^{n-2k} \tag{3.4.74}$$

$U_n^*(x)$ 的微商表示

$$U_n^*(x)=\frac{(-1)^{n-1}(n+1)}{(2n+1)!!\sqrt{1-x^2}}\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}x^{n-1}}(1-x^2)^{n+1/2} \tag{3.4.75}$$

列于表 3.4.

第二类切比雪夫多项式的母函数关系

$$\frac{1}{1-2xt+t^2}=\sum_{n=0}^{\infty}U_n^*(x)t^n,\quad (|t|<1) \tag{3.4.76}$$

这一母函数列于表 3.5.

第二类切比雪夫多项式 $U_n^*(x)$ 与第一类切比雪夫多项式 $T_n(x)$ 之间的关系，除了(3.4.72)式之外，还有

$$T_n(x)=U_n^*(x)-xU_{n-1}^*(x) \tag{3.4.77}$$

和

$$(1-x^2)U_n^*(x)=xT_{n+1}(x)-T_{n+2}(x) \tag{3.4.78}$$

第二类切比雪夫多项式 $U_n^*(x)$ 与第二类切比雪夫函数 $U_n(x)$ 之间的关系有

$$U_{n+1}(x)=\sqrt{1-x^2}U_n^*(x) \tag{3.4.79}$$

方程(3.4.70)的另一个线性无关的特解是 $\dfrac{\mathrm{d}U_{n+1}(x)}{\mathrm{d}x}$.

3.4.4 厄米函数

本小节我们简要介绍厄米方程的解，厄米函数，还介绍韦伯-厄米函数和韦伯函数，因为这三种函数紧密相关.

1. 厄米多项式

厄米方程

$$y''-2xy'+\lambda y=0,\qquad (-\infty\le x\le\infty) \tag{3.4.80}$$

满足的边界条件为 $y(x\to\pm\infty)\sim x^n$，即当 x 趋于无穷大时，函数是以 x 的幂次趋于无穷大的.得到的特征值

$$\lambda=2n \tag{3.4.81}$$

得到的特征函数是**厄米多项式** $H_n(x)$，其洛巨格公式是

$$H_n(x)=(-1)^n \mathrm{e}^{x^2}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\mathrm{e}^{-x^2}$$

列于表 3.3.

厄米多项式的级数表达式可以写成

$$H_n(x)=\sum_{k=0}^{[n/2]}(-1)^k\frac{n!}{k!(n-2k)!}(2x)^{n-2k}\text{，}\quad (n=0,1,2,\cdots) \tag{3.4.82}$$

列于表 3.2.

厄米多项式的母函数关系

$$\exp(2xt-t^2)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{H_n(x)}{n!}t^n \tag{3.4.83}$$

这一母函数列于表 3.6.

厄米多项式的规一化系数如下.

$$\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-x^2}|H_n(x)|^2\,\mathrm{d}x=\sqrt{\pi}2^n n!$$

定理 7 若 $f(x)$ 在任一有限区间上是分段光滑的，则

$$\sum_{n=0}^{\infty}c_nH_n(x)=\frac{1}{2}[f(x+0^+)+f(x-0^+)],(-\infty<x<\infty)$$

其中

$$c_n=\frac{1}{\sqrt{\pi}2^n n!}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-x^2}H_n(x)f(x)\mathrm{d}x$$

厄米多项式具有以下加法公式.

$$H_n(x+y)=2^{-n/2}\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}H_n(\sqrt{2}x)H_{n-k}(\sqrt{2}y) \tag{3.4.84}$$

如果边界条件换成 $y(x\to\pm\infty)\sim\exp(x^2)$，即当 x 趋于无穷大时，函数是以 $\exp(x^2)$ 的方式趋于无穷大的，那么得到的厄米方程的另一个线性无关的解为

$$G_n(x)=H_n(x)\int\frac{\exp(x^2)}{[H_n(x)]^2}\mathrm{d}x \tag{3.4.85}$$

$G_n(x)$ 称为**第二类厄米函数**.

厄米方程(3.4.80)的通解为

$$y=AH_n(x)+BG_n(x)$$

在(3.3.14)式中取 $B_1=-1$，得到厄米方程的另一个形式.

$$y''-xy'+\lambda y=0,\qquad(-\infty\le x\le\infty) \tag{3.4.86}$$

在式(3.4.80)中令 $x=u/\sqrt{2}$，那么 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}y=\sqrt{2}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u},\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}y=2\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}u^2}$，也可得到(3.4.86)式.(3.4.86)式的特征值为

$$\lambda=n \tag{3.4.87}$$

相应的多项式的特征函数记为 $He_n(x)$，与厄米函数之间的关系为 $He_n(x)=C(n)H_n(x/\sqrt{2})$ 可以相差一个常数因子，这个常数因子可以与 n 有关，可以由规一化条件来决定. $C(n)=2^{-n/2}$，见习题.因此，

$$He_n(x)=2^{-n/2}H_n(x/\sqrt{2}) \tag{3.4.88}$$

式(3.4.86)的另一个线性无关的特征函数是

$$Ge_n(x)=2^{-n/2}G_n(x/\sqrt{2}) \tag{3.4.89}$$

我们在表 3.7 中列出一些函数的奇偶性与在特殊点的值.

表 3.7 一些函数的奇偶性与在特殊点的值.

函数 $Q_n(x)$	奇偶性	特殊点的值
广义超球 多项式 $P_n^{(r,s)}(x)$	$P_n^{(r,s)}(-x)=(-1)^nP_n^{(s,r)}(x)$	$P_n^{(r,s)}(1)=\dfrac{(r+1)_n}{n!}$

雅克比多项式 $J_n^{(r,s)}(x)$		$J_n^{(r,s)}(0)=1, J_n^{(r,s)}(1)=\dfrac{(s-r-n)_n}{(s)_n}$
盖金堡尔 多项式 $G_n^m(x)$	$G_n^m(-x)=(-1)^n G_n^m(x)$	$G_n^m(1)=\dfrac{(2m)_n}{n!}, G_{2n+1}^m(0)=0$ $G_{2n}^m(x)(0)=(-1)^n \dfrac{(m)_n}{n!}$
切比雪夫 多项式 $T_n(x)$	$T_n(-x)=(-1)^n T_n(x)$	$T_n(1)=1$ $T_{2n+1}(0)=0, T_{2n}(0)=(-1)^n$
第二类 切比雪夫函数 $U_n(x)$	$U_n(-x)=(-1)^{n+1}U_n(x)$	$U_n(\pm1)=1$ $U_{2n}(0)=0, U_{2n+1}(0)=(-1)^n$
第二类 切比雪夫多项式 $U_n^*(x)$	$U_n^*(-x)=(-1)^n U_n^*(x)$	$U_n^*(1)=n+1$ $U_{2n}^*(0)=(-1)^n, U_{2n+1}^*(0)=0$
勒让德 多项式 $P_n(x)$	$P_n(-x)=(-1)^n P_n(x)$	$P_n(1)=1, P_{2n+1}(0)=0$ $P_{2n}(0)=(-1)^n \dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}$
第一类 连带勒让德函数 $P_n^m(x)$	$P_n^m(-x)=(-1)^{n+m} P_n^m(x)$	$P_n^m(\pm1)=0$ $P_n^m(0)=0, \quad n-m=$ 奇数 $P_n^m(0)=$ $(-1)^{(n-m)/2}\dfrac{(n+m-1)!!}{(n-m)!!}, \quad n-m=$ 偶数
索宁 多项式 $S_n^{\mu}(x)$		$S_n^{\mu}(0)=\dfrac{(\mu+1)_n}{n!}$
连带拉盖尔 多项式 $L_n^{(m)}(x)$		$L_n^{(m)}(0)=(-1)^n \dfrac{(n!)^2}{(n-m)!m!}$
拉盖尔多项式 $L_n(x)$		$L_n(0)=n!$
厄米 多项式 $H_n(x)$	$H_n(-x)=(-1)^n H_n(x)$	$H_{2n}(0)=(-1)^n \dfrac{(2n)!}{n!}$ $H_{2n+1}(0)=0$
第一类 韦伯-厄米函数 $\Psi_n(x)$	$\Psi_n(-x)=(-1)^n \Psi_n(x)$	$\Psi_{2n}(0)=(-1)^n \dfrac{(2n)!}{n!}$ $\Psi_{2n+1}(0)=0$

韦伯函数 (抛物柱函数) $D_n(x)$	$D_n(-x)=(-1)^n D_n(x)$	$D_{2n}(0)=(-1)^n(2n-1)!$ $D_{2n+1}(0)=0$
贝塞尔函数 $J_n(x)$	$J_n(-x)=(-1)^n J_n(x)$	$J_n(0)=\begin{cases}1, & n=0\\ 0, & n\geq 1\end{cases}$
第一类变型 贝塞尔函数 $I_n(x)$	$I_n(-x)=(-1)^n I_n(x)$	$I_n(0)=\begin{cases}1, & n=0\\ 0, & n\geq 1\end{cases}$
第一类球贝塞尔函数 (球贝塞尔函数) $j_n(x)$	$j_n(-x)=(-1)^n j_n(x)$	$j_n(0)=\begin{cases}1, & n=0\\ 0, & n\geq 1\end{cases}$
第二类球贝塞尔函数 (诺依曼函数) $y_n(x)$	$y_n(-x)=(-1)^{n+1} y_n(x)$	$y_n(0)\sim x^{-(n+1)}\to\infty$

§3.6 二阶常微分方程的复变函数理论

以上我们讨论二阶微分方程的时候，都是设定了自变量是实数.一般情况下，应该从自变量是复数的角度来讨论问题.这一点是柯西最早指出的.本节我们简要介绍二阶常微分方程的解析理论.以下的函数都默认为是复变函数，自变量是复数，除非特别说明.

3.6.1 齐次线性方程组的解

1. 齐次线性方程组的基本理论

1) 一阶常微分方程组解的存在唯一定理

我们先来看一阶微分方程组的情况.设有以下方程组

$$w_s' = f_s(z, w_1, w_2, \cdots, w_n),\ (s=1,2,\cdots,n) \tag{3.6.1}$$

我们定义一个列向量：$w=(w_1,w_2,\cdots,w_n)^{\mathrm{T}}$，则 $w'=\dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}=(w_1',w_2',\cdots,w_n')^{\mathrm{T}}$.把上述方程组写成紧凑的形式

$$w' = f(z, w) \tag{3.6.2}$$

初值问题是

$$\begin{cases} w' = f(z,w) \\ w(z_0) = w_0 \end{cases} \tag{3.6.3}$$

要求的是：复平面 C 的某个含 z_0 点的区域 R 上的一个解析函数 $\varphi(z)$，使之满足：

$$\varphi(z_0)=w_0\text{，}\quad \varphi'(z)=f(z,\varphi)\text{，}\quad z\in R$$

定理 1(柯西) 若函数 $f_s(z,w_1,w_2,\cdots,w_n),\ (s=1,2,\cdots,n)$ 在

$$|z-z_0|<r,|w_s-w_s(z_0)|<\rho,\ (s=1,2,\cdots,n)$$

区域上是解析的，并满足

$$|f_s(z,w_1,w_2,\cdots,w_n)|\le M,\ (s=1,2,\cdots,n)$$

其中 $r>0,\rho>0,M>0$ 都是常数；则初值问题(3.6.3)至少在以下区域

$$|z-z_0|<r(1-\mathrm{e}^{-\rho/(n+1)Mr})$$

上存在唯一解.

当讨论一个高阶齐次线性方程的时候，从数学的角度来说，是将高阶齐次线性方程化为一阶齐次线性方程组.即，如果有一如下的初值问题：

$$\begin{cases} y^{(n)}(z)+\alpha_1(z)y^{(n-1)}(z)+\cdots+\alpha_{n-1}(z)y'(z)+\alpha_n y(z)=0 \\ y(z_0)=\gamma_0,y'(z_0)=\gamma_1,y''(z_0)=\gamma_2,\cdots,y^{(n-1)}(z_0)=\gamma_{n-1} \end{cases} \tag{3.6.4}$$

定义

$$w_1=y,w_1'=y'=w_2,w_2'=w_1''=y''=w_3,\cdots,w_n'=w_1^{(n)}=y^{(n)} \tag{3.6.5}$$

之后，原方程就写成如下的线性方程组：

$$\begin{cases} w_1'=w_2 \\ w_2'=w_3 \\ \vdots \\ w_{n-1}'=w_n \\ w_n'=-\alpha_1 w_n-\cdots-\alpha_{n-1}w_2-\alpha_n w_1 \end{cases} \tag{3.6.6}$$

线性方程组(3.6.6)可以更简洁地写成如下形式：

$$w'=A(z)w \tag{3.6.7}$$

其中 $A(z)=(a_{ij}(z))$ 在某一单连通域 $G\subset C$ 上单值解析的 $n\times n$ 矩阵函数.

把(3.6.7)写的更明确一些，如下：

$$\begin{pmatrix} w_1'(z) \\ w_2'(z) \\ w_3'(z) \\ \vdots \\ w_n'(z) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11}(z) & a_{12}(z) & a_{13}(z) & \cdots & a_{1n}(z) \\ a_{21}(z) & a_{22}(z) & a_{23}(z) & \cdots & a_{2n}(z) \\ a_{31}(z) & a_{32}(z) & a_{33}(z) & \cdots & a_{3n}(z) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(z) & a_{n2}(z) & a_{n3}(z) & \cdots & a_{nn}(z) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} w_1(z) \\ w_2(z) \\ w_3(z) \\ \vdots \\ w_n(z) \end{pmatrix}$$

式(3.6.6)是其中的一个特殊情况：

$$\begin{pmatrix} w_1'(z) \\ w_2'(z) \\ w_3'(z) \\ \vdots \\ w_n'(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -\alpha_n(z) & -\alpha_{n-1}(z) & -\alpha_{n-2}(z) & \cdots & -\alpha_1(z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1(z) \\ w_2(z) \\ w_3(z) \\ \vdots \\ w_n(z) \end{pmatrix}$$

解的存在唯一性可以表述成如下的定理.

定理 2 若 $A(z)$ 在单连通域 $G \subset C$ 上单值解析的，$z_0 \in G$，$w_0 \in C^n$，则初值问题

$$\begin{cases} w' = A(z)w \\ w(z_0) = w_0 \end{cases} \tag{3.6.8}$$

在 G 上必存在唯一的单值解析解 $w(z)$.

2) 基本解矩阵

方程(3.6.7)的所有解构成一个 n 维复线性空间.这个解空间必存在 n 个线性无关的解 $w_1(z), w_2(z), \cdots, w_n(z)$，而一般解 w 总是可以表示成这 n 个线性无关解的线性组合，即

$$w(z) = c_1 w_1(z) + c_2 w_2(z) + \cdots + c_n w_n(z), \ (c_i \in C)$$

又设 $w_{(1)}(z), w_{(2)}(z), \cdots, w_{(n)}(z)$ 是方程(3.6.7)的任意 n 个解，每一个解都是一个列矢量。把它们写在一起，记

$$\begin{aligned} W(z) &= (w_{(1)}(z), w_{(2)}(z), \cdots, w_{(n)}(z)) \\ &= \begin{pmatrix} w_{1(1)}(z) & w_{1(2)}(z) & w_{1(3)}(z) & \cdots & w_{1(n)}(z) \\ w_{2(1)}(z) & w_{2(2)}(z) & w_{2(3)}(z) & \cdots & w_{2(n)}(z) \\ w_{3(1)}(z) & w_{3(2)}(z) & w_{3(3)}(z) & \cdots & w_{3(n)}(z) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{n(1)}(z) & w_{n(2)}(z) & w_{n(3)}(z) & \cdots & w_{n(n)}(z) \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{3.6.9a}$$

则称(3.6.9a)构成(3.6.7)的一个**解矩阵**.

式(3.6.9a)中的 n 个解可能是线性无关的，也可能是线性相关的.如果这 n 个解是**线性无关**的，我们记为

$$W(z) = (w^{(0)}(z), w^{(1)}(z), \cdots, w^{(n-1)}(z)) \tag{3.6.9b}$$

此式中将列序指标写成了上标.上标只代表列序，不表示对于向量的求导. 称(3.6.9b)构成(3.6.7)的一个**基本解矩阵**.解矩阵和基本解矩阵都满足方程 $W'(z) = A(z)W(z)$.一个解矩阵是基本解矩阵的充要条件是：它的行列式

$\Phi(z)=\det W(z)$ 在某一点 $z_0\in G$ 处不为零. $\Phi(z)=\det W(z)$ 就是原方程(3.6.4)的解的朗斯基行列式.

定理 3 若 $W(z)$ 是(3.6.7)的一个基本解矩阵，那么方程(3.6.7)的所有基本解矩阵 V 都可以表成如下形式：

$$V(z)=W(z)C \tag{3.6.10}$$

此处 C 是一个非奇异常数矩阵.

2. 孤立奇点及其分类

1) 孤立奇点导致多值函数

以上的讨论都是假定了方程(3.6.7)中的 $A(z)=(a_{ij}(z))$ 在某一单连通域 $G\subset C$ 上单值解析的 $n\times n$ 矩阵函数.以下讨论具有孤立奇点的情况.

定义 1 如果在方程

$$w'=A(z)w \tag{3.6.11}$$

中，$A(z)=(a_{ij}(z))$ 在某一区域 $0<|z-z_0|<r$ (r 是某一正数)内单值解析，而在 z_0 处是非解析的，即在 $A(z)$ 中至少有一个元素 $a_{ij}(z)$ 在点 z_0 处是非解析的，这种点称为 $A(z)$ 的**孤立奇点**，也称作方程(3.6.11)的**孤立奇点**.

当存在孤立奇点时，定理 2 显然是不适用的.由于 $0<|z-z_0|<r$ 非单连通区域，方程组(3.6.11)的解有可能是多值的.

例 1 考虑 $n=1$ 时的微分方程

$$w'=\frac{\alpha}{z}w \tag{3.6.12}$$

其中α是一常数.我们把复平面上除去 $z=0$ 的点之后的区域简记为 $C-\{0\}$，称作区域 K，也记作 $K=C-\{0\}$.方程中的 $A(z)=\dfrac{\alpha}{z}$ 在 $C-\{0\}$ 内单值解析.而 $z=0$ 是它的孤立奇点.但方程有一个基本解 $w=z^{\alpha}$ (注意 $z^{\alpha}\neq 0$)，它在 $\alpha=\dfrac{1}{2}$ 时是多值的.因为 $w=\sqrt{z}$ 是一个多值函数.

例 2 考虑 $n=2$ 时的二阶方程组

$$\begin{pmatrix} w_1' \\ w_2' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1/z \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$$

这里的 $A(z)=\begin{pmatrix} 0 & 1/z \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 在 $C-\{0\}$ 内单值解析， $z=0$ 是它的孤立奇点.但是方程有

一个多值的基本解矩阵

$$W=\begin{pmatrix} \mathrm{Lnz} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

其中第一个解是多值的，第二个解是单值的.这是因为

$$\mathrm{Lnz}=\ln|z|+\mathrm{i}\arg z+\mathrm{i}2k\pi \tag{3.6.13}$$

是一个多值函数.

以上两个例子表明，当方程组有孤立奇点时，确实出现了解为多值函数的情况.

2) 有孤立奇点时的解

为了对有孤立奇点时方程的解的讨论提供一个思路，我们考察以下这个形式简单的方程.

$$w'=\frac{A}{z}w\text{，}\quad A=(a_{ij})\quad n\times n\,\text{常数矩阵} \tag{3.6.14}$$

这一方程组称为**柯西方程组**. 前面的例 1 和例 2 是柯西方程组的两个特例.

$$\begin{pmatrix} w_1'(z) \\ w_2'(z) \\ w_3'(z) \\ \vdots \\ w_n'(z) \end{pmatrix}=\frac{1}{z}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} w_1(z) \\ w_2(z) \\ w_3(z) \\ \vdots \\ w_n(z) \end{pmatrix} \tag{3.6.14}$$

显然，$z=0$ 是(3.6.14)的孤立奇点，方程右端的系数矩阵在 $K=C-\{0\}$ 内单值解析.

为了求出(3.6.14)的解，我们做变换

$$z=\mathrm{e}^s \tag{3.6.15}$$

函数就变为 $w(z)=u(s)$.$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}w(z)=\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}z}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}u(s)=\dfrac{1}{\mathrm{e}^s}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}u(s)$.原方程就变为

$$u'=Au \tag{3.6.16}$$

这个方程是常系数线性方程组，具有基本解矩阵

$$U=\mathrm{e}^{As}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k}{k!}s^k$$

这个解在整个复平面上单值解析.

原方程组(3.6.14)也就具有一个基本解矩阵

$$W(z)=U(\mathrm{Lnz})=\mathrm{e}^{A\mathrm{Lnz}}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k}{k!}(\mathrm{Lnz})^k$$

它在 $K=C-\{0\}$ 内是解析的，可是非单值.

由定理 3，方程组(3.6.16)的一般解矩阵是$u = \mathrm{e}^{As}C = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k}{k!}s^k C$，此处 C 是任一常数矩阵.因而，方程组(3.6.14)的一般解矩阵是

$$w(z) = \mathrm{e}^{A\mathrm{Ln}z}C = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k}{k!}(\mathrm{Ln}z)^k C$$

这个例子说明，通过变换(3.6.15)，可以把具有某孤立点的多连通域上的方程组转化为单连通域上的方程组，从而可通过单值解获得多值解的表达式.

如果方程组(3.6.11)最多有一个孤立奇点 $z_0 \in C$，那么方程组在 z_0 附近解的定性结构由下述定理给出.

定理 4 设 $A(z)$ 在区域 $0<|z-z_0|<r$ (r 是某一正数)内单值解析，则方程组(3.6.11)必存在一基本解矩阵 $W(z)$.它具有形式

$$W(z) = V(z)(z-z_0)^B,\quad 0<|z-z_0|<r \tag{3.6.17}$$

其中 $V(z)$ 在 $0<|z-z_0|<r$ 内是单值解析的 $n\times n$ 矩阵函数，而 B 是 $n\times n$ 常数矩阵.

把区域 $0<|z-z_0|<r$ 简记为 $K_r^{z_0}$.把区域 $0<|z|<r$ 简记为 K_r^0.把区域 K_r^0 从其中心 $z=0$ 开始沿负实轴割开，于是得到一个单连通域，把它记作 K_r^-.这个区域是由圆域 $|z|<r$ 内部除了 $\mathrm{Re}\,z\le 0, \mathrm{Im}\,z=0$ 的所有点 z 构成的集合.

3) 奇异点的分类，富克斯方程组

(1) 有限奇异点

定义 2 设方程组(3.6.11)中的 $A(z)$ 是在区域 $0<|z-z_0|<r$ 上单值解析的 $n\times n$ 矩阵函数.若 $A(z)$ 在 z_0 处解析，称 z_0 为 $A(z)$ 的**常点**.若虽然 z_0 是 $A(z)$ 的奇点但是极限 $\lim\limits_{z\to z_0}A(z)$ 存在，称 z_0 为 $A(z)$ 的**可去奇点**.例如 $\lim\limits_{z\to 0}\frac{\sin z}{z}$ 存在，因而 $z_0=0$ 是 $\frac{\sin z}{z}$ 的可去奇点.常点和可去奇点通称为方程组(3.6.11)的**正则点**.

若 z_0 是 $A(z)$ 一级极点，则称 z_0 是方程组(3.6.11)的**第一类(或弱)奇点**.

若 z_0 既不是(3.6.11)的正则点，又不是它的第一类奇点，则称 z_0 是方程组(3.6.11)的**第二类(或强)奇点**.即，这类极点至少是二级以上的极点.

对于第一类奇点，定理 4 的结论可以再加强一些.这就是下面的定理 6.

定理 6 设方程组(3.6.11)中的 $A(z)$ 在区域 $0<|z-z_0|<r$ 内单值解析，并且 z_0

是该方程组的第一类(或弱)奇点，则(3.6.11)的每个基本解矩阵$W(z)$均有形式

$$W(z)=V(z)(z-z_0)^B, \tag{3.6.20}$$

其中$V(z)$在$|z-z_0|<r$内是单值解析的$n\times n$矩阵函数，而B是$n\times n$常数矩阵.

定理 6 与定理 4 的区别就在于，(3.6.17)的条件$0<|z-z_0|<r$在(3.6.20)式放宽为$|z-z_0|<r$.

(2) 无限奇异点

考虑方程组(3.6.11)，如果$A(z)$在区域$|z|>r$上是单值解析的，则无穷远点∞也成为(3.6.11)的一个孤立奇点.为了对无穷远点∞进行分类，做变换$\xi=\dfrac{1}{z}$，$w(z)=u(\xi)$，(3.6.11)变成

$$u'(\xi)=-\frac{1}{\xi^2}A(\frac{1}{\xi})u(\xi),\quad 0<|\xi|<\frac{1}{r} \tag{3.6.21}$$

此时，依照$\xi=0$是(3.6.21)的正则点，或是第一类奇异点，或是第二类奇异点，分别称$z=\infty$是(3.6.21) 的正则点，或是第一类奇异点，或是第二类奇异点.

如将(3.6.21)的矩阵函数$A(\dfrac{1}{\xi})$展开成洛朗级数

$$A(\frac{1}{\xi})=\sum_{k=-\infty}^{\infty}B_k\xi^k,\quad 0<|\xi|<\frac{1}{r}$$

那么按上述定义，依照对所有的$k\le 1$有$B_k=0$，或对所有的$k\le 0$有$B_k=0$但$B_1\ne 0$，或不是对所有的$k\le 0$有$B_k=0$，无穷远点∞将分别是(3.6.11)式的正则点、第一类奇点、第二类奇点.

定理 7 设方程组(3.6.11)中的$A(z)$在区域$|z|>r$上单值解析，则$z=\infty$是该方程组的第一类奇点的充要条件是，$z=\infty$为$A(z)$的一级零点或者$A(z)$可展开成如下形式的级数

$$A(z)=\frac{B_1}{z}+\frac{B_2}{z^2}+\frac{B_3}{z^3}+\cdots,|z|>r, \tag{3.6.22}$$

且$B_1\ne 0$；而$z=\infty$是该方程的正则点的充要条件是$A(z)$的不低于二级的零点或

$A(z)$可展开成如下的级数形式

$$A(z)=\frac{B_2}{z^2}+\frac{B_3}{z^3}+\cdots, |z|>r\text{，}\tag{3.6.23}$$

以上两式中的$B_i(i=1,2,3,\cdots)$是常数矩阵.

此外，方程组(3.6.11)的每个基本解矩阵$W(z)$均具有形式

$$W(z)=\begin{cases}U(z)z^B, & \text{当}z=\infty\text{为第一类奇点} \\ U(z), & \text{当}z=\infty\text{为正则点}\end{cases}\text{，}\quad |z|>r$$

其中$U(z)$在$|z|>r$(包括$z=\infty$)上是单值解析的矩阵函数，而B是一常数矩阵.

(C) 富克斯型方程组

定义 3 如果方程组

$$w'=A(z)w \tag{3.6.24}$$

在复平面C上除了具有有限个第一类奇点(允许有∞点)外，其余都是它的正则点，则称方程组(3.6.24)为**富克斯型方程组**.

定理 8 方程组(3.6.24)为富克斯型的充要条件是$A(z)$具有形式

$$A(z)=\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{z-z_j}R_j \tag{3.6.25}$$

其中$z_1,z_2,\cdots,z_k$是k个互异的第一类奇点，而R_j是非零的常数矩阵.

由此定理，若方程组(3.6.24)为富克斯型的即$A(z)$具有形式(3.6.25)，则由取$zA(z)$在$z\to\infty$的极限可以看出，当$\sum\limits_{j=1}^{k}R_j=0$(或者≠0)时无穷远点是方程组(3.6.24)的正则点(或者第一类奇点).

对于富克斯型方程，可以用以下寻找幂级数解的方法来求方程的解.

3. 幂级数解

考虑如下方程组

$$w'=A(z)w \tag{3.6.26}$$

其中$A(z)$是在$0<|z-z_0|<r$上单值解析的$n\times n$矩阵函数，而z_0是方程组的第一类奇点.即，方程(3.6.26)是富克斯型方程中只有一个奇点的情况.

$$A(z)=\frac{1}{z-z_0}\sum_{k=0}^{\infty}A_k(z-z_0)^k\text{，}\quad 0<|z-z_0|<r\text{ .}\tag{3.6.27a}$$

为简单起见，假定 $z_0=0$.此时 $A(z)$ 可写成

$$A(z)=\frac{1}{z}\sum_{k=0}^{\infty}A_k z^k,\quad 0<|z|<r \tag{3.6.27b}$$

其中 $A_k\,(i=0,1,2,\cdots)$ 是 $n\times n$ 常数矩阵，且 $A_0\neq 0$.

为了求出(3.6.26)在 $z=0$ 附近的解析解 $w(z)$ ，我们令

$$w(z)=\sum_{k=0}^{\infty}w_k z^k \tag{3.6.28}$$

其中 w_k 是 $n\times n$ 常数矩阵.把(3.6.28)代入(3.6.26)，得

$$z\sum_{k=1}^{\infty}kw_k z^{k-1}=\sum_{i=0}^{\infty}A_i z^i\sum_{j=0}^{\infty}w_j z^j$$

比较两边 z^k 的系数，得

$$kw_k=\sum_{i=0}^{k}A_{k-i}\ w_i,\quad (k=0,1,2,\cdots) \tag{3.6.29}$$

把右边的 $A_0 w_k$ 项移到左边，得

$$\begin{cases} -A_0 w_0=0 \\ (I-A_0)w_1=A_1 w_0 \\ \vdots \\ (kI-A_0)w_k=A_k w_0+A_{k-1}w_1+\cdots+A_1 w_{k-1} \\ \vdots \end{cases} \tag{3.6.30}$$

其中 I 是单位矩阵.

我们将(3.6.28)的系数序列记为 $(w_k)_0^{\infty}$ ，称满足(3.6.29)或(3.6.30)的任一序列 $(w_k)_0^{\infty}$ 为(3.6.26)的一个**形式解**.

定理 9(解的幂级数展开定理) 对方程组(3.6.26)，我们设

(i) 关于矩阵 $A(z)$ 的级数(3.6.27)在 $0<|z|<r$ 上收敛；

(ii) $(w_k)_0^{\infty}$ 为(3.6.26)的一个形式解；

则由 $(w_k)_0^{\infty}$ 产生的幂级数(3.6.28)必在 $|z|<r$ 上收敛，从而在其上确定了(3.6.26)的一个单值解析解.

此定理有以下三个重要推论.

推论 1 若级数(3.6.27)在$0<|z|<r$上收敛，$\lambda=0$是矩阵A_0的特征根，并对所有的自然数 k，矩阵$kI-A_0$都是非奇异的，则对A_0的对应于$\lambda=0$的特征向量$w_0\neq 0$，(3.6.26)在$|z|<r$上都相应存在着一个形如(3.6.28)的单值解析解，其中的系数$w_k\,(k\geq 1)$由(3.6.29)所决定.

这一段话的意思其实就是：$w_0\neq 0$是指(3.6.30)第一式有非零解(与后面各式比较，有$\lambda=0$).解出w_0之后，再逐步解出其余各w_k，条件是(3.6.30)各式左边的$kI-A_0$都是非奇异的.

推论 2 在推论 1 的条件下，若A_0对应于$\lambda=0$有p个线性无关的特征向量，则(3.6.26)在$|z|<r$上就存在着p个线性无关的形如(3.6.28)的单值解析解.

这个推论的意思是，如果(3.6.30)第一式有 p 个线性无关的非零解，那么从每一个解(例如第 m 个解$w_{m,0}$)开始，都可以由(3.6.30)的各式求得各$w_{m,k}$，构成一个解组，记为

$$w_m(z)=\sum_{k=0}^{\infty}w_{m,k}z^k\text{，}\quad (m=1,2,\cdots,p)$$

这 m 个解是线性无关的.因为否则，令其中的$z=0$，那么$w_m(0)=w_{m,0}$，$(m=1,2,\cdots,p)$.若p个$w_m(0)$线性相关，就导致p个特征向量$w_{m,0}\;(m=1,2,\cdots,p)$线性相关，这就与前提矛盾.

推论 3 若级数(3.6.27)在$0<|z|<r$上收敛，λ(可以是任意复数)是A_0的特征根，但所有的$\lambda+k$(k是自然数)都不是A_0的特征根，则对A_0的对应于λ的特征向量w_0，(3.6.26)在$|z|<r$上都存在一个形如

$$w(z)=z^{\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}w_kz^k \tag{3.6.31}$$

的解析解，代入(3.6.26)

$$z\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda+k)w_k z^{\lambda+k-1}=\sum_{i=0}^{\infty}A_i z^i\sum_{j=0}^{\infty}w_j z^{\lambda+j}$$

$$z\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda+k)w_k z^{k-1}=\sum_{i=0}^{\infty}A_i z^i\sum_{j=0}^{\infty}w_j z^{j}$$

可知，其中的系数 $w_k\,(k\ge 1)$ 由方程组

$$(\,(\lambda+k)I-A_0\,)\,w_k=\sum_{i=0}^{k-1}A_{k-i}\;w_i\,,\quad (k=0,1,2,\cdots) \tag{3.6.32}$$

$$\begin{cases} (\lambda I-A_0)w_0=0 \\ ((\lambda+1)I-A_0)w_1=A_1w_0 \\ \vdots \\ ((\lambda+k)I-A_0)w_k=A_kw_0+A_{k-1}w_1+\cdots+A_1w_{k-1} \\ \vdots \end{cases} \tag{3.6.32a}$$

所决定.

若 A_0 有对应于 λ 的 p 个线性无关的特征向量，则(3.6.26)在 $|z|<r$ 上就存在着 p 个线性无关的形如(3.6.31)的解析解.

推论 1 和 2 都是针对 A_0 的特征值 $\lambda=0$ 的情况.推论 3 则是针对 A_0 的特征值 $\lambda\neq 0$ 的情况.推论 3 的来源是：做变换 $w=z^{\lambda}u$，那么 u 所满足的方程就与 w 所满足的方程(3.6.26)一样且具有同样的特性，对于 u 的解适用定理 9 及其前两个推论.当然前提是λ为 A_0 的特征值.当 $\lambda=0$ 时，自动回到推论 1 和 2 的情况.

但是，现在讨论的方程(3.6.24)是有孤立的奇点的。而前面已经说了，孤立奇点会导致多值解。在式(3.6.27)中，把 z 乘到了左边。这就把奇点躲开了，多值解就不会出现了。我们要把多值解也要找出来。这就需要讨论如下的一般解。

4. 一般解

以上给出的是方程组(3.6.26)在(3.6.27)条件下的幂级数形式的解(3.6.28).相当于只找了微分方程的一个特解.根据前面的讨论知，由于系数矩阵的(3.6.27)的形式，作形如(3.6.15)那样的变换可得到多值解.这样的解称为**一般解**.我们此处也来做这一变换

$$z=\mathrm{e}^s\,,\quad w(z)=u(s) \tag{3.6.33}$$

则(3.6.26)变为

$$u'(s)=\mathrm{e}^sA(\mathrm{e}^s)u=\sum_{k=0}^{\infty}A_k\mathrm{e}^{ks}u \tag{3.6.34}$$

对于一般解，也有一个一般解的级数展开定理.我们就不在此叙述这个定理了.只

介绍如何构造这个解.

构造(3.6.34)的解的过程可以像(3.6.28)往后那样的方式进行.不过我们从最一般的情况(3.6.31)开始进行操作.设(3.6.34)具有如下形式的解：

$$u(s)=\mathrm{e}^{\lambda s}\sum_{k=0}^{\infty}u_k(s)\mathrm{e}^{ks} \tag{3.6.35}$$

代入(3.6.34)式

$$\mathrm{e}^{\lambda s}\sum_{k=0}^{\infty}[u_k'+(\lambda+k)u_k]\mathrm{e}^{ks}=\sum_{k=0}^{\infty}A_k\mathrm{e}^{ks}\mathrm{e}^{\lambda s}\sum_{l=0}^{\infty}u_l(s)\mathrm{e}^{ls} \tag{3.6.36}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}[u_k'+(\lambda+k)u_k]\mathrm{e}^{ks}=\sum_{k=0}^{\infty}A_k\sum_{l=0}^{\infty}u_l(s)\mathrm{e}^{(k+l)s}=\sum_{m=0}^{\infty}\ \sum_{l=0}^{m}A_{m-l}u_l(s)\mathrm{e}^{ms}=\sum_{k=0}^{\infty}\ \sum_{i=0}^{k}A_{m-i}u_i(s)\mathrm{e}^{ks}$$

比较两边 e^{ks} 的系数，得，

$$u_k'+(\lambda+k)u_k=\sum_{i=0}^{k}A_{k-i}u_i(s)$$

把 A_0 项移到左边.得到如下的方程组.

$$u_0'+(\lambda I-A_0)u_0=0$$

$$u_1'+((\lambda+1)I-A_0)u_1=A_1u_0$$

$$\cdots\cdots$$

$$u_k'+((\lambda+k)I-A_0)u_k=A_ku_0+A_{k-1}u_1+\cdots+A_1u_{k-1}$$

$$\cdots\cdots \tag{3.6.37}$$

先看其中的第一式.一旦取λ为 A_0 的一个特征值，得到相应的特征向量之后，就可解出 $u_0(s)$ 是关于 s 的一个向量多项式.(这是因为 $y'=A_0y$ 的解是 $y=\mathrm{e}^{\lambda s}u_0(s)$，其中 $u_0(s)$ 是关于 s 的向量多项式.有关的理论就不在此处介绍了.)然后，由此 $u_0(s)$，从(3.6.37)的第二式开始往下，可逐步解出 $u_1(s),u_2(s),\cdots$.它们都是关于 s 的向量多项式.

现在设 A_0 有 l 个互异的特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_l$.对应于每个 λ_j 有 m_j 个线性无关的解.显然应该有 $m_1+m_2+\cdots+m_l=n$.对于第 j 个特征值 λ_j 的第 $i\,(i=1,2,\cdots,m_j)$ 个特征向量，可以从(3.6.37)第一式解出 $u_0^{(ij)}(s)$，再从以后各式依次解出 $u_k^{(ij)}(s),(k=1,2,\cdots)$.这样，就解出 n 组 $\{u_k^{(ij)}(s))_0^{(ij)},(k=1,2,\cdots)$.代入(3.6.35)后，得到

(3.6.34)的解

$$u^{(ij)}(s)=\mathrm{e}^{\lambda_j s}\sum_{k=0}^{\infty}u_k^{(ij)}\ (s)\ \mathrm{e}^{ks},\ (i=1,2,\cdots,m_l;\ j=1,2,\cdots,l) \tag{3.6.38}$$

共有 n 个解，它们都是单值解析解.可以证明，这 n 个解是线性无关的，因此构成了(3.6.34)的一个基本解组.

然后，将(3.6.33)代回，得到如下的基本解组.

$$w^{(ij)}(z)=z^{\lambda_j}\sum_{k=0}^{\infty}u_k^{(ij)}\ (\mathrm{Lnz})\ z^k,\ (i=1,2,\cdots,m_l;\ j=1,2,\cdots,l) \tag{3.6.39}$$

如果按 Lnz 的幂次整理之，则得

$$\begin{aligned} u_k^{(ij)}(\mathrm{Lnz}) &= u_{k,0}^{(ij)}(\mathrm{Lnz})+u_{k,1}^{(ij)}(\mathrm{Lnz})+\cdots+u_{k,q}^{(ij)}(\mathrm{Lnz})^q \\ w^{(ij)}(z) &= z^{\lambda_j}\sum_{k=0}^{\infty}u_k^{(ij)}(\mathrm{Lnz})z^k \\ &= z^{\lambda_j}\sum_{k=0}^{\infty}[u_{k,0}^{(ij)}(\mathrm{Lnz})+u_{k,1}^{(ij)}(\mathrm{Lnz})+\cdots+u_{k,q}^{(ij)}(\mathrm{Lnz})^q]z^k \\ &= z^{\lambda_j}[(\mathrm{Lnz})\sum_{k=0}^{\infty}u_{k,0}^{(ij)}z^k+(\mathrm{Lnz})\sum_{k=0}^{\infty}u_{k,1}^{(ij)}z^k+\cdots+(\mathrm{Lnz})^q\sum_{k=0}^{\infty}u_{k,q}^{(ij)}z^k] \end{aligned} \tag{3.6.39a}$$

$$w^{(ij)}(z)=z^{\lambda_j}\{h_0^{(ij)}(z)+(\mathrm{Lnz})\ h_1^{(ij)}(z)+\cdots+(\mathrm{Lnz})^q\ h_q^{(ij)}(z)\} \tag{3.6.40}$$

$$(i=1,2,\cdots,m_l;\ j=1,2,\cdots,l)$$

其中诸 $h_k^{(ij)}(z)$ 是在 $|z|<r$ 上单值解析的向量函数.至于(3.6.40)中到底出现多少带对数因子的项，要根据 A_0 的约当标准型来决定，应该有 $q<n$.

5. 只有两个方程的情况

作为例子，我们考虑 $n=2$ 情况下的方程组

$$w'=A(z)w \tag{3.6.41}$$

其中 $A(z)$ 是 2×2 矩阵函数，它在 $0<|z|<r$ 上是单值解析的，而 $z=0$ 是第一类奇点.此时

$$A(z)=\frac{1}{z}\sum_{k=0}^{\infty}A_k z^k,\quad 0<|z|<r \tag{3.6.42}$$

设 A_0 的两个特征根为 λ,μ，并假定 $\mathrm{Re}\,\lambda\le\mathrm{Re}\,\mu$.

根据定理 9 推论 3，此方程组对应于 μ 有形如

$$w_1(z)=z^{\mu}\ h(z) \tag{3.6.43}$$

的一个解，其中 $h(z)$ 是在 $|z|<r$ 上单值解析的 2 维向量函数.而另一个与 w_1 线性无关的解可表成

$$w_2(z)=z^{\lambda}[h_1(z)+h_2(z)\ \mathrm{Lnz}] \tag{3.6.44a}$$

其中 $h_1(z),h_2(z)$ 是在 $|z|<r$ 上单值解析 2 维向量函数.因 A_0 只有两个特征值，解中最多只出现 Lnz 的一次项.若不出现次对数项，解就是

$$w_2(z)=z^{\lambda}h_1(z) \tag{3.6.44b}$$

因此，现在方程组的两个线性无关的解中，一个是(3.6.43)，另一个或者是(3.6.44a)或者是(3.6.44b).

我们再详细一些叙述如下.

首先记住，由于 $n=2$，方程组一定有两个线性无关的解.

对于 A_0 的第一个特征值μ，设第一个解 w_1 的形式为(3.6.31).那么，通过方程组(3.6.32)的步骤，求出一组系数 $(w_{\mu,k})_0^{\infty}$.这样就得到第一个解(3.6.43).对于 A_0 的第二个特征值λ，按照以下情况分别考虑.

(1) $\lambda\neq\mu$

此时又分以下两种情况.

(i) 若 $\lambda-\mu$ 不是整数.

设第二个解 w_2 的形式为(3.6.31).那么，通过方程组(3.6.32)的步骤，求出一组系数 $(w_{\lambda,k})_0^{\infty}$.这样就得到第二个解(3.6.44b).

(ii) 若 $\lambda-\mu=m$ 是整数.

这时，如果还是设 w_2 是(3.6.31)的形式，按照方程组(3.6.32)计算系数时，到 $k=m$ 时，将会算不出结果.因此，第二个解就不能设为(3.6.31)的形式.此时，第二个解应该按照一般解的步骤，即(3.6.33)-(3.6.37)的步骤来求解.这时，第二个解 w_2 中，有可能出现对数项，即(3.6.44a)的形式.

(2) $\lambda=\mu$

此时，虽然 A_0 只有一个特征值，又可分以下两种情况.

(i) A_0 的这个特征值有两个线性无关的特征向量 w_0.

此时，两个解都可设为(3.6.31)的形式，分别从两个不同的 w_0 出发，通过方

程组(3.6.32)的步骤，求出两组组系数$(w_{\lambda,k})_0^\infty$.这样就得到的两个线性无关解就是(3.6.43)和(3.6.44b).

(ii) A_0的这个特征值只有一个特征向量.

这时，不可能通过(3.6.31)和(3.6.32)求的第二个线性无关的解.第二个解应该按照一般解的步骤，即(3.6.33)-(3.6.37)的步骤来求解.这时，第二个解中，有可能出现对数项，即(3.6.44a)的形式.

把上面的叙述总结如下.

若$\lambda-\mu$不是整数或者$\lambda=\mu$但A_0对应有两个线性无关的特征向量，则w_2中不出现含有对数的项，即$h_2(z)=0$.

若$\lambda-\mu$是整数或者$\lambda=\mu$但A_0仅对应有一个特征向量，则w_2中可能会出现含有对数的项，即有可能$h_2(z)\neq 0$.

我们最后复述从(3.6.37)式可直观看出的两种最简单的情况.若(3.6.42)的级数中，只有A_0这一项，那么，从(3.6.37)式可看出，除u_0之外的所有的u_k都为零。此时解式(3.6.39)只有首项而无级数形式.若(3.6.42)的级数中，无 A_0但有其它项A_i，$i\neq 0$存在，则解式(3.6.39)是个级数，只不过其中$\lambda=0$.

3.6.2 二阶常微分方程

现在我们应用前面讲的线性方程组的理论来具体讨论二阶线性方程.方程的形式是

$$w''(z)+a(z)w'(z)+b(z)w(z)=0 \tag{3.6.45}$$

其中$a(z)$，$b(z)$是在区域$0<|z-z_0|<r$内的单值解析函数.

1. 二阶常微分方程解的结构

在3.1节中我们介绍了实函数时二阶齐次微分方程解的存在和唯一性定理和解的结构.在该节中从开头一直到(3.1.14)式的概念、定理和公式等的所有内容对于复变函数的情况仍然适用，例如用逐次逼近法证明解的存在性，线性无关的基本解组，通解，朗斯基行列式及其性质等等，只要把实函数$y(x)$换成复变函数$w(z)$即可.只是对于两个刘维尔公式要稍作修改.一是方程的系数和朗斯基行列式的关系的(3.1.11)式，另一个是从一个特解求出另一个特解的(3.1.14)式.因为那两个公式中都有积分.对于实函数，积分路径是明确的.对于复变函数，积分的路径是什么呢？积分路径可以是不经过被积函数的奇点的任意路径.

我们把这两个公式重写如下.如果$w_1(z)$和$w_2(z)$是方程(3.6.45)的两个线性无

关的解，则定义朗斯基行列式如下.

$$\Delta(z) = w_1 w_2' - w_2 w_1' \tag{3.6.46}$$

它与方程(3.6.45) 中的系数$a(z)$的关系是：

$$\Delta(z) = \Delta(z_0)\exp[-\int_{z_0}^{z} a(\zeta)\mathrm{d}\zeta] \tag{3.6.47}$$

从一个特解求出另一个特解的刘维尔公式是：

$$w_2 = w_1 \int \mathrm{d}\zeta \, \frac{c}{w_1^2} \exp \; [-\int a(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta] + c_1 w_1 \tag{3.6.48}$$

以上两式中的积分路径都不经过被积函数的奇点.

能够单纯利用刘维尔公式从一个特解求出另一个特解的情况不多.因此，有必要从其它途径来寻求基本解组.

2. 奇点的分类

定义 4 若z_0是$a(z)$和$b(z)$的**常点**或者**可去奇点，**则称z_0为方程(3.6.45)的**正则点**.

若z_0非(3.6.45)的正则点，但是$a(z)$的不高于一级的极点，是$b(z)$的不高于二级的极点，则称z_0是方程(3.6.45)的**第一类奇点**.

若z_0既不是(3.6.45)的正则点，又不是它的第一类奇点，则称z_0是方程(3.6.45)的**第二类奇点**.

为何前面的第一类奇点只提到了一级极点，而此处的第一类奇点则涉及到$b(z)$的二级极点？原因是，前面讲的是一阶微分方程组的极点，而此处讲的是二阶微分方程的极点.这两者其实是一致的。这只要将此处的二阶微分方程化为一阶微分方程组就能看出来.

若$a(z)$有一级的极点，而$b(z)$有二级的极点，那么我们可将它们写成

$$a(z) = \frac{c(z)}{z-z_0}，\quad b(z) = \frac{d(z)}{(z-z_0)^2}，\quad 0 < |z-z_0| < r \tag{3.6.52}$$

即写成

$$w''(z) + \frac{c(z)}{z-z_0} w'(z) + \frac{d(z)}{(z-z_0)^2} w(z) = 0$$

其中$c(z)$，$d(z)$是在区域$|z-z_0| < r$内的解析函数. 做变换

$$u_1 = w，\quad u_2 = (z-z_0)w'$$

那么

$$u_2' = w' + (z-z_0)w''$$
$$= w' + (z-z_0)[-\frac{c(z)}{z-z_0}w'(z) - \frac{d(z)}{(z-z_0)^2}w(z)]$$
$$= [1-c(z)]w' - \frac{d(z)}{z-z_0}w = \frac{1-c(z)}{z-z_0}u_2 - \frac{d(z)}{z-z_0}u_1$$

构造如下列矢量

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w \\ (z-z_0)w' \end{pmatrix}$$

这个列矢量的导数是

$$u' = \begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix} = \frac{1}{z-z_0}\begin{pmatrix} u_2 \\ -d(z)u_1 + [1-c(z)]u_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{z-z_0}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -d(z) & 1-c(z) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = Au$$

原方程(3.6.45)化为如下的一阶方程组.

$$u' = Au, \quad u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w \\ (z-z_0)w' \end{pmatrix} \tag{3.6.53}$$

其中

$$A = \frac{1}{z-z_0}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -d(z) & 1-c(z) \end{pmatrix} \tag{3.6.54}$$

可见点 $z = z_0$ 是(3.6.53)的第一类奇点.

$$w''(z) + a(z)w'(z) + b(z)w(z) = w''(z) + \frac{c(z)}{z-z_0}w'(z) + \frac{d(z)}{(z-z_0)^2}w(z) = 0$$

对于无限远点，也参照前面的办法来考虑.仍然考虑方程(3.6.45)，并设其中 $a(z)$，$b(z)$ 是在区域 $|z| > R$ 内的单值解析函数.此时，称无限远点∞是方程的一个孤立奇点.为了对这个奇点分类，作变换

$$\xi = \frac{1}{z}, \quad w(z) = u(\xi)$$

那么

$$\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{dz}} = -\frac{1}{z^2} = -\xi^2$$

对函数的求导：

$$w'(z) = u'(\xi)\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{dz}} = -\xi^2 u'(\xi)$$
$$w''(z) = -\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{dz}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}[\xi^2 u'(\xi)] = \xi^2[2\xi^2 u'(\xi) + \xi^2 u''(\xi)] = 2\xi^3 u'(\xi) + \xi^4 u''(\xi)$$

代入原方程

$$w''(z)+a(z)w'(z)+b(z)w(z)$$

$$=2\xi^3u'(\xi)+\xi^4u''(\xi)-a(1/\xi)\xi^2u'(\xi)+u(1/\xi)u(\xi)$$

$$=\xi^4u''(\xi)+[2\xi^3-a(1/\xi)\xi^2]u'(\xi)+b(1/\xi)u(\xi)=0$$

方程(3.6.45)就化为同一类型的以下方程

$$u''(\xi)+a^*(\xi)u'(\xi)+b^*(\xi)u(\xi)=0 \qquad (3.6.49)$$

其中

$$a^*(\xi)=\frac{2}{\xi}-\frac{1}{\xi^2}a(\frac{1}{\xi}),\quad b^*(\xi)=\frac{1}{\xi^4}b(\frac{1}{\xi}) \qquad (3.6.50)$$

是$0<|\xi|<\dfrac{1}{R}$上的单值解析函数.

于是，按照$\xi=0$是方程(3.6.49)的正则点，或是第一类奇点，或是第二类奇点，而分别称无限远点∞是方程(3.6.45)的正则点，或是第一类奇点，或是第二类奇点.

根据此定义，得到下面的定理.

定理 10 无限远点∞最多是方程(3.6.45)的第一类奇点(即或为正则点，或为第一类奇点)的充要条件是：$a(z)$以$z=\infty$为其不低于一级的零点，而$b(z)$以$z=\infty$为其不低于二级的零点，即在$z=\infty$附近有展开式

$$a(z)=\frac{a_1}{z}+\frac{a_2}{z^2}+\frac{a_3}{z^3}+\cdots, \qquad (3.6.51a)$$

$$b(z)=\frac{b_2}{z^2}+\frac{b_3}{z^3}+\cdots, \qquad (3.6.51b)$$

特别是$z=\infty$为(3.6.45)的正则点的充要条件是：在$z=\infty$附近有展开式(3.6.51)，其中$a_1=2, b_2=b_3=0$.

$$a^*(\xi)=\frac{2}{\xi}-\frac{1}{\xi^2}a(\frac{1}{\xi})=\frac{2}{\xi}-\frac{1}{\xi^2}(\frac{a_1}{z}+\frac{a_2}{z^2}+\frac{a_3}{z^3}+\cdots)$$
$$=\frac{2}{\xi}-\frac{1}{\xi^2}(a_1\xi+a_2\xi^2+a_3\xi^3+\cdots)=\frac{2}{\xi}-\frac{a_1}{\xi}-a_2-a_3\xi-a_4\xi^2\cdots)$$

$$b^*(\xi)=\frac{1}{\xi^4}b(\frac{1}{\xi})=\frac{1}{\xi^4}(\frac{b_2}{z^2}+\frac{b_3}{z^3}+\frac{b_4}{z^4}+\frac{b_5}{z^5}+\cdots)$$
$$=\frac{1}{\xi^4}(b_2\xi^2+b_3\xi^3+b_4\xi^4+b_5\xi^5+\cdots)=\frac{b_2}{\xi^2}+\frac{b_3}{\xi}+b_4\xi+b_5\xi^2+\cdots$$

例 3 二阶方程

$$(z+2)\,z^2\; w''(z)+(z+2)\; w'(z)-4\,zw(z)=0$$

由于

$$a(z)=\frac{1}{z^2}，\ b(z)=\frac{-4}{z(z+2)}$$

所以 $z=0$ 是第二类奇点，$z=-2$，$z=\infty$ 是第一类奇点.复 z 平面上所有其余的点都是正则点.

例 4 二阶方程

$$(\sin z)\,w''(z)-zw'(z)+(\mathrm{e}^z-1)\,w(z)=0$$

由于

$$a(z)=-\frac{z}{\sin z}，\ b(z)=\frac{\mathrm{e}^z-1}{\sin z}$$

$z=0$ 是正则点，诸点 $z=k\pi\ (k=\pm1,\pm2,\cdots)$ 都是第一类奇点，因为这些点都是 $\sin z$ 的单零点.由此可见，$z=\infty$ 是一系列奇点的极限点，因此它不是孤立的，从而不属于任何一类.

3. 解的级数展开

(1) 考虑方程(3.6.45)中，$a(z)$，$b(z)$ 是在区域 $|z-z_0|<r$ 内的单值解析函数，$z=z_0$ 点是方程的正则点.此时，因无奇点，将解的幂级数形式

$$w(z)=\sum_{m=0}^{\infty}c_m(z-z_0)^m$$

直接代入原方程 $w''(z)+a(z)w'(z)+b(z)w(z)=0$.比较同次幂的系数，自然就可得到两个线性无关的特解.

(2) 考虑方程(3.6.45)中，$a(z)$，$b(z)$ 是在区域 $0<|z-z_0|<r$ 内的单值解析函数，$z=z_0$ 点是第一类奇点.此时由于(3.6.52)式，将原二阶微分方程写成(3.6.53)的形式。把 A 展开成罗朗级数之后，(3.6.53)成为

$$u'=\frac{1}{z-z_0}\sum_{m=0}^{\infty}A_m(z-z_0)^m u$$

其中，各 A_m 都是 2×2 常数矩阵，

$$A_m=\frac{1}{m!}\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}z^m}\begin{pmatrix}0 & 1\\ -d(z) & 1-c(z)\end{pmatrix}_{z=z_0}$$

特别

$$A_0=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -b_0 & 1-a_0\end{pmatrix} \tag{3.6.55}$$

这里$a_0=c(z_0),b_0=d(z_0)$.计算这两个数值的一种简单的办法是

$$a_0=c(z_0)=\lim_{z\to z_0}(z-z_0)a(z),b_0=\lim_{z\to z_0}(z-z_0)^2 b(z)$$

于是A_0的特征方程$\det(A_0-\lambda I)=0$就是

$$\lambda(\lambda-1)+a_0\lambda+b_0=0 \tag{3.6.56}$$

这个方程称为(3.6.53)关于奇点z_0的**判定方程**.此判定方程的根的特征决定着(3.6.53)进而(3.6.45)的解的结构.因此，我们称，(3.6.56)的根为方程(3.6.45)的对应于z_0的**指数**.

今设方程(3.6.55)的两个根为λ,μ，且$\mathrm{Re}\lambda\le\mathrm{Re}\mu$.根据前面的讨论知，方程(3.6.45)必存在形如

$$u_1(z)=(z-z_0)^{\mu}h(z-z_0) \tag{3.6.57a}$$

$$u_2(z)=(z-z_0)^{\lambda}[h_1(z-z_0)+h_2(z-z_0)\mathrm{Ln}(z-z_0)] \tag{3.6.57b}$$

的基本解组.其中$h(z-z_0)$， $h_1(z-z_0),h_2(z-z_0)$都是在$|z-z_0|<r$上的单值解析函数.为了具体求出这三个函数，可借助于递推公式(3.6.37)来计算.但有时不用此公式而是直接通过比较系数来计算更为方便.

最简单也是最为常见的情况是，矩阵A只有A_0项.这时方程的解就不是级数形式.先由(3.6.56)式算出 A_0的两个特征值λ,μ，且$\mathrm{Re}\lambda\le\mathrm{Re}\mu$.特征值$\mu$和$\lambda$对应的特征向量分别记为$c_1$和$c_2$.第一个特解就是

$$u_1(z)=(z-z_0)^{\mu} \tag{3.6.58a}$$

即(3.6.57a)式中的$h(z)$=1. $c_1\neq c_2$第二个特解就是

$$u_2(z)=(z-z_0)^{\lambda}\ln(z-z_0) \tag{3.6.58b}$$

即(3.6.57b)式中的$h_1=0,h_2=1$.

原则上，写出第一个特解之后，第二个特解就可以立即由刘维尔公式求出来.

6. 二阶常微分方程的多项式解集

表 3.2 中的多项式解的级数表达式，在其中的实变量x换成复变量z之后，都是相应的二阶常微分方程的多项式解.表 3.2 至 3.6 中的实变量x换成复变量z之后，仍然适用.

举例来说，对于 3.4.3 小节中介绍的切比雪夫方程及其解切比雪夫函数，只要在式(3.4.49)至(3.4.79)中做如下改动：将实变函数 $y(x)$ 改为复变函数 $w(z)$，将(3.4.49)式中 $(-1\le x\le 1)$ 的限制勾销并去掉(3.4.57)式，将实数的θ改成复数的ξ, 将(3.4.52)式的 $\lambda=n^2$ 改成 $\lambda=\alpha^2$，现在的α是任意复数，去掉所有的边界条件，那么所有余下的公式在复变函数的范围内都是适用的.读者可以按此改动将式(3.4.49)至(3.4.79)写成相应的复变函数的形式.

我们介绍常微分方程的复变函数的理论时，不涉及到边界条件，因此也就不涉及特征值问题.我们只是讨论如何求出两个线性无关的特解.

本章前四节讨论的都是自变量为实数的情况.对于表 3.1 中的各种情况，容易看出，判定方程的根都是重合的.因而，在 x=0 附近，除了多项式这个特解，另一个特解一定有 ln$x$ 这个因子.这就是为什么在求解区间上有界这个条件下，解函数只出现多项式特解，另外一个特解不出现.从而特征值也就确定了，如表 3.1 中列出的数值.

§3.7 非自伴的二阶常微分方程

3.7.1 常微分方程的伴随方程

上一节的内容介绍的是自变量都是复数，函数也自然是复数.本节考虑自变量是实数但函数可以是复数的情况.

在一个方程中，将算子代之以伴随算符，就得到这个方程的伴随方程.对于线性代数方程组，取系数矩阵的厄米共轭就得到伴随方程，已如第二章 2.2.3 小节所述.

常微分方程和边界条件构成边值问题.相应地，伴随方程和伴随边界条件构成伴随边值问题.为了写出伴随边值问题，除了将边值问题中的微分算子代之以其伴随算子，还要利用(2.2.11)式的结果为零写出伴随方程相应的边界条件.

显然，在一个微分方程

$$Lu(x)-\lambda u(x)=0 \tag{3.7.1}$$

中，用形式伴随算子 $L^\dagger$ 代入，就得到

$$L^\dagger v(x)-\lambda^+ v(x)=0 \tag{3.7.2}$$

注意，伴随方程(3.7.2)的解 v 与原方程(3.7.1)的解 u 是不同的.也可以把 v 写成$u^\dagger$，以表明这是伴随方程的解，可以称为 u 的伴随函数.注意，当我们说到微分方程的时候，一定含有边界条件，因为微分方程的解是针对一定边界条件求出的.伴

随方程的边界条件由下式得到，

$$(v,Lu)-(L^{\dagger}v,u)=[J(u,v)]_a^b=0 \tag{3.7.3}$$

如果一个边值问题与其伴随边值问题的解完全相同，就称这个边值问题是自伴的.自伴边值问题要满足如下两个条件：微分算子是形式自伴的，伴随方程的边界条件与原方程的边界条件完全相同.满足这两个条件之后，伴随边值问题与原边值问题实际上就是完全相同，也就具有相同的解.这两个条件中有一个不满足，方程就不是自伴的.本章的前四节考虑的都是自伴边值问题.

若微分方程的边值问题是自伴的，我们就称这个边值问题中的微分算子是自伴的.此处微分算子的自伴的条件比表 2.1 中要多一条：伴随边界条件与原边界条件相同.这一条满足之后，(3.7.3)式就自然满足.

3.7.2 斯图姆-刘维尔算子

我们考虑二阶常微分方程的斯图姆-刘维尔算子

$$L=-A(x)\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}-B(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}+C(x)=\frac{1}{\rho(x)}[-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}p(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}+q(x)] \tag{3.7.4}$$

其中的各函数可以是复数，边界条件中的系数也可以是复数.我们来考虑其伴随算子.

定理 1 若二阶微分算子是斯图姆-刘维尔型(3.7.4)的，那么它的复共轭就是它的形式伴随算子，

$$L^{+}=\frac{1}{\rho^*}(-p^*\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}-p'^*\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}+q^*)=L^* \tag{3.7.5}$$

但是权函数$\rho(x)$不变.此时，特征方程

$$L(x)u_n(x)=\lambda_n u_n(x) \tag{3.7.6}$$

与其伴随特征方程

$$L^{\dagger}(x)\,v_n(x)=\gamma_n\,v_n(x) \tag{3.7.7}$$

的关系是，特征值互为复共轭，

$$\gamma_n=\lambda_n^{\ *} \tag{3.7.8}$$

相应的特征函数互为复共轭，

$$v_n(x)=u_n^{\ *}(x) \tag{3.7.9}$$

证明 首先我们来证明(3.7.3)式左边两个内积的权函数相同.

$$
\begin{aligned}
(v,Lu) &= \int_a^b \rho(x)v^*(x)\frac{1}{\rho(x)}[-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}p(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}+q(x)]u(x)\mathrm{d}x \\
&= \int_a^b v^*[-p\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}-p'\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}+q]u\mathrm{d}x \\
&= \int_a^b [(-p\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}-p'\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}+q)v^*]u\mathrm{d}x+[J(u,v)]_a^b \\
&= \int_a^b \rho[\frac{1}{\rho^*}(-p^*\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}-p'^*\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}+q^*)v]^*u\mathrm{d}x+[J(u,v)]_a^b=(L^+v,u)+[J(u,v)]_a^b
\end{aligned}
\tag{3.7.10}
$$

可见，从 (v,Lu) 转成 $(L^\dagger v,u)$ 的过程中，权函数没有变化.并且得到了(3.7.5)式.如果我们将特征值方程(3.7.6)的两边取复共轭

$$L^*(x)\ u_n^*(x)=\lambda_n^*\ u_n^*(x) \tag{3.7.11}$$

与伴随方程(3.7.7)比较，就得到(3.7.8)和(3.7.9)式.**证明完毕**.

特征方程与伴随方程的特征值互为复共轭这一点，已经在第二章 2.2 节中定理 8 给予一般的证明.本定理指出，对于斯图姆刘维尔算子的情况，特征函数也是互为复共轭的.

对于(3.7.7)的解所满足的边界条件，需要通过(3.7.6)的边界条件和(3.7.3)式右边为零来获得.此处我们来看一个简单的又是常见的类型.

定理 2 若算子(3.7.4)中的

$$p(x)=1, \tag{3.7.12}$$

且(3.7.6)的解满足非混合的齐次边界条件：

$$\begin{cases}\alpha_1 u(a)+\alpha_2 u'(a)=0\\ \beta_1 u(b)+\beta_2 u'(b)=0\end{cases} \tag{3.7.13}$$

那么，伴随方程(3.7.7)满足如下齐次边界条件

$$\begin{cases}\alpha_1^* v(a)+\alpha_2^* v'(a)=0\\ \beta_1^* v(b)+\beta_2^* v'(b)=0\end{cases} \tag{3.7.14}$$

即，只要将(3.7.13)中的系数取复共轭.

证明 利用(2.2.25)式，

$$
\begin{aligned}
&[J(u,v)]_a^b=u'(b)v^*(b)-u(b)v^{*\prime}(b)-u'(a)v^*(a)+u(a)v^{*\prime}(a)\\
&=u'(b)v^*(b)+\beta_2u'(b)v^{*\prime}(b)/\beta_1+\alpha_1u(a)v^*(a)/\alpha_2+u(a)v^{*\prime}(a)\\
&=[\beta_1v^*(b)+\beta_2v^{*\prime}(b)]u'(b)/\beta_1+[\alpha_1v^*(a)+\alpha_2v^{*\prime}(a)]u(a)/\alpha_2=0
\end{aligned}
$$

其中已将边界条件(3.7.13)代入. 由此，立即得到式(3.7.14).**证明完毕**.

此时，如果这些系数都是实数，并且二阶微分算子(3.7.4)中的权函数ρ和函数 q 都是实数，那么算子就是自伴的.第 2 章习题 22 给出了一个更一般的情况.

例 1 有如下边值问题

$$u''(x)+\lambda u(x)=0, 0\le x\le 1, u'(0)-\alpha u(0)=0, u'(1)-\beta u(1)=0 \tag{3.7.15}$$

其中系数α和β是复数，求其特征值和特征函数.写出这个方程的伴随方程.

解答 为方便起见，将参数λ写成$\lambda=\mu^2$.方程的解显然是

$$u(x)=A\sin\mu x+B\cos\mu x$$

由边界条件来定两个系数.

$$u'(x)=A\mu\cos\mu x-B\mu\sin\mu x$$

$$\begin{aligned}&A\mu-\alpha B=0\\&A\mu\cos\mu-B\mu\sin\mu-\beta A\sin\mu-\beta B\cos\mu=0\end{aligned}$$

利用第一式，第二式成为

$$\begin{aligned}&-(B\mu+\beta A)\sin\mu=0\\&(\mu+\beta A/B)\sin\mu=(\mu+\alpha\beta/\mu)\sin\mu=0\end{aligned}$$

我们只考虑其中一个特别简单的情形，即$\alpha=\beta\neq0$，那么特征值满足下式，

$$(\mu+\alpha^2/\mu)\sin\mu=0$$

若，$\sin\mu_n=0$，那么，特征值是

$$\mu_n=n\pi,n=1,2,3,\cdots \tag{3.7.16a}$$

相应的规一化特征函数是

$$u_n(x)=\sqrt{\frac{2}{n^2\pi^2+\alpha^2}}\,(\alpha\sin\mu_n x+n\pi\cos\mu_n x) \tag{3.7.16b}$$

若$\mu+\alpha^2/\mu=0$，那么，特征值只有一个

$$\mu=\mathrm{i}\alpha \tag{3.7.17a}$$

相应的规一化的特征函数用α作为下标来表示，

$$u_\alpha(x)=\sqrt{\frac{2\alpha}{\mathrm{e}^{2\alpha}-1}}\mathrm{e}^{\alpha x} \tag{3.7.17b}$$

本征谱是(3.7.16b)这一系列函数加上(3.7.17b)这一个函数.这最后一个函数看上去很奇怪，好像是凭白多出一个函数.这个函数是有物理意义的.由于区间端点处的函数值不为零，这是一个从端点开始指数上升或者下降的函数，是与区域边界紧密联系的，反映区域边界特性的一个函数.

现在写出(3.7.15)的伴随边值问题.此例中微分算子和边界条件符合定理 2 的条件.容易得到伴随边值问题如下.

$$v''(x)+\gamma v(x)=0,0\le x\le1,v'(0)-\alpha^*v(0)=0,v'(1)-\beta^*v(1)=0 \tag{3.7.18}$$

伴随边值问题的特征值和特征函数分别是(3.7.16)-(3.7.17)的复共轭.可以验证此

例中以下的双正交性

$$(v_n,u_m)=\int_0^1 v_n^*(x)u_m(x)\mathrm{d}x=\delta_{nm} \tag{3.7.19}$$

此例中，容易验证，

$$(u_n,u_m)=\int_0^1 u_n^*(x)u_m(x)\mathrm{d}x\neq 0, n\neq m \tag{3.7.20}$$

由于特征函数u_α与u_n是属于不同特征值的，所以它们之间也是具有双正交性关系：

$$(v_n,u_\alpha)=(v_\alpha,u_n)=0 \tag{3.7.21}$$

3.7.3 非自伴二阶常微分方程的完备集

从例 1 看到，非自伴方程也是可以有特征值和特征函数系的.这样的特征函数系是否可以构成完备集呢？一般情况下，没有这样的结论.但是对于一些特殊情况，是可以证明这一结论的.我们有以下定理.

定理 3 设有如下边值问题

$$\begin{aligned}&L(x)u(x)+\lambda u(x)=0, a\le x\le b\\&a_1u'(a)+b_1u'(b)+a_0u(a)+b_0u(b)=0\\&c_1u'(a)+d_1u'(b)+c_0u(a)+d_0u(b)=0\end{aligned} \tag{3.7.22}$$

其中微分算子 $L(x)$是非自伴的斯图姆-刘维尔算子(3.7.4)，函数$A(x),B(x),C(x)$是分段连续的，边界中的各系数是复数.如果 $L(x)$的伴随算子存在，$L(x)$的每一个本征值的简并度为 1，即一个本征值只对应一个本征函数，并且满足以下三个条件之一，

$$a_1d_1-b_1c_1\neq 0 \tag{3.7.23}$$

$$a_1d_1-b_1c_1=0, |a_1|+|b_1|>0, 2(a_1c_0+b_1d_0)\neq\pm(b_1c_0+a_1d_0)\neq 0 \tag{3.7.24}$$

$$a_1=b_1=c_1=d_1=0,\quad a_0d_0-b_0c_0\neq 0 \tag{3.7.25}$$

那么，$L(x)$的本征函数集是复平方可积函数空间上的完备集，任意属于$L_2[a,b]$的函数 $f(x)$可以做如下展开：

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(v_n,f)u_n(x)$$

其中，$v_n(x)$是伴随方程的特征函数，伴随算子$L^+(x)$的特征值κ_n与 $L(x)$的特征值μ_n意义对应且互为复共轭：

$$\kappa_n=\mu_n^*$$

需要说明的是，定理 3 中给出的条件是充分的而非必要的.其中的边界条件是齐次边界条件.

例 1 中的边界条件是符合(3.7.24)的，因此，其本征函数集构成完备集.函数$f(x)$依此完备集的展开是

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(v_n,f)u_n(x)+(v_\alpha,f)u_\alpha(x)$$

其中各本征函数已经在例 1 中求出.

非自伴的二阶常微分方程的实际例子是，在求解电磁场中的问题时，自变量是空间坐标，而物质的介电系数和磁导率有可能是复数，并且是分段连续的.当二阶微分算符中出现复系数，算符就不是自伴的.

§3.8 非齐次方程有解的条件

本节只考虑自变量为实数的情况.以上只叙述了齐次二阶微分方程的求解.对于非齐次微分方程，我们设 L 是个一般的二阶微分算符(不要求是自伴的)，将其一般的边值问题简写成如下形式.

$$\begin{cases}Ly(x)=f(x),a<x<b\\ \qquad B(y)=\gamma\end{cases}\tag{3.8.1}$$

其中边界条件 $B(y)=\gamma$ 是指如下两式的简写：

$$\begin{cases}\alpha_{1,1}y(a)+\alpha_{1,2}y'(a)+\beta_{1,1}y(b)+\beta_{1,2}y'(b)=\gamma_1\\ \alpha_{2,1}y(a)+\alpha_{2,2}y'(a)+\beta_{2,1}y(b)+\beta_{2,2}y'(b)=\gamma_2\end{cases}\tag{3.8.2}$$

可见(3.2.18)式.这是非齐次边界条件.若是齐次边界条件就写成 $B(y)=0$.在前面的边值问题中，有一个参量λ，在(3.8.1)中我们认为已经把它归并到算子 L 中了.注意(3.8.1)是个非齐次方程.

我们(3.8.1)分写成以下两个边值问题.

$$\begin{cases}Lw(x)=0,a<x<b\\ \qquad B(w)=\gamma\end{cases}\tag{3.8.3}$$

和

$$\begin{cases}Ls(x)=f(x),a<x<b\\ \qquad B(s)=0\end{cases}\tag{3.8.4}$$

前一个是齐次方程非齐次边界条件.后一个则是非齐次方程齐次边界条件.若这两个边值问题的解 $w(x)$ 和 $s(x)$ 都已经解出，那么边值问题(3.8.1)的解就是

$$y(x)=w(x)+s(x)\tag{3.8.5}$$

边值问题(3.8.3)是齐次方程加上非齐次边界条件.这正是本章前五节讨论的内容.这一边值问题是否有解和如何求解我们已经明确了.

现在考虑边值问题(3.8.4)是否有解.为此我们写下其相应的齐次方程的边值问题，

$$\begin{cases} Lu(x)=0, a<x<b \\ \quad B(u)=0 \end{cases} \tag{3.8.6}$$

和它的齐次伴随方程的边值问题，

$$\begin{cases} L^{\dagger}v(x)=0, a<x<b \\ \quad B^{\dagger}(v)=0 \end{cases} \tag{3.8.7}$$

齐次伴随边界条件，它要通过(3.7.3)式来求得.

对于(3.8.6)这样的边值问题，我们不能一般地预先知道是否有解.

我们能够确定的是，可以根据伴随齐次边值问题(3.8.7)是否有解，来判断相应的非齐次边值问题(3.8.4)是否有解.这一情况与 2.2.3 小节中的线性代数方程组有解的择一定理是类似的.

定理 1 (i)若齐次边值问题(3.8.6)无非零解，那么其伴随边值问题(3.8.7)也无非零解，此时边值问题(3.8.4)有且仅有一非零解.(ii)若齐次边值问题(3.8.6)有非零解，那么其伴随边值问题(3.8.7)也有非零解，这两个解不见得相同，因为算符的形式和边界条件是不同的，如 3.7 节讨论的情况.此时边值问题(3.8.4)有非零解的条件是，

$$(f,v)=0 \tag{3.8.8}$$

即，(3.8.4)中的非齐次项 $f(x)$与(3.8.7)中的解函数 $v(x)$正交.若(3.8.7)的解函数有 k 个，$v_1(x),v_2(x),\cdots,v_k(x)$，那么 $f(x)$与这 k 个函数都必须正交.

条件(3.8.8)很容易从以下内积看出来.

$$(Ls,v)-(s,L^{\dagger}v)=(f,v)=0 \tag{3.8.9}$$

根据伴随算符的定义，此式左边一定为零.

这个定理就是二阶线性非齐次微分方程有解的择一定理.它表示边值问题(3.8.4)有解的条件是二中选一，或者是齐次伴随边值问题(3.8.7)无非零解，或者齐次伴随边值问题(3.8.7)有非零解同时满足条件(3.8.8) .

式(3.8.8)也称为边值问题(3.8.4)有非零解的相容性条件.注意边界条件是齐次的.对于非齐次的边界条件，则不需要相容性条件.这个定理没有涉及(3.8.3).

本节内容只是判断非齐次微分方程是否有解.至于如何按照一定的方法来求出非齐次方程的解，在 3.1.3 小节中已经给出了一个方法，我们将在第六章利用格林函数的方法进行更全面的讨论.

本章重点

从一个特解求出另一个特解的刘维尔公式(3.1.14)。非齐次方程特解的表达式(3.1.24)。

三类齐次边界条件。

由勒让德方程(3.4.21)经过求导得到连带勒让德方程(3.4.34)。

连带勒让德方程是如何得到的。也就是从(3.4.40)得到(3.4.46)。

切比雪夫方程(3.4.49)，它经过变换后的形式(3.4.51)，它的解(3.4.55)(3.4.56)。

孤立奇点及其分类。如何判断二阶微分方程中的孤立奇点。

解的级数展开法，即 3.6.2 小节的第 3 部分。

轻点：

斯图姆-刘维尔型算子的形式、核函数、权函数。斯图姆-刘维尔特征值问题四个定理的基本内容。

对于正交多项式解集的斯图姆-刘维尔方程，知道如何查出其特征值和特征函数集。

由拉盖尔方程(3.4.8)经过求导得到连带拉盖尔方程(3.4.13)。

由切比雪夫方程(3.4.49)经过求导得到连带切比雪夫方程(3.4.65)。

小贴士

物理学的基本方程主要有经典力学的牛顿方程、量子力学的薛定谔方程(热传导中的扩散方程)、电磁场的麦克斯韦方程组。(还可以再算上相对论量子力学的狄拉克方程。)它们都是对于时间或者空间或者两者的二阶微分方程。在微分方程中，只有二阶微分方程的特征函数是完备的，可以作为基组来展开任一函数。一阶、三阶和更高阶微分方程的解都不具备这样的性质。我们这个宇宙在物理和数学两方面是不是凑得恰到好处？

可以说，本章介绍的微分方程就是一些具体的微分算子的形式。是第二章讲到的算子的特征方程的具体表现。

量子力学的一个基本假设是：力学量由厄米算符来表示。求算符特征值和特征函数常见的有两种方式。一是矩阵的方式。二是微分算符的方式。求微分算子的特征值和特征向量，就必然用到本章所介绍的方法。

本章 3.4 节介绍的四类方程在物理学中有着普遍的应用。一般说来，三维空间求解二阶线型微分方程，径向方程就涉及拉盖尔方程，角向方程就是勒让德方程。氢原子的特征方程的径向方程就是拉盖尔方程。厄米方程就是求解谐振子的本征方程。切比雪夫方程及其解可以看做是由最常见的方程(3.4.51)经过变换(3.4.50)得到的。

非齐次微分方程有解的条件可以和第二章的唯一性定理相对照。

在高量课程中，学到求解角动量的本征值本征函数时，可回过来对照本章 3.4.2 小节第 2 部分的球谐函数。

关于厄米多项式，还有一个公式：

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z^n}{2^n n!}\right)H_n(x)H_n(y)=\frac{\mathrm{e}^{x^2+y^2}}{\sqrt{1-z^2}}\exp\left(-\frac{x^2+y^2-2xy}{1-z^2}\right)$$

这一公式在高量中求一维谐振子的传播函数时会用到。

习题

1. 为什么物理问题经常在数学上表现为二阶微分方程？
(提示：考虑物理学中的基本方程.)
2. 仿照两个函数的情形，我们来看三个函数的情况.假设三个函数 $y_1(x), y_2(x), y_3(x)$ 都具有二阶导数，那么定义它们的朗斯基行列式

$$\Delta(y_1, y_2, y_3) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & y_3(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & y_3'(x) \\ y_1''(x) & y_2''(x) & y_3''(x) \end{vmatrix}$$

证明：如果 y_1, y_2, y_3 线性相关，则 $\Delta(y_1, y_2, y_3)$ 处处为零.由此可推知 n 个函数的类似的结论.
3. 仿照二阶线性常微分方程的一般理论，对于如下的三阶线性常微分方程

$$\begin{cases} y''' + f_2(x)y'' + f_1(x)y' + f_0(x)y = 0 \\ y(x_0) = a_0, y'(x_0) = a_1, y''(x_0) = a_2 \end{cases} \quad x, x_0 \in [a,b]$$

如果已知方程的三个解为 y_1, y_2, y_3，定义它们的朗斯基行列式 $\Delta(y_1, y_2, y_3)$ 如上题.

证明：(1) 如果 $\Delta(y_1, y_2, y_3)$ 在 $[a,b]$ 中某点等于零，那么 y_1, y_2, y_3 在 $[a,b]$ 上线性相关.(2) 如果 y_1, y_2, y_3 线性相关，$\Delta(y_1, y_2, y_3)$ 在 $[a,b]$ 上处处为零，如果它们线性无关，则 $\Delta(y_1, y_2, y_3)$ 处处不为零.

如果 y_1, y_2, y_3 是线性无关解，将 $\Delta(y_1, y_2, y_3)$ 对 x 求导，是否可以得到类似二阶情况的刘维尔公式(3.1.11)那样的等式？

由这些结论，容易推想 n 阶线性常微分方程的类似的结论.
5. 二阶微分算子的一般形式是(3.2.1)式，它也可以转化成(3.2.3)的形式，这时的算子就是形式自伴的.但是在上一章中，从(2.2.10a)式得到(2.2.23b)式的时候，要求 $p_2' = p_1$.对应于本章的(3.2.1)式，就是要求 $A'(x) = B(x)$.但是我们并没有使用 $A'(x) = B(x)$ 这一条件，就从算子的一般形式得到了自伴的形式，见(3.2.6)式.这是什么原因？
6. 证明，若函数 $y(x)$ 是斯图姆-刘维尔型方程的解，求解区域是 $[a,b]$，核函数 $p(x) > 0$，则对于三类齐次边界条件和自然边界条件，有

$$[p(x)y(x)y'(x)]_{x=a} \geq 0，\quad [p(x)y(x)y'(x)]_{x=b} \leq 0$$

7. 如果两个函数 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 都满足核函数为 $p(x)$ 的区间 $[a,b]$ 内的斯图姆-刘维尔型方程以及相同的边界条件，由这两个解构成朗斯基行列式 $W(y_1,y_2)$.证明，对于三类齐次边界条件，周期性边界条件，自然边界条件，下式总是成立的：

$$[\,J(y_1,y_2)\,]_a^b=[\,p(x)\,W(y_1,y_2)\,]_a^b=0 \qquad (1)$$

8. 说明，贝塞尔方程 $x^2y''+xy'+(x^2-\nu^2)y=0$ 和球贝塞尔方程 $x^2y''+2xy'+[x^2-l(l+1)]y=0$ 都不属于多项式的斯图姆-刘维尔系统.

9. 证明：式(3.3.3)中，若 $B(x)=$ 常数而 $A(x)$ 是二次多项式时，那么当 $x\to\infty$ 时，$p(x)$ 不能比 x 的任意次方的倒数都更快地趋于零.

10. 从(3.3.3)计算得到(3.3.4)式.

12. 用数学归纳法证明，当拉盖尔方程是 $xy''+(1-x)y'+\nu y=0$，连带拉盖尔方程的形式是 $xz''+(m+1-x)z'+(\nu-m)z=0$，其中 $z=y^{(m)}$.

13. 如果 $(1-x^2)^n$ 是二阶常微分方程的解，那么写出这个常微分方程.这个方程是否勒让德方程？由此方程出发，证明勒让德多项式 $P_n(x)=\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(1-x^2)^n=[(1-x^2)^n]^{(m)}$ 满足勒让德方程.再进一步证明连带勒让德函数 $(1-x^2)^{m/2}\dfrac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}P_n(x)=(1-x^2)^{m/2}[P_n(x)]^{(m)}$ 是连带勒让德方程

$$(1-x^2)\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}y-2x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}y+[n(n+1)-\frac{m^2}{1-x^2}]y=0$$

的解.

14. 从勒让德多项式 $P_n(x)$ 的多项式表示出发，推得 $P_n(x)$ 的奇偶性关系.由勒让德多项式 $P_n(x)$ 的母函数关系，求出 $P_n(1)$ 和 $P_n(-1)$ 的值.

15. 从勒让德多项式 $P_n(x)$ 的母函数关系出发，证明下列递推关系.

$$(n+1)P_{n+1}-(2n+1)xP_n+nP_{n-1}=0$$

$$nP_n-xP_n'+P_{n-1}'=0$$

$$nP_{n-1}-P_n'+xP_{n-1}'=0$$

$$(2n+1)P_n - P'_{n+1} + P'_{n-1} = 0$$

16. 证明：对于勒让德多项式 $P_n(x)$，$\int_{-1}^{1} x^n P_n(x)\mathrm{d}x = \dfrac{2^{n+1}(n!)^2}{(2n+1)!}$.

17. 将两个函数 $f_1(x) = \begin{cases} -1 & -1 \le x < 0 \\ +1 & 0 < x \le 1 \end{cases}$ 和 $f_2(x) = |x|,\quad -1 \le x \le 1$ 分别用勒让德多项式展开，求各自的展开系数.

18. 将函数 $f(x) = \begin{cases} 0 & -1 \le x < \alpha \\ 1/2 & x = \alpha \\ 1 & \alpha < x \le 1 \end{cases}$ 用勒让德多项式展开，求展开系数.

20. 已知前几阶勒让德函数的表达式是：

$$P_0(x) = 1, P_1(x) = x, P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1), P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x), P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)$$

(1) 证明：函数

$$\tanh^{-1} x = \frac{1}{2}\ln(\frac{1+x}{1-x})$$

是零阶勒让德方程的解.这个函数能否利用刘维尔公式得到？

(2) 将 $l = 0,1,2$ 代入刘维尔公式，计算得到第二类勒让德函数 $Q_0(x), Q_1(x), Q_2(x)$ 的表达式.

(3) 如果令 $x = \cos\theta$，写出 $Q_0(\cos\theta), Q_1(\cos\theta), Q_2(\cos\theta)$ 以θ为自变量的表达式.

(4) 由公式(3.4.36)和(3.4.37)，写出以下第一和第二类连带勒让德函数的表达式：
$P_1^1(x), P_2^1(x), P_2^2(x), P_3^1(x), P_3^2(x), P_3^3(x), Q_1^1(x), Q_2^1(x), Q_2^2(x)$.

21. 用数学归纳法证明，当比雪夫方程的形式是 $(1-x^2)y'' - xy' + \nu^2 y = 0$，连带切比雪夫方程的形式是 $(1-x^2)z'' - (2m+1)xz' + (\nu^2 - m^2)z = 0$，其中 $z = y^{(m)}$.

22. 证明

$$\frac{1-t^2}{1-2xt+t^2} = T_0(x) + 2\sum_{n=1}^{\infty} T_n(x)t^n$$

(提示：利用 Chenbyshev 多项式的母函数展开.)

23. 证明第二类切比雪夫函数 $U_n(x)$ 与切比雪夫多项式 $T_n(x)$ 的关系为：
$U_n(x) = \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{n}\dfrac{\mathrm{d}T_n(x)}{\mathrm{d}x}$.并从此式出发，利用上一章习题 34 关于切比雪夫多项式 $T_n(x)$ 的结果，

(1) 求特殊点的值：$U_n(1)=?$ $U_n(-1)=?$ $U_{2n+1}(0)=?$ $U_{2n}(0)=?$

(2) 写出奇偶性关系，即$U_n(-x)$与$U_n(x)$的关系.

(3) 证明递推公式

$$U_{n+1}-2xU_n+U_{n-1}=0$$

$$(1-x^2)U_n'=nxU_n-nU_{n+1}$$

$$2(1-x^2)U_n'=n(U_{n-1}-U_{n+1})$$

$$(1-x^2)U_n'=nU_{n-1}-nxU_n$$

$$(1-x^2)U_n''(x)-xU_n'(x)+n^2U_n(x)=0$$

(4) 证明 $U_n(x)$ 具有带权函数 $\rho(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 的正交性：

$$\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,U_n(x)\,U_m(x)\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\,\delta_{nm}\,.$$

26. 对于方程$y''-B_1xy'+\lambda y=0$，做什么样的变换，可以变为厄米方程的形式？这个方程的特征函数和特征值是什么？证明，由规一化得到厄米多项式$He_n(x)$的常数因子是$C_n=2^{n/2}$.

27. (1) 证明厄米多项式$H_n(x)$的母函数关系. (2) 从$H_n(x)$的母函数关系推导$H_n(x)$的微商表示.

(提示：(1)写出 $\exp(2xt)$和$\exp(-t^2)$的泰勒展开式，相乘以后，利用公式 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}A(k,n)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{[n/2]}A(k,n-2k)$. (2) 对母函数的展开式两边乘以$\exp(-x^2)$，再对 t 求导 m 次，左边可写成对 x 的求导.)

28. 从厄米多项式$H_n(x)$的多项式表示出发，推得$H_n(x)$的奇偶性关系.

29. 从厄米多项式$H_n(x)$的母函数关系出发，

(1) 证明下列递推关系.

$$H_{n+1}-2xH_n+2nH_{n-1}=0$$

$$H_n' = 2nH_{n-1}$$

$$H_n - 2xH_{n-1} + H_{n-1}' = 0$$

$$xH_n' - nH_{n-1}' - nH_n = 0$$

(2) 求出 $x=0$ 点的值： $H_{2n}(0)=?, H_{2n+1}(0)=?$

30. (1) 证明厄米多项式的积分表示式是

$$H_n(x) = \frac{2^n}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(x+\mathrm{i}t)^n \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$$

(2) 利用这个积分表示式推导出厄米多项式的级数表示(3.4.82)式.
(提示： (1) 只要证明这个积分表示式是满足厄米方程 $H_n''(x) - 2xH_n'(x) + 2nH_n(x) = 0$ 的. (2) 将圆括号内做二项式展开，然后对 t 做积分.)

39. 找出下列方程的奇点，并说明奇点的类型.

(1) $z^2(z-1)w''(z) - 2(z-1)w'(z) + 3zw(z) = 0$

(2) $z(3z+1)w''(z) - (z+1)w'(z) + 2w(z) = 0$

40. 证明， $z=\infty$ 为方程(3.6.45)的正则点的充要条件是：在 $z=\infty$ 附近有展开式(3.6.51)，其中 $a_1 = 2, b_2 = b_3 = 0$.

41 将二阶微分方程

$$w''(z) + \frac{\alpha}{z^2}\,w(z) = 0$$

转化成一阶微分方程组.求其一个基本解组，并指出α取何值时所有的解都是有理函数.
(提示：写出 A_0 矩阵.求出它的两个特征值，它们是都依赖于α.讨论这两个特征值之差为 0，为偶数，为奇数，为非整数这几种情况时的解.)

42. 求下列方程在 $z=0$ 附近的级数解.

(1) $w''(z) + bz^2w(z) = 0$， $w''(z) + bz^2w'(z) = 0$

(2) $w''(z) + zw'(z) + w(z) = 0$

(提示：先将方程写成一阶微分方程组.由此写出 A_0 矩阵.求出它的两个特征值，λ 和μ.把两个解写成 $w_1(z) = z^\lambda\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n$ 和 $w_2(z) = z^\mu\sum_{n=0}^{\infty}b_n z^n$ 的形式，代入到原方程中，求出各系数.此题的方程中 z=0 非是常点，所以两个特解都是级数，无对数项.
级数解中，第一个非零系数总是设为 1.)

43. 求下列方程在 $z=\infty$ 附近的级数解：

(1) $z^4 w''(z)-(z-2z^2)w'(z)+w(z)=0$

(2) $(z^2-1)w''(z)+2zw'(z)+w(z)=0$

(提示：做ξ=1/z之后，按照上题的步骤求解.)

47. 有以下边值问题：

$$u'(x)=f(x)，\ 0<x<1；\ u(0)=0，\ u(1)=0 \tag{1}$$

这是个一阶微分方程，但是有两个边界条件.边界条件太多了.但这并不表示这个边值问题就一定没有解.运用微分方程边值问题解的择一定理.请写出(1)的伴随边值问题.这一伴随问题的解是什么？然后运用择一定理的相容性条件(3.8.8),写出(1)有解的条件.选择一个满足相容性条件的函数 $f(x)$，求出(1)的解.

48. 写出以下边值问题：

$$-u''(x)=f(x)，\ 0<x<1; u(1)-u(0)=0, u'(1)-u'(0)=0$$

有解的条件.

49. 若二阶微分算子(3.7.4)中的

$$p(x)=1$$

边界条件是：

$$\begin{cases}\alpha_1 u(a)+\beta_1 u(b)=0\\ \alpha_2 u'(a)+\beta_2 u'(b)=0\end{cases}$$

那么，伴随方程中函数 v 满足怎样的边界条件？此时，如果边界条件中的系数都是实数，边值问题是否自伴的？

50. 求伴随边值问题(3.7.18)本征函数系，并证明(3.7.19), (3.7.20)和(3.7.21)三式.

附录 3A 初值问题(3.1.4)的解的存在唯一性的证明

我们要证明的是如下的一阶线性微分方程组的解的存在唯一性.

$$\begin{cases}y_1'=a_{11}(x)y_1+a_{12}(x)y_2\\ y_2'=a_{21}(x)y_1+a_{22}(x)y_2 \qquad x\in[a,b]\\ y_1(x_0)=\alpha, y_2(x_0)=\beta\end{cases} \tag{3A.1}$$

其中系数函数 $a_{ij}(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续.既然是在闭区间上连续，那么它们一定有一上界.设这一上界为 M.

$$|a_{ij}(x)|\le M \tag{3A.2}$$

将(3A.1)两端积分成如下的形式，

$$\begin{cases} y_1 = \alpha + \int_{x_0}^{x} \mathrm{d}x[a_{11}(x)y_1 + a_{12}(x)y_2] \\ y_2 = \beta + \int_{x_0}^{x} \mathrm{d}x[a_{21}(x)y_1 + a_{22}(x)y_2] \end{cases} \tag{3A.3}$$

成为一积分方程组，它们是满足原微分方程组的初始条件的.其中为简便起见，我们设上限 $x \ge x_0$.证明了(3A.3)解的存在唯一性，也就证明了(3A.1)的存在唯一性.本附录是打算利用 2.2.1 小节中的收缩算子的概念进行证明.

定义度量空间 K 中的一个元是有两个函数组成的

$$Y(x) = \{y_1(x), y_2(x)\}, x \in [a,b] \tag{3A.4}$$

这是 x 的函数.并且定义，此空间中的两个元 Y 和 Z 之间与 x 有关的距离为

$$\rho(Y(x), Z(x)) = \rho_1(y_1(x), z_1(x)) + \rho_2(y_2(x), z_2(x)) \tag{3A.5}$$

其中

$$\rho_i(y_i(x), z_i(x)) = \max_{t \in [x_0, x]} |y_1(t) - z_1(t)|, i = 1, 2 \tag{3A.6}$$

由此，式(3A.3)左边构成度量空间 K 中如(3A.4)定义的一个元 Y.右边可以看做是一个算子 T 作用在这个元上的效果，即(3A.3)写成如下的算子作用的形式：

$$Y = TY \tag{3A.7}$$

现在我们逐次迭代，即以 Y_0 作为初始的元，代入方程(3A.3)右侧后，得到左侧的结果为 Y_1.再把代入方程(3A.3)右侧，得到左侧的结果为 Y_2.如此不断进行下去，迭代得到的序列为

$$Y_0, Y_1, Y_2, \ldots = \{y_{10}(x), y_{20}(x)\}, \{y_{11}(x), y_{21}(x)\}, \{y_{12}(x), y_{22}(x)\}, \cdots \tag{3A.8}$$

如果我们能够证明

$$\rho(Y_{n+1}, Y_n) = \rho(TY_n, TY_{n-1}) \le \lambda \rho(Y_n, Y_{n-1}) \tag{3A.9}$$

其中 $\lambda < 1$，即 T 是个收缩算子，那么，根据 2.2.1 小节的定理 1，方程就有且仅有唯一解.也就是说，序列(3A.8)收敛于(3A.3)的解.

将 Y_2 减去 Y_1，则其中第一式为

$$y_{12} - y_{11} = \int_{x_0}^{x} \mathrm{d}x[a_{11}(x)(y_{11} - y_{10}) + a_{12}(x)(y_{21} - y_{20})] \tag{3A.10}$$

两边取绝对值

$$\begin{aligned} &|y_{12} - y_{11}| \le \int_{x_0}^{x} \mathrm{d}x[|a_{11}(x)||y_{11} - y_{10}| + |a_{12}(x)||y_{21} - y_{20}|] \\ &\le \rho_1(y_{11}, y_{10}) \int_{x_0}^{x} \mathrm{d}x |a_{11}(x)| + \rho_2(y_{21}, y_{20}) \int_{x_0}^{x} \mathrm{d}x |a_{12}(x)| \\ &\le [\rho_1(y_{11}, y_{10}) + \rho_2(y_{21}, y_{20})] M(x - x_0) \\ &= \rho(Y_1, Y_0) M(x - x_0) \end{aligned} \tag{3A.11}$$

其中已用到(3A.2)式.式(3A.11)右边已经是$[x_0,x]$区间上的最大值，因此左边可以写成距离.即

$$\rho_1(Y_2, Y_1) \le \rho(Y_1, Y_0) M(x - x_0) \tag{3A.12a}$$

同理可得

$$\rho_2(Y_2,Y_1)\le\rho(Y_1,Y_0)M(x-x_0) \tag{3A.12b}$$

此两式相加，得到

$$\rho(Y_2,Y_1)=\rho(TY_1,TY_0)\le 2\rho(Y_1,Y_0)M(x-x_0) \tag{3A.13}$$

若$2M(x-x_0)<1$，那么(3A.13)就符合(3A.9)式.但是实际上$2M(x-x_0)<1$的条件不见得能够满足.

我们可以再迭代一次，由(3A.11)式可知，

$$|y_{13}-y_{12}|\le\int_{x_0}^{x}\mathrm{d}x[|a_{11}(x)||y_{12}-y_{11}|+|a_{12}(x)||y_{22}-y_{21}|]$$

$$=2\rho(Y_1,Y_0)M^2\int_{x_0}^{x}\mathrm{d}x(x-x_0)=2\rho(Y_1,Y_0)M^2\frac{(x-x_0)^2}{2}$$

也就是得到

$$\rho_1(Y_3,Y_2)\le 2\rho(Y_1,Y_0)M^2\frac{(x-x_0)^2}{2}$$

并且进而得到

$$\rho(T^2Y_1,T^2Y_0)=\rho(Y_3,Y_2)\le 4\rho(Y_1,Y_0)M^2\frac{(x-x_0)^2}{2}$$

再迭代一次可得

$$\rho(T^3Y_1,T^3Y_0)=\rho(Y_4,Y_3)\le 16\rho(Y_1,Y_0)M^3\frac{(x-x_0)^3}{3!}$$

易见，经过 n 次迭代之后，可有

$$\rho(T^nY_1,T^nY_0)=\rho(Y_{n+1},Y_n)\le\rho(Y_1,Y_0)\frac{(4M)^n}{4}\frac{(x-x_0)^n}{n!} \tag{3A.14}$$

随着 n 的增加，(3A.14)式右边的系数$\frac{(4M)^n}{4}\frac{(x-x_0)^n}{n!}$显然是不断减小的.设，当 n=N 时，有

$$\frac{(4M)^N}{4}\frac{(x-x_0)^N}{N!}=\lambda<1$$

这时，我们可定义一个新的算子$T^N=V$，它满足下式，

$$\rho(VY_1,VY_0)=\rho(T^NY_1,T^NY_0)\le\lambda\rho(Y_1,Y_0)<\rho(Y_1,Y_0)$$

可见，算子 V 是一个收缩.结论，从(3A.3)式出发进行迭代，一定可求得解，并且解是唯一的.当(3A.3)中$x<x_0$时，证明过程是类似的.