Chapter 5

Dirac Delta Function

§5.1 δ函数的定义与性质

5.1.1δ函数的定义

狄拉克δ函数的定义如下，同时也说明了它的性质和作用.

(i) $$\delta(x)=\begin{cases}+\infty, & x=0\\ 0, & x\neq 0\end{cases} \quad \textbf{(5.1.1a)}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)\mathrm{d}x=1 \quad \textbf{(5.1.1b)}$$

式**(5.1.1b)**有时也写成另一形式：

$$\int_a^b\delta(x)\mathrm{d}x=\begin{cases}1, 0\in(a,b)\\ 0, 0\notin(a,b)\end{cases} \quad \textbf{(5.1.1c)}$$

(ii) $$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\delta(x)\mathrm{d}x=f(0) \quad \textbf{(5.1.2)}$$

(iii) $$\int_{-\infty}^{\infty}f(x')\delta(x'-x)\mathrm{d}x'=f(x) \quad \textbf{(5.1.3)}$$

在**(i)**和**(ii)**中，奇点是在 ***x*=0** 处. **(iii)**是奇点位于任意的 ***x*** 点上，是最一般的情况.**(i)**中可以看成是 $f(x)=1$ 的特例.性质**(iii)**也被称为δ函数的取样性质.

式**(5.1.1a)**和**(5.1.1b)**狄拉克提出的δ函数的最原始的定义.

按照原先的经典积分理论，$\delta(x)$ 既然只在一点 $x=0$ 处不为零，就相当于一个零函数的定义，那么它在任意(有限或无限)区间上的积分应当为零，见**(2.1.25)**式.故式**(5.1.1a)**和**(5.1.1b)**是相互冲突的.这是因为，通常讲的广义零函数在孤立点上的取值是有限的，而式**(5.1.1a)**表示在孤立点上取值是无限的.因而可以说，狄拉克δ函数并不是通常意义下的函数，无法用经典的方法对它进行代数分类和分析的运算.然而狄拉克δ函数确实能反映许多为经典函数不能反映的客观现象.例如只有一个电源和电容而无电阻的电路在由断开到接通时电流就表现出一个δ函数的行为.

狄拉克δ函数还在以下一些事例中表现其物理意义.在一个没有体积的几何点上放置有限的质量或者电荷量；在传热过程中，在杆的某处(例如一端)的几何点上传入有限的热量；瞬时冲击力：在 ***t*=0** 的时刻一杆受到一冲击力，在时间长度为

零的情况下获得一个有限的冲量；等等.

为了使实际中出现的奇异性得到合理的解释，并且能在实际应用中对其进行正确的运算，就必须拓展函数的概念.这就促成了广义函数的产生.

5.1.2 δ函数是一个广义函数

首先，把δ函数看成是函数空间上的泛函.

由上述定义式可以看出，δ函数只有在作用于某个函数的时候才真正体现出它的价值来.这实质上是一种泛函，第一章中已经定义了泛函的概念.现在定义连续函数空间Φ上的一个泛函δ如下.

$$\delta[\varphi(x)]=\varphi(0) \qquad \textbf{(5.1.4)}$$

这个泛函具有线性性质：

$$\delta[\alpha\varphi_1(x)+\beta\varphi_2(x)]=\alpha\delta[\varphi_1(x)]+\beta\delta[\varphi_2(x)] \qquad \textbf{(5.1.5)}$$

证明：$\delta[\alpha\varphi_1(x)+\beta\varphi_2(x)]=\alpha\varphi_1(0)+\beta\varphi_2(0)=\alpha\delta[\varphi_1(x)]+\beta\delta[\varphi_2(x)]$.

定义 1 如果某函数空间Φ上的泛函δ，具有线性性质(5.1.5)，则称δ为空间Φ上的线性泛函，空间Φ上的线性泛函又称为空间Φ上的广义函数.

显然，线性泛函是泛函的一个种类.

我们来考虑积分型的广义函数 ***f***.

$$(f,\varphi)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x \qquad \textbf{(5.1.6)}$$

其中 ***f*** 是一给定的函数，$\varphi(x)$属于所考虑的函数空间Φ，这里还假定右端的积分存在.写成这个形式后，此时的(f,φ)就与泛函$f[\varphi(x)]$具有完全相同的含义了.例如，

$$(\delta(x),\varphi(x))=\varphi(0) \qquad \textbf{(5.1.7)}$$

这与(5.1.4)式是一样的.显然，由(5.1.6)定义的广义函数是具有(5.1.5)的线性性质的.因此，

$$f[\varphi(x)]=(f,\varphi)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x. \qquad \textbf{(5.1.8)}$$

在(5.1.6)的定义中，右边$f(x)$是一个函数而左边的 ***f*** 是一个泛函.不同的函数$f(x)$给出不同的广义函数 ***f***.广义函数的概念就是在这个意义下把函数的概念推广了.或者说，在这个意义下，作为泛函的$f(x)$也是一个广义函数.

齐次，把δ函数看成是一个广义函数.$\delta(x)$函数作为一个广义函数，它的特点是，本身又可以作为一个普通函数来定义，它的自变量与它的容许函数φ的自变量相同.在一维空间中，如(5.1.1a)式那样，尽管在原点处是不连续的，而且其值为无穷大.

5.1.3 δ函数的傅里叶变换和拉普拉斯变换

除了在奇点 $x=0$ 以外 $\delta(x)=0$，因此，$\delta(x)$ 的行为几乎处处像一个普通函数.对于普通函数所做的一些运算也可以用于 $\delta(x)$ 函数.例如，我们可以对 $\delta(x)$ 函数作傅里叶变换.根据傅里叶变换的定义式，我们立即有

$$F[\delta(t)]=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t=1 \tag{5.1.9}$$

因此，**1** 的傅里叶反变换就是 $\delta(x)$ 函数.

$$\delta(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega \tag{5.1.10}$$

此式说明，$\delta(x)$ 函数可以表示成一种积分形式.我们在此顺便给出 $\delta(x)$ 的另一种积分表示.考虑积分 $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\omega'-\omega}\frac{1}{\omega'-\omega_0}\mathrm{d}\omega'$.当 $\omega\neq\omega_0$ 时，它等于 $\frac{1}{\omega-\omega_0}\int_{-\infty}^{\infty}(\frac{1}{\omega'-\omega}-\frac{1}{\omega'-\omega_0})\mathrm{d}\omega'$，两个积分相等，结果为零.注意：$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}\omega'}{\omega'-\omega}=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}\omega'}{\omega'}=0$，这是因为被积函数是奇函数，积分结果为零.当 $\omega=\omega_0$ 时，$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}\omega'}{(\omega'-\omega)^2}=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}\omega'}{\omega'^2}=2\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{d}\omega'}{\omega'^2}=\frac{2}{\omega'}\Big|_0^{\infty}=\infty$.结合起来，有

$$\delta(\omega-\omega_0)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\omega'-\omega}\frac{1}{\omega'-\omega_0}\mathrm{d}\omega' \tag{5.1.11}$$

这一公式在处理具体的物理问题时会用到.

$\delta(x)$ 函数的拉普拉斯变换.对于这个变换要特别小心.定义式应该为

$$L[\delta(t)]=\int_{-0^+}^{\infty}\delta(t)\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t=1 \tag{5.1.12a}$$

或者，把 $\delta(x)$ 函数看成是 $\delta(x)=\delta(x-0^+)$.

$$L[\delta(t)]=L[\delta(t-0^+)]=\int_0^{\infty}\delta(t-0^+)\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t=1 \tag{5.1.12b}$$

相应地，拉普拉斯反变换是

$$L^{-1}[1]=\delta(t-0^+) \tag{5.1.12c}$$

如果积分 **(5.1.12a)**取为 $L[\delta(t)]=\int_{0^+}^{\infty}\delta(t)\mathrm{e}^{-pt}\ \mathrm{d}t\ =0$，就不能与**(5.1.12c)**构成互为拉普拉斯变换和反变换.

5.1.4 广义函数的导数和积分

为了保证**(5.1.6)**式右端的积分存在，如果我们加在函数 $\varphi(x)$ 上条件越强，则对 $f(x)$ 的要求就越弱.这样在空间Φ上的广义函数就越多.通常取Φ为无穷次可微并且只在一个有限区间上不为零的全体，这种函数空间称为空间 $\boldsymbol{K}$.

现在来看广义函数的导数.为此，先设 $f(x)$ 是一个普通的可微函数，那么，对函数 $f'(x)$所确定的广义函数 f'，有

$$\begin{aligned}(f'(x),\varphi(x)) &= \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\varphi(x)\mathrm{d}x \\ &= f(x)\varphi(x)\big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi'(x)\mathrm{d}x = -(f(x),\varphi'(x))\end{aligned} \quad \textbf{(5.1.13)}$$

其中 $\varphi(x)\in\boldsymbol{K}$，故有 $\varphi(\pm\infty)=0$.

由此，我们可用**(5.1.13)**式作为广义函数的导数的定义.设 $f(x)$ 是已给广义函数，因为$\varphi(x)\in\boldsymbol{K}$ 时，$\varphi'(x)\in\boldsymbol{K}$，所以泛函 $(f(x),\varphi'(x))$ 是有确定意义的.故可用下式定义广义函数

$$(f'(x),\varphi(x)) = -(f(x),\varphi'(x)),\varphi(x)\in\boldsymbol{K} \quad \textbf{(5.1.14)}$$

作为 $f(x)$ 的导数 f'.

上述结果是对于一维情形讨论的，可推广至多维情形.例如三维情形，这时函数空间 $\boldsymbol{K}$ 是指对各自变量无穷次可微且在某个有限区域外为零的函数 $\varphi(x,y,z)$ 的全体.广义函数 $f(x,y,z)$ 的导数如上类似定义.例如

$$(\frac{\partial f}{\partial x},\varphi) = -(f,\frac{\partial}{\partial x}\varphi)$$

$$(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2},\varphi) = -(\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial}{\partial y}\varphi) = (f,\frac{\partial^2}{\partial y^2}\varphi)$$

$$\varphi\in\boldsymbol{K}$$

特别地，$\delta(x)$ 函数的导数是广义函数

$$(\delta'(x),\varphi(x)) = -(\delta(x),\varphi'(x)) = -\varphi'(0)$$

写成积分形式，就是

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta'(x)\ \varphi(x)\,\mathbf{d}x = -\varphi'(0)$$

[$\delta'(x)$ 的物理意义：静电学中的电偶极子的电荷密度分布就可用 $\delta'(x)$ 描述.**]**

同样，$\delta(x)$ 函数的二阶导数是

$$(\delta''(x),\varphi(x)) = -(\delta'(x),\varphi'(x)) = (\delta(x),\varphi''(x)) = \varphi''(0)$$

一般地，

$$(\delta^{(n)}(x),\varphi(x)) = (-1)^n(\delta(x),\varphi^{(n)}(x)) = (-1)^n\varphi^{(n)}(0)$$

有了广义函数的导数的定义，就可以理解微分方程

$$y' = \delta(x)$$

的意义了.把方程两边都看成广义函数，那么对任意 $\varphi(x)\in \boldsymbol{K}$，有

$$(y',\varphi(x)) = (\delta(x),\varphi(x)) = \varphi(0)$$

阶跃函数，也称海维赛德函数，

$$\theta(x) = \begin{cases} 0, & x<0 \\ 1/2, & x=0 \\ 1, & x>0 \end{cases}$$

满足上式.由广义函数的导数的定义

$$(\theta'(x)\ ,\varphi(x)) = -(\theta(x),\ \varphi'(x)) = -\int_{-0^+}^{\infty}\varphi'(x)\ \mathrm{d}x = \varphi(0)$$

由此，我们得到 $\delta(x)$ 函数的积分是

$$\int_{-\infty}^{x}\delta(t)\mathrm{d}t = \theta(x)$$

或者

$$\int_{-\infty}^{x}\delta(t-x')\mathrm{d}t = \theta(x-x')$$

尽管几乎所有的教科书上都写着

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\theta(x) = \delta(x) \tag{5.1.15}$$

这样一个等式，作者还是要特别指出，对函数 $\theta(x)$ 的这个导数其实还有一个无穷小量.这与 $\theta(x)$ 和 $\delta(x)$ 这两个函数都在原点处不连续有关.用阶跃函数的傅里叶变换可看出严格的关系式.

$$\theta(t-t') = \frac{-1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varepsilon(t-t')}}{\varepsilon+\mathrm{i}0^+}\mathrm{d}\varepsilon \tag{5.1.16a}$$

此式的证明是：$t-t'>0$ 时在下半平面补上回路，$t-t'<0$ 时在上半平面补上回路.由**(5.1.16a)**式可以得到，

$$\frac{\partial}{\partial t}\theta(t-t') = \frac{-1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{-\mathrm{i}\varepsilon\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varepsilon(t-t')}}{\varepsilon+\mathrm{i}0^+}\mathrm{d}\varepsilon$$

$$=\frac{-1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{-\mathrm{i}(\varepsilon+\mathrm{i}0^{+})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varepsilon(t-t')}}{\varepsilon+\mathrm{i}0^{+}}\mathrm{d}\varepsilon+\frac{-1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{-\mathrm{i}(-\mathrm{i}0^{+})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varepsilon(t-t')}}{\varepsilon+\mathrm{i}0^{+}}\mathrm{d}\varepsilon$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varepsilon(t-t')}\mathrm{d}\varepsilon-0^{+}\frac{-1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varepsilon(t-t')}}{\varepsilon+\mathrm{i}0^{+}}\mathrm{d}\varepsilon$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\theta(t-t')=\delta(t-t')-0^{+}\theta(t-t') \qquad \textbf{(5.1.16b)}$$

一般情况下，**(5.1.16b)**右边的小量是可以忽略的.这就回到了**(5.1.15)**式.但是如果**(5.1.16b)**式的右边需要除以到分母上的时候，就应该尽量保留这一小量，因为它表示极点的位置是偏离实轴的．正如**(5.1.16a)**式中分母上的无穷小量不能扔掉一样.这一点在物理上有着重要的应用，不可忽视.

还要注意，在实际应用中应该写 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\theta(x)+c)=\delta(x)$，其中常数 c 由具体的条件而定.

对于δ函数的导数，我们给出以下最简单又是很有用的公式.

首先

$$x\delta(x)=0 \qquad \textbf{(5.1.17)}$$

这是因为当 $x\neq 0$ 时，左边显然为零.当 $x=0$ 时，左边也为零.这可在两边乘以函数 $\varphi(x)\in \boldsymbol{K}$ 之后作积分得证. $\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)x\delta(x)\mathrm{d}x=0$

事实上，容易证明 $x^{\alpha}\delta(x)=0,\alpha>0$. $\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)x^{\alpha}\delta(x)\mathrm{d}x=0$.因此，当α是一个无论多么小的一个有限的正数，$x\to 0$ 时，当 $\delta(x)$ 总是比 $x^{-\alpha}$ 更慢地趋于无穷大.

$$[x\delta(x)]'=\delta(x)+x\delta'(x)=0$$

因此

$$x\delta'(x)=-\delta(x) \qquad \textbf{(5.1.18)}$$

5.1.5 δ函数中的定值是个复数的情况

本章一开头定义δ函数的时候，主要是通过

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\delta(x-a)\mathrm{d}x=f(a) \qquad \textbf{(5.1.19)}$$

来体现δ函数的作用.此式中，定值 a 是一个实数.若 $a=z$ 是一个复数，该如何来定

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\ \delta(x-z)\ \mathrm{d}x \qquad \textbf{(5.1.20)}$$

积分的结果呢?

我们知道，若一个函数 $f(x)$ 是任意次可导的，那么它可作泰勒展开，

$$f(x+a)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^{n}}{n!}f^{(n)}(x)$$

这一展开对于 a 是复数也适用.δ函数也能够像普通函数那样做泰勒展开，

$$\delta(x+a)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n}{n!}\delta^{(n)}(x) \tag{5.1.21}$$

现在将此式扩展为 ***a*=*z*** 是复数的情况.那么，对于积分式**(5.1.20)**可将其中的δ函数按**(5.1.21)**做泰勒展开.

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-z)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-z)^n}{n!}\delta^{(n)}(x)\mathrm{d}x\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-z)^n}{n!}(-1)^n\int_{-\infty}^{\infty} f^{(n)}(x)\delta(x)\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}f^{(n)}(0)=f(z)\end{aligned} \tag{5.1.22}$$

其中对第 ***n*** 项做了 ***n*** 次分部积分.最后结果与 ***a*** 是实数的**(5.1.19)**形式上完全一样.由此，可得如下的傅里叶变换

$$F[\delta(t-z)]=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega z} \tag{5.1.23}$$

和傅里叶反变换

$$\delta(t-z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega(t-z)}\mathrm{d}\omega \tag{5.1.24}$$

其中 ***z*** 是复数.

按照式**(5.1.1c)**，当奇点在积分路径上时，积分才不为零.这是奇点在实轴上的情况.本小节的情况是，式**(5.1.22)**和式**(5.1.24)**中的 ***z*** 不在实轴上.这时，我们定义式**(5.1.22)**~式**(5.1.24)**成立.其中，式**(5.1.24)**已经在数学手册中明确给出. 这种情况下，我们可以把**(5.1.22)**中的积分路径理解成这样的：积分路径是从 $x=-\infty$ 到 $x=\infty$，但并不是沿着整个实轴，而是被扭曲偏离实轴而进入复平面，使得 ***z*** 点刚好在积分路径上.

§5.2 δ函数视为普通函数的弱收敛极限

5.2.1 普通函数的弱收敛的几种形式

由**(5.1.1)**式定义的 $\delta(x)$ 函数是最原始的形式.不过，这一形式对于一些公式的证明，计算导数，处理实验数据等不是很方便.因此经常把 $\delta(x)$ 函数写成带一个参数的普通函数在参数趋于某一值时的极限.

令 $\delta_\alpha(x)$ 是由指标α为参数的函数集，它具有性质：

(i) $\lim\limits_{\alpha\to\alpha_0}\delta_\alpha(x)=0$，对于所有 $x\neq0$. **(5.2.1)**

(ii) 对于任何α

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta_\alpha(x)\mathrm{d}x=1 \tag{5.2.2}$$

始终满足.

(iii) $\lim\limits_{\alpha\to\alpha_0}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta_\alpha(x)\mathrm{d}x=f(0)$ **(5.2.3a)**

并且极限过程与积分次序可交换.为了便于证明，此式也可与(5.2.2)式结合，写成以下形式.

$$\lim_{\alpha\to\alpha_0}\left|\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta_\alpha(x)\mathrm{d}x - f(0)\right| = \lim_{\alpha\to\alpha_0}\left|\int_{-\infty}^{\infty}\delta_\alpha(x)[f(x)-f(0)]\mathrm{d}x\right| = 0 \qquad \textbf{(5.2.3b)}$$

这一性质也等价于

(iv) $\lim\limits_{\alpha\to\alpha_0}\delta_\alpha(x) = +\infty$，当 $x=0$ **(5.2.4)**

当 $\delta_\alpha(x)$ 满足性质**(i)**和**(ii)**，并且满足**(iii)**与**(iv)**之一，我们就记

$$\lim_{\alpha\to\alpha_0}\delta_\alpha(x) = \delta(x) \qquad \textbf{(5.2.5)}$$

此时我们称，**δ**函数为 $\delta_\alpha(x)$ 的弱收敛极限.弱收敛是指，只要以某种方式收敛即可，不要求一致收敛、逐点收敛、平均收敛等特定的收敛形式. 也可以说，只要满足**(5.2.3b)**式，即为弱收敛.

以下是几种常用的 $\delta_\alpha(x)$ 函数.

1) $\delta_c(x) \equiv \begin{cases} 1/c, & |x| \le c/2 \\ 0, & |x| > c/2 \end{cases}$， $c\to 0^+$ **(5.2.6)**

2) $\delta_\alpha(x) = \dfrac{1}{\alpha\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-x^2/\alpha^2}$， $\alpha\to 0^+$，**(高斯脉冲)** **(5.2.7a)**

$\delta_t(x) = \dfrac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\exp\left[-\dfrac{x^2}{4a^2 t}\right]$， $t\to 0^+$，**(热传导脉冲)** **(5.2.7b)**

3) $\delta_\varepsilon(x) \equiv \dfrac{1}{\pi}\dfrac{\varepsilon}{\varepsilon^2+x^2}$， $\varepsilon\to 0^+$ **(5.2.8)**

4) $\delta_\alpha(x) \equiv \dfrac{\sin(x/\alpha)}{\pi x}$， $\alpha\to 0^+$ **(5.2.9a)**

或者

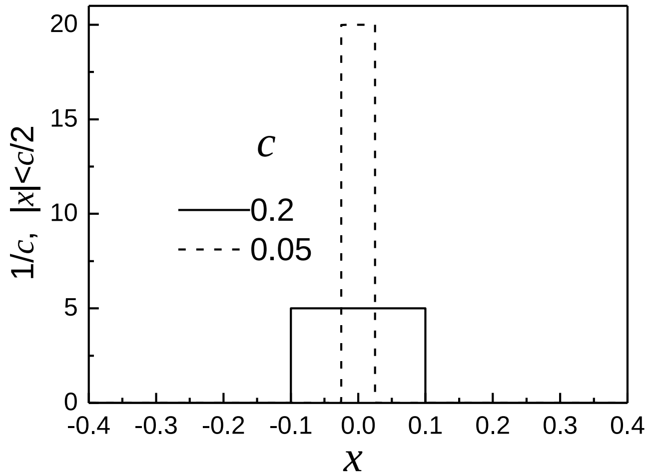
$\delta_N(x) \equiv \dfrac{\sin Nx}{\pi x}$， **$N\to+\infty$**，**(取样脉冲)** **(5.2.9b)**

5) $\delta_k(x) \equiv \dfrac{1-\cos kx}{2\pi k x^2} = \dfrac{\sin^2(kx/2)}{\pi k x^2}$， $k\to+\infty$ **(5.2.10)**

6) $\delta_n(x) \equiv \begin{cases} c_n(1-x^2)^n, \text{ 对于 } 0\le |x| \le 1,\ n=1,2,3,\cdots \\ 0\text{ ，对于 } |x|>1, \end{cases}$ **(5.2.11)**

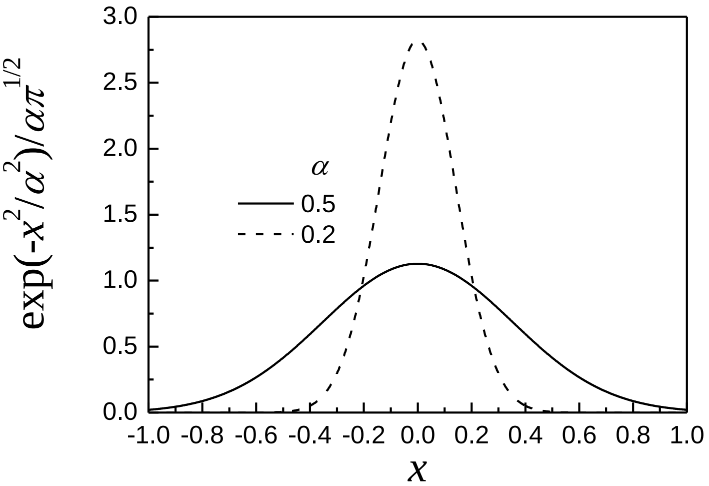
7) $\delta_r(\theta-\varphi) \equiv \dfrac{1}{2\pi}\dfrac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta-\varphi)+r^2}, r\to 1$ **(5.2.12)**

以下是各个 $\delta_n(x)$ 函数在不同参量时的曲线形状.其中图 **5.3** 称为洛伦兹线型.



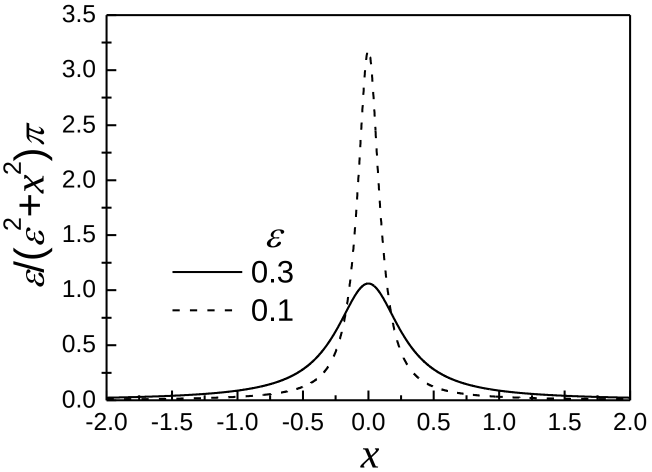
20
15
10
5
0
1/c, |x|<c/2
c
0.2
0.05
-0.4 -0.3 -0.2 -0.1 0.0 0.1 0.2 0.3 0.4
x

图 5.1



3.0
2.5
2.0
1.5
1.0
0.5
0.0
exp(-x^2/α^2)/απ^1/2
α
0.5
0.2
-1.0 -0.8 -0.6 -0.4 -0.2 0.0 0.2 0.4 0.6 0.8 1.0
x

图 5.2



3.5
3.0
2.5
2.0
1.5
1.0
0.5
0.0
ε/(ε^2+x^2)π
ε
0.3
0.1
-2.0 -1.5 -1.0 -0.5 0.0 0.5 1.0 1.5 2.0
x

图 5.3

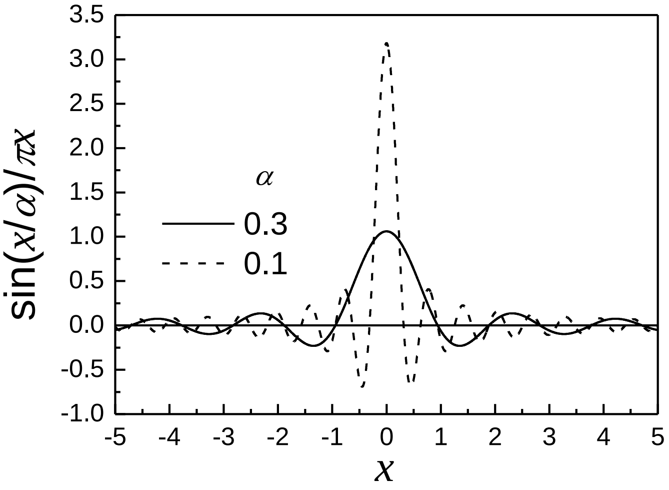


图 5.4

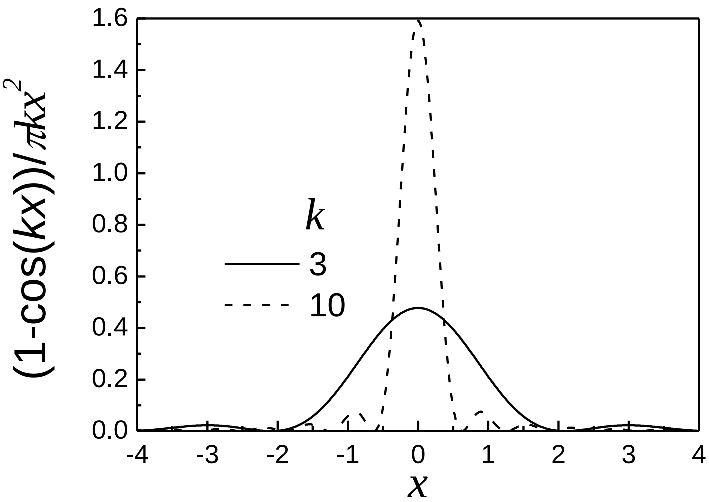


图 5.5

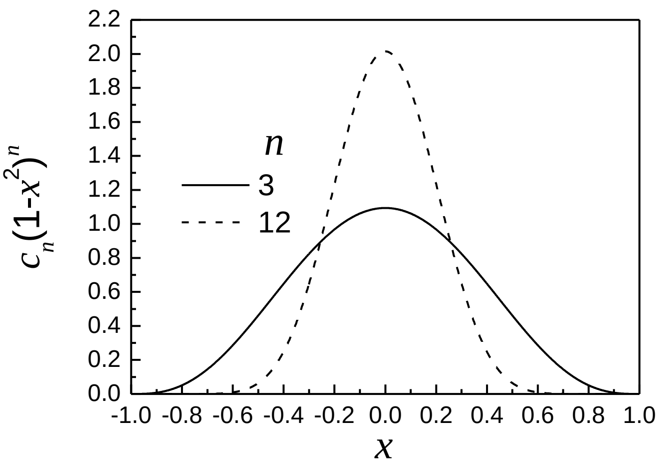


图 5.6

以上这些函数，显然都满足性质(i).要证明它们的弱收敛极限是δ函数，只要证明它们具有性质(ii)并且还满足(iii)与(iv)之一.下面我们选取两个函数进行证明.

5.2.3 证明(5.2.9b)式的弱收敛极限是δ函数

对任何 $N>0$，有

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\ \delta_N(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \frac{\sin Nx}{x} = 1$$

满足性质**(ii)**.对于任何 $\varphi(x) \in \boldsymbol{K}$，令

$$\psi(x) = \begin{cases} \dfrac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}, x \neq 0 \\ \varphi'(0), x = 0 \end{cases}$$

且

$$\psi'(x) = \begin{cases} \dfrac{x\varphi'(x)-\varphi(x)+\varphi(0)}{x^2}, x \neq 0 \\ \varphi''(0), x = 0 \end{cases}$$

这两个函数在 $(-\infty,\infty)$ 上都是连续的.而且，由于函数 $\varphi(x)$ 只在一个有限的区间上不为零，因此 $\psi(x)$ 和 $\psi'(x)$ 也都只在一个有限的区间上不为零，$\psi(x),\psi'(x) \in \boldsymbol{K}$.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \delta_N(x)\varphi(x) - \varphi(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \frac{\sin Nx}{\pi x}[\varphi(x)-\varphi(0)] = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \sin Nx \psi(x)$$

现在对右边做分部积分.

$$\int_{-c}^{c} \mathrm{d}x\ |\psi'(x)| \le \alpha$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \sin Nx\psi(x) = -\frac{\cos Nx}{N}\psi(x)|_{-\infty}^{\infty} + \frac{1}{N}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \cos Nx\psi'(x) = \frac{1}{N}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \cos Nx\psi'(x)$$

$$\frac{1}{N}\left|\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \cos Nx\psi'(x)\right| \le \frac{1}{N}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x|\cos Nx\psi'(x)|$$

$$\le \frac{1}{N}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x|\psi'(x)| = \frac{1}{N}[\int_{-\infty}^{-c} \mathrm{d}x|\psi'(x)| + \int_{-c}^{c} \mathrm{d}x|\psi'(x)| + \int_{c}^{\infty} \mathrm{d}x|\psi'(x)|]$$

其中 ***c*** 为一有限大的正数.由于 $\psi(x)$ 和 $\psi'(x)$ 在整个区间上都是连续的.在 $|x| \ge a$ (***a*** 为一充分大的正数)时，由 $\varphi(x)$ 在 $x \to \infty$ 时的行为，$\psi'(x)$ 在整个区间上总是有限的，不为无穷大.

$$\int_{-c}^{c} \mathrm{d}x\ |\psi'(x)| \le \alpha$$

$$\int_{c}^{\infty} \mathrm{d}x|\psi'(x)| = \int_{c}^{\infty} \mathrm{d}x\left|\frac{x\varphi'(x)-\varphi(x)+\varphi(0)}{x^2}\right|$$

$$\le \int_{c}^{\infty} \mathrm{d}x\left|\frac{x\varphi'(x)}{x^2}\right| + \int_{c}^{\infty} \mathrm{d}x\left|\frac{\varphi(x)}{x^2}\right| + |\varphi(0)|\int_{c}^{\infty} \mathrm{d}x\frac{1}{x^2} \le \int_{c}^{\infty} \mathrm{d}x\left|\frac{\varphi'(x)}{x}\right| + \frac{D}{c} + \frac{1}{c}|\varphi(0)|$$

由于当 $\boldsymbol{x\to\infty}$，时，$\boldsymbol{\varphi(x)}$足够快地趋于零。可设：

$$|\varphi'(x)| \le \frac{C}{x^{\kappa}}, \kappa > 0; x \to \infty$$

那么，

$$\int_c^\infty \mathrm{d}x \left|\frac{\varphi'(x)}{x}\right| \le \int_c^\infty \mathrm{d}x \frac{B}{x^{1+\kappa}} = \left(-\frac{B}{x^\kappa}\right)_c^\infty = \frac{B}{c^\kappa}$$

所以有

$$\int_c^\infty \mathrm{d}x \, |\psi'(x)| \le \frac{B}{c^\kappa} + \frac{D}{c} + \frac{1}{c} \, |\varphi(0)| < \beta$$

同理，$\int_{-\infty}^{-c} \mathrm{d}x |\psi'(x)| \le \gamma$.现在的$\alpha$，$\beta$和$\gamma$都是有限的数.综合以上各式，得

$$\lim_{N\to+\infty} [\int_{-\infty}^\infty \mathrm{d}x \delta_N(x)\varphi(x) - \varphi(0)] = \lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N} \int_{-\infty}^\infty \mathrm{d}x \cos Nx \psi'(x) \le \lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N} (\alpha+\beta+\gamma) = 0$$

满足性质**(iii)**.因此

$$\lim_{N\to+\infty} \int_{-\infty}^\infty \mathrm{d}x \, \delta_N(x) \, \varphi(x) = \varphi(0)$$

我们回顾前面写出的δ函数的傅里叶反变换**(5.1.10)**式.这一积分在通常的意义下是不存在的.对此式必须在弱收敛极限的意义下来理解.事实上，此积分应该理解为

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega = \lim_{N\to+\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-N}^N \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega = \lim_{N\to+\infty} \frac{1}{2\pi} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}Nt} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}Nt}}{\mathrm{i}t} = \lim_{N\to+\infty} \frac{\sin Nt}{\pi t} \quad \textbf{(5.2.13)}$$

5.2.4 证明(5.2.11)式的弱收敛极限是δ函数

这一函数已经在第二章**(2.4.2)**式定义.由于要求

$$\int_{-1}^1 \delta_n(x)\mathrm{d}x = 1$$

我们先来规一化系数c_n.为此，作变量置换$x = \sin\theta$.

$$\frac{1}{c_n} = \int_{-1}^1 (1-x^2)^n \mathrm{d}x = 2\int_0^1 (1-x^2)^n \mathrm{d}x = 2\int_0^{\pi/2} \cos^{2n+1}\theta \mathrm{d}\theta = \frac{2^{2n+1}(n!)^2}{(2n+1)!}$$

因此选取: $\quad c_n = \dfrac{(2n+1)!}{2^{2n+1}(n!)^2}$

就满足性质**(ii)**.当 n 足够大时，可使用斯特林公式

$$n! = \sqrt{2n\pi}(n/\mathrm{e})^n$$

判断

$$c_n = \frac{2n+1}{2^{2n+1}} \frac{\sqrt{4n\pi}(2n/\mathrm{e})^{2n}}{2n\pi(n/\mathrm{e})^{2n}} = \frac{2n+1}{2}\frac{1}{\sqrt{n\pi}} < \sqrt{n} \quad \textbf{(5.2.14)}$$

最后的不等式可从$(\sqrt{\pi}-1)n > 1/2$得到.

$$n\sqrt{\pi} - n > \frac{1}{2} \Rightarrow n\sqrt{\pi} > \frac{2n+1}{2} \Rightarrow \sqrt{n} > \frac{2n+1}{2\sqrt{n}\sqrt{\pi}}$$

即，系数c_n随 n 的增长比$\sqrt{n}$要慢.

现在我们证明，对于现在任给一个小于 1 的正数γ($0<\gamma<1$)，

$$\lim_{n\to+\infty}\int_\gamma^1 \delta_n(x)\mathrm{d}x=0 \qquad \textbf{(5.2.15)}$$

为此利用(5.2.14)式，

$$\int_\gamma^1 \delta_n(x)\mathrm{d}x=c_n\int_\gamma^1(1-x^2)^n\mathrm{d}x\le\sqrt{n}\int_\gamma^1(1-\gamma^2)^n\mathrm{d}x\le\sqrt{n}(1-\gamma^2)^n$$

已经在(2.4.5)式证明了

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt{n}(1-\gamma^2)^n=0$$

故(5.2.15)式得证.由此

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{-1}^1\delta_n(x)\mathrm{d}x=\lim_{n\to+\infty}\lim_{\gamma\to+0}[\int_{-1}^{-\gamma}\delta_n(x)\mathrm{d}x+\int_{-\gamma}^{\gamma}\delta_n(x)\mathrm{d}x+\int_{\gamma}^{1}\delta_n(x)\mathrm{d}x]$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\lim_{\gamma\to+0}\int_{-\gamma}^{\gamma}\delta_n(x)\mathrm{d}x=1$$

此式符合(5.1.1c).

有了上述的结果，我们就得到

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\int_{-1}^1\varphi(x)\delta_n(x)\mathrm{d}x-\varphi(0)\right|=\left|\int_{-1}^1[\varphi(x)-\varphi(0)]\delta_n(x)\mathrm{d}x\right|$$

$$\le\lim_{n\to+\infty}\left\{\left|\int_{-1}^{-\gamma}[\varphi(x)-\varphi(0)]\delta_n(x)\mathrm{d}x\right|+\left|\int_{-\gamma}^{\gamma}[\varphi(x)-\varphi(0)]\delta_n(x)\mathrm{d}x\right|+\left|\int_{\gamma}^{1}[\varphi(x)-\varphi(0)]\delta_n(x)\mathrm{d}x\right|\right\}$$

$$\le\lim_{n\to+\infty}\lim_{\gamma\to+0}\max|\varphi(x)-\varphi(0)|\left\{\left|\int_{-1}^{-\gamma}\delta_n(x)\mathrm{d}x\right|+\left|\int_{\gamma}^{1}\delta_n(x)\mathrm{d}x\right|\right\}$$

$$+\lim_{n\to+\infty}\lim_{\gamma\to+0}\left|\int_{-\gamma}^{\gamma}[\varphi(x)-\varphi(0)]\delta_n(x)\mathrm{d}x\right|$$

其中，$\max|\varphi(x)|$是个有限的数.由于(5.2.15)式，前一项为零.后一项当$\gamma\to0$时，积分区间趋于零，但是被积函数是有限的，因而积分值为零.

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\int_{-1}^1\varphi(x)\delta_n(x)\mathrm{d}x-\varphi(0)\right|\le\lim_{n\to+\infty}\lim_{\gamma\to+0}\left|\int_{-\gamma}^{\gamma}[\varphi(x)-\varphi(0)]\delta_n(x)\mathrm{d}x\right|=0$$

由此证明了(5.2.11)的$\delta_n(x)$函数满足性质(iii).因此，

$$\lim_{n\to\infty}\delta_n(x)=\delta(x)$$

在第二章中，我们已经借助这个$\delta_n(x)$函数来证明多项式逼近的魏尔斯特拉斯定理.

5.2.5 应用举例

以上列出δ函数的不同的弱收敛的形式，并不仅仅是数学表现形式的不同，而是有着各自的应用.例如我们已经看到δ函数的傅里叶变换可以理解为(5.2.13)式的极限.(5.2.11)的多项式形式可以用来证明多项式逼近定理.

更为重要的是，δ函数的不同的弱收敛的形式，可以表现各自特定的物理意义.

以下讨论两个在物理上应用的例子.

例 1 $\lim\limits_{\eta\to 0^+}\dfrac{1}{x\pm \mathrm{i}\eta}=\dfrac{1}{x\pm \mathrm{i}0^+}=P\dfrac{1}{x}\mp \mathrm{i}\pi\delta(x)$ **(5.2.16)**

其中 ***P*** 表示取主值，即取 $x\neq 0$ 时的值.

证明 $\dfrac{1}{x\pm \mathrm{i}\eta}=\dfrac{x\mp \mathrm{i}\eta}{x^2+\eta^2}=\dfrac{x}{x^2+\eta^2}\mp \mathrm{i}\pi\dfrac{\eta}{\pi(x^2+\eta^2)}\to P\dfrac{1}{x}\mp \mathrm{i}\pi\delta(x)$

注意：$x=0$ 时上式无实部.

洛伦兹线型的弱收敛的形式为涉及 $\delta(x)$ 函数的实际数值计算中提供了一个方法.在固体物理学中，能量态密度的定义是：在能量 ***E*** 处，单位能量间隔内的状态数目.它的表达式为

$$\rho(E)=\sum_n \delta(E-E_n) \tag{5.2.17}$$

其中对于所有的量子态求和.例如，对于固体中的电子，量子态是用波矢 ***k*** 来指标的，那么对于量子态的求和也就是对于波矢空间的第一布里渊区进行积分.

$$\rho(E)=\int \mathrm{d}\boldsymbol{k}\,\delta(E-E_n(\boldsymbol{k}))$$

在进行数值计算时，当然不可能用真正的 δ 的形式.此时就用**(5.2.8)**式来代替 δ 函数.写成

$$\rho(E)=\int \mathrm{d}\boldsymbol{k}\,\frac{1}{\pi}\frac{\varepsilon}{(E-E_n(\boldsymbol{k}))^2+\varepsilon^2} \tag{5.2.18a}$$

计算时取一个合适的小量 $\boldsymbol{\varepsilon}$，计算得到的态密度曲线就是光滑的.如果有一个峰特别突出，这个峰的形状就是洛伦兹线型的.这与实验得到的谱线是符合的.例如，莫斯堡尔谱的峰用洛伦兹线型拟合的结果是极好的.

为什么实验上的曲线是呈现洛伦兹线型的？能级为实数表明能级的寿命是无限长的，因为波函数中的时间因子是平面波的形式.而实际系统中，粒子之间总是有相互作用的，这种相互作用使得能级的寿命实际上不是无限长的.也就是说，波函数中的时间因子中有一个指数衰减项，这说明能级有一个虚部.而洛伦兹线型表现的就是能级有一虚部，可以把**(5.2.18a)**式写成

$$\rho(E)=-\int \mathrm{d}\boldsymbol{k}\,\frac{1}{\pi}\mathrm{Im}\frac{1}{E-(E_n(\boldsymbol{k})-\mathrm{i}\varepsilon)} \tag{5.2.18b}$$

能级虚部的出现使得态密度的峰呈现出一个有限的峰高和缝宽. 文献中有用式**(5.2.18)**计算态密度的实例.

我们在这儿强调，态密度的一般的定义式应该是：

$$\rho(E)=-\frac{1}{\pi}\mathrm{Im}\sum_n\frac{1}{E-E_n} \tag{5.2.18c}$$

其中能量 E_n 是复数.当能级都是实数时，将虚部取为无穷小，就得到特例

$\rho(E)=\sum\limits_n \delta\,(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{E_n})$.

例 2 一维方程

$$(\frac{\mathrm{i}}{c}\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial^2}{\partial x^2})g(x,x';t,t')=\delta(x-x')\delta(t-t') \tag{5.2.19}$$

当$t-t'>0$时的解是

$$g(x,x';t,t')=-\frac{\mathrm{i}c}{\sqrt{4\pi \mathrm{i}c(t-t')}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(x-x')^2/4c(t-t')} \tag{5.2.20}$$

此式与**(5.2.7b)**的形式一样，说明当$t\to t'$时在x'处有一个δ型波包.此例表明一个服从薛定谔方程的，初始时刻为δ形状的波包在自由空间中是怎样随时间演化的.在$t-t'>0$ 的时间波包不断向外扩展，峰值不断降低,它是以**(5.2.7b)**的形式演化的.最终演化为无限大空间内的一个平面波. 注意，因为这是薛定谔方程，得到的解是概率幅的含义.取这个解的绝对值的平方才是概率密度的含义.

这个波函数的绝对值，或者是绝对值的平方的展宽方式如图 **5.2** 所示。

此式中的 ***c*** 不具有运动速度的含义，它是波包展宽速率，或者峰值降低速率的含义.当 ***c*** 越大，则峰值下降和峰宽增加地越快.

解此方程时，已经假设了初始时刻波包的运动速度为零.波包是在原地随时间展宽的.如果初始时刻运动速度不为零，而是速率 ***u***，那么在以后的时刻，波包在以速率 ***u*** 运动的同时，按照此式展宽.

§5.3 多维空间中的δ函数

5.3.1 直角坐标系

设在三维空间中的点$\boldsymbol{r}_0=(x_0,y_0,z_0)$处，有一单位质量的“质点”，则质点在空间的密度分布可以表示为

$$\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)=\delta(x-x_0)\delta(y-y_0)\delta(z-z_0) \tag{5.3.1}$$

点源是一个整体，它占有的空间抽象为零.如果用积分来表示质量，则应有

$$\iiint_\Omega \delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)\ \mathrm{d}V=\iiint_\Omega \delta(x-x_0)\ \delta(y-y_0)\ \delta(z-z_0)\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\begin{cases}0, & \boldsymbol{r}_0\notin\Omega\\ 1, & \boldsymbol{r}_0\in\Omega\end{cases} \tag{5.3.2}$$

更一般的定义是

$$\iiint_\Omega f(\boldsymbol{r})\ \delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\begin{cases}0, & \boldsymbol{r}_0\notin\Omega\\ f(\boldsymbol{r}_0), & \boldsymbol{r}_0\in\Omega\end{cases} \tag{5.3.3}$$

注意，从概念上来讲，式**(5.3.1)**并不蕴含沿坐标轴分解的意义.此时只能作为一种运算性质来理解.如下式所示，

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\boldsymbol{r})\ \delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)\ \mathrm{d}V=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y,z)\ \delta(x-x_0)\ \delta(y-y_0)\ \delta(z-z_0)\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty} f(x_0,y,z)\ \delta(y-y_0)\ \delta(z-z_0)\ \mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty} f(x_0, y_0, z)\ \delta(z-z_0)\ \mathrm{d}z = f(x_0, y_0, z_0) = f(\boldsymbol{r}_0)$$

这样，就与**(5.3.3)**式的结果是一致的.

当点源正好位于原点时，$\boldsymbol{r}_0=(0,0,0)$时，只要将**(5.3.1)-(5.3.3)**三式中的$\boldsymbol{r}_0$用$(0,0,0)$代替即可.

二维或 ***n*** 维空间的δ函数，可以类似于三维的情形来定义.

多维空间中的δ函数有以下两条运算性质：平移性质和相似变换.以 ***r*** 记 ***n*** 维空间R^n中的位置向量.平移性质是指

$$\int_{R^n} f(\boldsymbol{r})\ \delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)\ \mathrm{d}\Omega = \int_{R^n} f(\boldsymbol{r}+\boldsymbol{r}_0)\ \delta(\boldsymbol{r})\ \mathrm{d}\Omega = f(\boldsymbol{r}_0) \qquad \textbf{(5.3.4)}$$

相似变换是指

$$\int_{R^n} f(\boldsymbol{r})\ \delta(a\boldsymbol{r})\ \mathrm{d}\Omega = \int_{R^n} f(\frac{\boldsymbol{r}}{a})\ \frac{1}{|a|^n}\delta(\boldsymbol{r})\ \mathrm{d}\Omega \qquad \textbf{(5.3.5)}$$

在求解数学物理方程时，有时要选用适当的曲线坐标系.此时应用δ函数时，为了使积分中的δ函数能将不同的坐标轴分开运算，类似**(5.3.1)**式那样，必须建立适宜的δ函数的运算表示式.

5.3.2 直角坐标系到曲线坐标系的变换

我们写出二维和三维空间中δ函数从直角坐标系到曲线坐标系的一般变换式.

1. 二维平面

设曲线坐标系的坐标是(q_1,q_2).在一个位矢$\boldsymbol{r}=(q_1,q_2)=(x,y)$处的曲线坐标系与直角坐标系的坐标之间的关系是

$$x=x(q_1,q_2),\ y=y(q_1,q_2)$$

雅可比行列式

$$J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(q_1,q_2)}=\begin{vmatrix}\partial x/\partial q_1 & \partial y/\partial q_1\\ \partial x/\partial q_2 & \partial y/\partial q_2\end{vmatrix}$$

面积元:　　$\mathrm{d}S=\mathrm{d}x\mathrm{d}y=|J|\,\mathrm{d}q_1\mathrm{d}q_2$

现在有一积分

$$I=\int_{R^2}\varphi(\boldsymbol{r})\delta(x-x')\delta(y-y')\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

我们希望在曲线坐标系中的积分能写成以下形式

$$I=\int_{R^2}\varphi(\boldsymbol{r})\delta(q_1-q_1')\delta(q_2-q_2')\mathrm{d}q_1\mathrm{d}q_2$$

此式不是对面积元的积分.把它写成对面积元的积分

$$I=\int_{R^2}\varphi(\boldsymbol{r})\frac{\delta(q_1-q_1')\delta(q_2-q_2')}{|J|}\mathrm{d}S$$

面积元相同，则被积函数应完全相等.可见，当$J\neq 0$应该有

$$\delta(x-x')\ \delta(y-y')=\frac{1}{|J|}\ \delta(q_1-q_1')\ \delta(q_2-q_2') \tag{5.3.6}$$

2. 三维空间

设曲线坐标系的坐标是(q_1,q_2,q_3).在一个位矢$\boldsymbol{r}=(q_1,q_2,q_3)=(x,y,z)$处的曲线坐标系与直角坐标系的坐标之间的关系是

$$x=x(q_1,q_2,q_3),y=y(q_1,q_2,q_3),z=z(q_1,q_2,q_3)$$

雅可比行列式

$$J=\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(q_1,q_2,q_3)}=\begin{vmatrix}\partial x/\partial q_1 & \partial y/\partial q_1 & \partial z/\partial q_1\\ \partial x/\partial q_2 & \partial y/\partial q_2 & \partial z/\partial q_2\\ \partial x/\partial q_3 & \partial y/\partial q_3 & \partial z/\partial q_3\end{vmatrix}$$

体积元: $\mathrm{d}V=\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=|J|\,\mathrm{d}q_1\ \mathrm{d}q_2\ \mathrm{d}q_3$

现在有一积分

$$I=\int_{R^3}\varphi(\boldsymbol{r})\delta(x-x')\delta(y-y')\delta(y-z')\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

我们希望在曲线坐标系中的积分能写成以下形式

$$I=\int_{R^3}\varphi(\boldsymbol{r})\delta(q_1-q_1')\delta(q_2-q_2')\delta(q_3-q_3')\mathrm{d}q_1\mathrm{d}q_2\mathrm{d}q_3$$

此式不是对体积元的积分.把它写成对体积元的积分

$$I=\int_{R^3}\varphi(\boldsymbol{r})\frac{\delta(q_1-q_1')\delta(q_2-q_2')\delta(q_3-q_3')}{|J|}\mathrm{d}V$$

体积元相同，则被积函数应完全相等.可见，当$J\neq 0$应该有

$$\delta(x-x')\ \delta(y-y')\ \delta(z-z')=\frac{1}{|J|}\ \delta(q_1-q_1')\ \delta(q_2-q_2')\ \delta(q_3-q_3') \tag{5.3.7}$$

要注意的是，式**(5.3.6)**和**(5.3.7)**成立的条件是雅可比行列式不为零.当$\boldsymbol{J}$为零时的变换式要具体分析.下面我们写出具体的曲线坐标系下的变换式.

3. 平面极坐标系下的$\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)$的运算表示式

此时直角坐标系的自变量(x,y)与极坐标系的自变量(r,φ)之间由关系

$$x=r\cos\varphi,y=r\sin\varphi$$

确定，并且当

$$J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)}=r\neq 0$$

时，坐标数对(x,y)和(r,φ)之间建立了一一对应的关系.面积元为

$\mathbf{d}S$=$\mathbf{dxdy}=r\mathrm{d}r\ \mathrm{d}\varphi$

对照**(5.3.6)**可知，此时应有

$$\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)=\frac{\delta(r-r_0)\delta(\varphi-\varphi_0)}{|J|}=\frac{\delta(r-r_0)\delta(\varphi-\varphi_0)}{r}，\quad r_0>0 \qquad \textbf{(5.3.8)}$$

对于**(5.3.8)**式在$r_0\neq 0$时都是正确的.即使$r=0$也是如此，因为根据δ函数的运算规则，最终只有点源$\boldsymbol{r}_0$处的坐标(r_0,φ_0)起作用.

但是当$r_0=0$时，$x_0=0,y_0=0$和$r=0,\varphi_0=0$之间就不是**(5.3.6)**是那样的一一对应的关系了.式**(5.3.8)**不能直接应用，而是要对此式右边做适当的修正.

先设点质量是均匀分布在$r=r_0$的圆上，在此圆周上，按φ的变化，以弧度为度量基础的均匀密度分布出现了因子$1/2\pi$.用这个因子代替**(5.3.8)**式中由角度φ所反映的在圆周上源强的集中分布因子$\delta(\varphi-\varphi_0)$，得到

$$\frac{\delta(r-r_0)}{r}\frac{1}{2\pi}=\frac{1}{2\pi r}\delta(r-r_0)$$

然后再令$r_0\to 0^+$

$$\delta(\boldsymbol{r})=\frac{1}{2\pi r}\delta(r-0^+)=\frac{1}{2\pi r}\delta(r) \qquad \textbf{(5.3.9)}$$

此式就是当$r_0=0$时，$\delta(\boldsymbol{r})$函数的极坐标表示式.作为对此式的验证，可以看以下的积分.

$$\iint\delta(\boldsymbol{r})\mathrm{d}S=\iint\delta(x)\delta(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=1$$

$$\iint\delta(\boldsymbol{r})\mathrm{d}S=\iint\frac{1}{2\pi r}\delta(r)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi=1$$

两者结果是一样的.对于径向的积分，下限是0^-.

4. 三维球坐标系下的$\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)$的运算表示式

三维球坐标中的体积元是

$$\mathrm{d}V=\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=|J|\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta=r^2\sin\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta$$

对照**(5.3.7)**式可知，

$$\begin{aligned}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)&=\frac{1}{|J|}\delta(r-r_0)\delta(\varphi-\varphi_0)\delta(\theta-\theta_0)\\&=\frac{1}{r^2\sin\theta}\delta(r-r_0)\delta(\varphi-\varphi_0)\delta(\theta-\theta_0),\quad(r_0>0,0\le\varphi\le 2\pi,0\le\theta\le\pi)\end{aligned} \qquad \textbf{(5.3.10)}$$

由式**(5.3.10)**也看到，**(5.3.1)**确实不能当做δ函数沿坐标轴的分解。

当$r_0=0$时，仿照极坐标时的情形，先设单位质量是均匀分布在$r=r_0$的球上.球具有 **4π**弧度的立体角，因此沿φ和θ的角度方向均匀密度分布出现了因子$1/4\pi$.用它来代替**(5.3.10)**式中反映角度分布的因子$\frac{1}{\sin\theta}\delta(\varphi-\varphi_0)\delta(\theta-\theta_0)$，再令$r_0\to 0^+$，得到

$$\delta(\boldsymbol{r})=\frac{1}{4\pi r^2}\ \delta(r) \tag{5.3.11}$$

三维柱坐标系下的$\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)$的运算表示式，我们直接写出结果如下.

$$\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)=\frac{1}{r}\delta(r-r_0)\delta(\varphi-\varphi_0)\delta(z-z_0)\,,\quad r_0>0 \tag{5.3.12}$$

$$\delta(\boldsymbol{r})=\frac{1}{2\pi r}\delta(r)\delta(z) \tag{5.3.13}$$

§5.4 *δ*函数的广义傅里叶展开

尽管*δ*函数有一个奇异点，它是一个分段光滑的函数，因此可以用许多常见的完备函数集展开.由于斯图姆-刘维尔型方程特征函数族$\{y_n(x)\}$在区间$[a,b]$上构成一个完备系，因此，常用这样的完备系来对δ函数作展开，只要$\delta(x-x_0)$中的$x_0\in[a,b]$.

设斯图姆-刘维尔型方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[p(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}]+[\lambda\rho(x)-q(x)]y=0,\quad (a\le x\le b)$$

的特征函数族$\{y_n(x)\}$在区间$[a,b]$已经带权正交规一.

$$\int_a^b y_m^*(x)y_n(x)\rho(x)\mathrm{d}x=\delta_{mn} \tag{5.4.1}$$

那么，

$$\delta(x-x_0)=\sum_n\sqrt{\rho(x_0)\rho(x)}\,y_n^*(x_0)y_n(x) \tag{5.4.2}$$

证明 设

$$\delta(x-x_0)=\sum_n c_n y_n(x)$$

两边乘以$y_m^*(x)\rho(x)$在区间$[a,b]$上积分.利用**(5.4.1)**式.得到

$$c_n=\int_a^b y_n^*(x)\delta(x-x_0)\rho(x)\mathrm{d}x=\rho(x_0)y_n^*(x_0)$$

因此

$$\delta(x-x_0)=\sum_n\rho(x_0)y_n^*(x_0)y_n(x) \tag{5.4.3}$$

由于$\delta(x-x_0)$是一个对称的函数，将展开式也写成关于x和x_0对称的形式.为此在**(5.4.3)**式两边乘以$\sqrt{\dfrac{\rho(x)}{\rho(x_0)}}$，即得到**(5.4.2)**式.证明完毕.

这儿应注意的是，二阶微分方程的每一个特征值都有两个线性无关的特解，**(5.4.3)**式中满足边界条件的解$y_n(x)$都是两个特解的线性组合，组合系数由边界条件决定.

在量子力学中，式**(5.4.2)**被称为特征函数的完备性关系.这是量子力学中一个基本而又重要的关系式.

例 **1** 厄米方程的正交规一特征函数集是$\dfrac{1}{\pi^{1/4}\sqrt{2^n n!}}H_n(x), n=0,1,2,\cdots$，其中$H_n(x)$是厄米多项式.如果满足边界条件的解式中只有$H_n(x)$而没有另一个线性无关的函数即第二类厄米函数，那么，

$$\delta(x-x_0)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{\pi}2^n n!}\mathrm{e}^{-(x^2+x_0^2)/2}H_n(x_0)H_n(x)$$

例 **2** 勒让德方程的正交规一特征函数集是$\sqrt{\dfrac{2l+1}{2}}P_l(x), l=0,1,2,\cdots$，其中$P_l(x)$是勒让德多项式. 如果满足边界条件的解式中只有$P_l(x)$而没有另一个线性无关的函数即第二类勒让德函数，那么，

$$\delta(x-x_0)=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{2l+1}{2}P_l(x_0)P_l(x)$$

或者可以写成

$$\delta(\cos\theta-\cos\theta_0)=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{2l+1}{2}P_l(\cos\theta_0)P_l(\cos\theta)$$

令$\theta_0=0$，并利用$P_l(1)=1$，见表**3.7**，可得

$$\delta(\cos\theta-1)=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{2l+1}{2}P_l(\cos\theta)$$

例 **3** 方程$\Phi''(\varphi)+m^2\Phi(\varphi)=0$， $0\le\varphi\le 2\pi$的满足周期性条件的正交规一特征函数集是$\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi}, m=0,\pm1,\pm2,\cdots$.

$$\delta(\varphi-\varphi_0)=\frac{1}{2\pi}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}m(\varphi-\varphi_0)}$$

把此式对 ***m*** 的求和写成积分，这一极限形式就是 **(5.1.10)**式.

例 4 将 $\delta(x-x')$ 在区间 $\alpha \le x, x' \le 2\pi-\alpha$ 上展开.

解答 首先要明确在此区间上的特征函数集是什么.如果没有现成的完备的特征函数集，就构造一个此区间上的二阶微分方程，解出一个完备的特征函数即。

为此考虑二阶微分方程的边值问题

$$y''(x)+\nu^2 y(x)=0，\quad x\in[\alpha, 2\pi-\alpha]，\quad y(\alpha)=y(2\pi-\alpha)=0$$

的解.由于被展开的函数在边界处的值为零，所以用第一类齐次边界条件.方程的通解可以写成

$$y(x)=\sin\nu(x+\beta)$$

利用边界条件来求得相位 $\nu(x+\beta)$ 中的两个常数 $\boldsymbol{\nu}$ 和 $\boldsymbol{\beta}$.将通解代入边界条件：

$$\sin\nu(\alpha+\beta)=0, \sin\nu(2\pi-\alpha+\beta)=0$$

应该有：$\qquad \nu(\alpha+\beta)=m\pi, \nu(2\pi-\alpha+\beta)=n\pi$

得到

$$2\nu(\pi+\beta)=(n+m)\pi, \nu(2\pi-2\alpha)=(n-m)\pi$$

由此解出两个常数的表达式

$$\nu=\frac{(n-m)\pi}{2(\pi-\alpha)}$$

$$\beta=\frac{(n+m)\pi}{2\nu}-\pi=\frac{(n+m)(\pi-\alpha)}{n-m}-\pi=\frac{2m(\pi-\alpha)}{n-m}-\alpha=\frac{m\pi}{\nu}-\alpha$$

相位是

$$\nu(x+\beta)=\nu(x+\frac{m\pi}{\nu}-\alpha)=\nu(x-\alpha)+m\pi$$

得到方程的解为

$$y(x)=\sin[\nu(x-\alpha)+m\pi]=(-1)^m\sin\frac{n\pi(x-\alpha)}{2(\pi-\alpha)}$$

其中 $\boldsymbol{n}$ 是正整数.可以验证，这是正交函数系.

$$(-1)^{m+n}\int_\alpha^{2\pi-\alpha}\sin\frac{m\pi}{2(\pi-\alpha)}(x-\alpha)\sin\frac{n\pi}{2(\pi-\alpha)}(x-\alpha)\mathrm{d}x$$

$$=(-1)^{m+n}\int_\alpha^{2\pi-\alpha}[\cos\frac{(m-n)\pi}{2(\pi-\alpha)}(x-\alpha)-\cos\frac{(m+n)\pi}{2(\pi-\alpha)}(x-\alpha)]\mathrm{d}x=0$$

我们把函数集归一化.

$$\int_\alpha^{2\pi-\alpha}\sin^2\frac{m\pi}{2(\pi-\alpha)}(x-\alpha)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_\alpha^{2\pi-\alpha}[1-\cos\frac{m\pi(x-\alpha)}{\pi-\alpha}]\mathrm{d}x=\pi-\alpha$$

因此正交规一函数系是 $\{\frac{1}{\sqrt{\pi-\alpha}}\sin\frac{n\pi(x-\alpha)}{2(\pi-\alpha)}\}$.

函数系$\{\frac{1}{\sqrt{\pi-\alpha}}\sin\frac{n\pi(x-\alpha)}{2(\pi-\alpha)}\}$构成了区间$x\in[-\alpha,2\pi-\alpha]$上，在区域端点为零的正交规一完备函数系.定义在这个区域上并且在两个端点为零的函数都可以用这一完备系展开.

应用**(5.4.2)**式，得到$\delta(x-x')$函数的展开式：

$$\delta(x-x')=\frac{1}{\pi-\alpha}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi(x'-\alpha)}{2(\pi-\alpha)}\sin\frac{n\pi(x-\alpha)}{2(\pi-\alpha)}$$

需要说明的是，由于$\delta(x-x')$函数在区域边界上的值为零，例**4**中选取了在区域边界上为零的完备函数集来作展开.实际上，可以选取完备集来展开δ函数时，并不要求完备集中的每一个函数都在区域端点的值为零.

本章重点

δ函数的定义。注意，它的作用主要体现在积分里面。
δ函数的几种弱收敛的极限。
恒等式**(5.2.16)**。
不同坐标系中δ函数的的形式。

轻点
δ函数的傅里叶变换和拉普拉斯变换。式**(5.1.24)**对任意复数 **z** 都是适用的。
δ函数的广义傅里叶展开**(5.4.3)**。

小贴士

本章**(5.2.17)**给出了态密度的定义式。以后在学习固体理论这一课程的时候，在声子这一部分的内容里会讲到态密度，就是这个定义式。学到那个内容的时候，再回头来看一下本章 **5.2.1** 小节例 **1** 的内容，是有好处的。

δ函数在下一章讲格林函数时，起着重要的作用。它是定义格林函数不可或缺的成分。

可以把本章提到的泛函的概念与第一章的对照一下。

注意**(5.2.20)**，在高等量子力学中，此式称为一维自由空间中的传播子**(**传播函数**)**。也就是说，这个传播子就是**(5.2.19)**的解。式**(5.2.19)**左边是薛定谔算符，右边是δ函数，其解就是传播子。学习高量课程的同学，在学到传播子的内容的时候，可以回顾一下这里的内容。此两式体现了传播子的数学内容。特别是，把高量中说的传播子满足的方程与本章的**(5.2.19)**式做对照。本章没有介绍得到解**(5.2.20)**的经过。高量中介绍了求解步骤。

在**(5.2.19)**式中，对坐标二次导数的负号，就是一维自由粒子的动能算符，讲此算符换成哈密顿算符，就是一维系统的传播子应满足的方程。若哈密顿量是一维谐振子的哈密顿量，那么，解就是一维谐振子的传播子。

布置习题：
做以下习题 2,3,6,7,8,10，12，此外，再任选 5 题。

习题

1. 证明(5.1.16)式.
(提示：在上半或者下半复ε平面补上无穷大半圆，构成闭合回路后，用留数定理积分.)

2. 证明 $\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}|x|=2\delta(x)$**.(提示：**$|x|=x\theta(x)-x\theta(-x)$**)**

3. 证明 $\delta(x+a)=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{a^n}{n!}\delta^{(n)}(x)$**.此式表明，$\delta$函数可以像普通函数那样做泰勒展开.**

4. 证明： $x^2\delta'(x)=0$**.**

5. $\delta^{(n)}(x)$**当 n 是偶数时，是偶函数，当 n 是奇数时，是奇函数.**

6. 证明：设 $g(x)$ **的零点** x_k **全为一阶的，则**

$$\delta[g(x)]=\sum_k\frac{\delta(x-x_k)}{|g'(x_k)|}$$

(提示：在 $(\delta[g(x)],\varphi(x))$ **积分中，令** $g(x)=y$ **把对 x 的积分转换成对 y 的积分.)**

由此证明以下几个特例.

(1) $\delta(ax)=\dfrac{\delta(x)}{|a|}$

(2) $\delta(x^2-a^2)=\dfrac{\delta(x-a)+\delta(x+a)}{2|a|}$

(3) 当 $g(x)=(x-a)(x-b)$**，** $g'(x=a,b)=\pm(a-b)$**，**

(4) $\delta(\mathrm{e}^x-1)=\delta(x)$

(5) $\delta(\sin x)=\sum_{k=1}^{\infty}\delta(x-k\pi)$

7. 利用上题的结果计算以下积分.

(1) $\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\delta(x^2-5x+6)(3x^2-7x+2)$

(2) $\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\delta(x^2-\pi^2)\cos x$

(3) $\int_{1/2}^{\infty}\mathrm{d}x\delta(\sin\pi x)(\dfrac{2}{3})^x$

(4) $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \delta(\mathrm{e}^{-x^2}) \ln x$

8. 求 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\theta(x^2-1)$

9. (1) 证明：如果空间有一个电偶极子，那么其电荷密度的分布$\rho(\mathbf{r})$是用δ函数的导数来表示的；**(2)** $\rho(x)=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x^2}\delta(x^2-1)$代表一个什么样的电荷分布？

10. 我们已经在**(5.2.13)**式证明了**(5.1.10)**式的 $\delta(t)=\dfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega$ 可以看成是**(5.2.9b)**式的 $\delta_N(x)\equiv\dfrac{\sin Nx}{\pi x}$ 的弱收敛极限**.**证明，它也可以看成是**(5.2.8)**式的 $\delta_\varepsilon(x)\equiv\dfrac{1}{\pi}\dfrac{\varepsilon}{\varepsilon^2+x^2}$ 的弱收敛极限**.**

11. 计算以下拉普拉斯变换： $L[\delta(x-y)]$， $L[\delta^{(n)}(x)]$**.**

12. 证明极限： $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\dfrac{e^{-|x|/\varepsilon}}{2\varepsilon}=\delta(x)$ 这一弱收敛形式称为指数脉冲**.**

13. 证明 $\delta_\varepsilon(x)\equiv\dfrac{1}{\pi}\dfrac{\varepsilon}{\varepsilon^2+x^2}$ 在 $\varepsilon\to 0$ 的极限是δ函数**.**

14. 证明**(5.2.12)**式的函数弱收敛于 $\delta(\theta-\varphi)$**.**即

$$\lim_{r\to 1}\frac{1}{2\pi}\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta-\varphi)+r^2}=\delta(\theta-\varphi)$$

15. 设 $f_\alpha(x)=\dfrac{\sin\alpha}{2\pi(\cosh x+\cos\alpha)}$， 证明： $\lim\limits_{\alpha\to\pi^-}\int_a^b f_\alpha(x)\mathrm{d}x=\begin{cases}1, 0\in(a,b)\\ 0, 0\notin(a,b)\end{cases}$**.**因此，

$$\lim_{\alpha\to\pi^-}\frac{\sin\alpha}{2\pi(\cosh x+\cos\alpha)}=\delta(x)\text{.}$$

16. 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2}[1+\tanh(nx)]=\theta(x)$

17. 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^3x}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-n^2x^2}=-\delta'(x)$**.**

(提示：乘以函数空间 K 中的任一函数.做分部积分.与(5.2.7a)对照.再做一次分部积分.)

18. 计算积分 $\int_0^{\infty}\cos ax\cos bx\mathrm{d}x$ **(**设 $a>0, b>0$**.)**

(提示：将三角函数写成 e 指数的形式.)

19. 计算下列积分**.**

(1) $I=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{at}\sin bt\delta^{(n)}(t)\mathrm{d}t$， ***n*** 分别为 **0**，**1** 和 **2.**

(2) $\int_{-\infty}^{\infty}(\cos t+\sin t)\delta^{(n)}(t^4-1)\mathrm{d}t$ **,** ***n*** 分别为 **0** 和 **1. (**复平面上所有的零点都不能遗漏**.)**

20. 若函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 处是不连续的.左右侧极限分别记为 $f(a-0^+)$ 和 $f(a+0^+)$ **.** 那么，利用**(5.2.6)**式证明

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ \delta(x-a)\ \mathrm{d}x=\frac{1}{2}[\ f(a-0^+)+f(a+0^+)]$$

21. 函数 $\sqrt{\delta(x)}$ 是 $\delta(x)$ 函数的开根号**.**由 $\delta(x)$ 函数的定义式**(5.1.1a)**，显然应该有

$$\sqrt{\delta(x)}=\begin{cases}0, & x\neq 0\\ \infty, & x=0\end{cases}$$

利用利用**(5.2.6)**式证明**:** $\int_{-\infty}^{\infty}\sqrt{\delta(x)}\mathrm{d}x=0$

利用 $\delta(x)$ 函数的弱极限的其它表达式**(5.2.7)~**式**(5.2.11)**能否证明这一结论？

22. 利用**(5.2.6)**式证明

$$\delta(x^2)=\frac{\delta(x)}{2|x|}$$

等号右边的函数也出现在对于具体物理问题的讨论中**.**[12,13]

23. 在球坐标系 $\boldsymbol{r}=(r,\theta,\varphi)$ 中，设单位源强的点源位于正 ***z*** 轴上 ***r*₀** 处**.**试作出 $\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)$ 的运算表示式**.(**提示：先把单位源强均匀分布在圆周 $r=r_0,\theta=\theta_0\neq 0$ 上**.)**

24. 在三维柱坐标系 $\boldsymbol{r}=(r,\varphi,z)$ 中，设单位源强的点源位于正 ***z*** 轴上 ***r*₀** 处**. (1)** $\boldsymbol{r}_0=(0,z_0,0)$ 处，**(2)** $\boldsymbol{r}_0=(0,0,0)$ 处，试分别作出 $\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)$ 的运算表示式**.**

25. 证明 $f(x)=\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}\delta(x-2n\pi)$ 是个周期为 **2π**的函数**.**求这个函数的傅里叶变换**.**

并在弱收敛的意义下，验证所得级数的和确实是 $\delta(x)$**.**

（提示：可利用公式 $1+2\cos x+2\cos 2x+\cdots+2\cos nx=\dfrac{\sin[(n+1/2)x]}{\sin(x/2)}$ ）

26. 证明：
$$\frac{1}{\omega-\omega_0+\mathrm{i}0^+}-\frac{1}{\omega-\omega_0-\mathrm{i}0^+}=\frac{2\omega_0}{\omega^2-\omega_0^2+\mathrm{i}0^+}$$

这是在研究物理系统对外场响应，例如计算介电函数时所要用到的结果**.**

27. 求函数 $\varphi(t)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n!}\delta'(t-n)$ 的傅里叶变换**.**

28. 证明 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\delta(f(x))=f'(x)\delta'(f(x))$ 和 $\delta(f(x))+f(x)\delta'(f(x))=0$ ，并由此证明：函数 $\phi(x,y)=\delta(x^2-y^2)$ 是方程 $x\dfrac{\partial\phi}{\partial x}+y\dfrac{\partial\phi}{\partial y}+2\phi=0$ 的解**.**