Chapter 6

Green's Function

§6.1 格林函数的基本理论

6.1.1 格林函数的定义

定义 1 设有一算符 $L(x)$，则满足如下方程

$$[\lambda - L(x)]G(x,x') = \delta(x-x') \tag{6.1.1a}$$

或者

$$[\lambda - L(x)]G(x,x') = \delta(x-x')/\rho(x) \tag{6.1.1b}$$

的解 $G(x,x')$ 称为**格林函数**.

需要对于式(6.1.1)做一些解释.变量 x(x' 同 x)是一个笼统的代表.它可以是时间 t，这时 $x=t$，x 表示 t 这个时刻；也可以是空间坐标 $\boldsymbol{r}$，这时 $x=\boldsymbol{r}$，x 代表空间中的一个点，空间坐标可以是一维、二维和三维的；也可以包括了空间和时间坐标，这时 $x=(\boldsymbol{r},t)$，x 表示了一个时空点；等等.如果变量 x 中不含时间 t，就称为**不含时格林函数**.如果变量 x 中含时间 t，就称为**含时格林函数**.

式(6.1.1)右边的δ函数，关于它的数学理论已经在第 5 章介绍.当 x 代表时间 t，就是 $\delta(t-t')$；当 $x=\boldsymbol{r}$，就是 $\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$；当 $x=(\boldsymbol{r},t)$，就是 $\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\delta(t-t')$.式(5.2.19)给出一例，其解为(5.2.20).上一章已经介绍了 $\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$ 在不同坐标系下的形式.

等式左边的λ是一个参量，一般可以是一个复数.因此，格林函数实际上也是参变量λ的函数，不过我们未在 $G(x,x')$ 中显式地标出. $L(x)$ 是一个算符，一般是一个微分算符.当 $x=t$， $L(t)$ 就含有对时间的求导；当 $x=\boldsymbol{r}$， $L(\boldsymbol{r})$ 就含有对空间坐标的求导；当 $x=(\boldsymbol{r},t)$， $L(\boldsymbol{r},t)$ 就含有对时间和空间坐标的求导.

最常见的形式是二阶微分算子.若二阶微分算子算子写成施图姆-刘维尔形式，其中是含有一个权函数 $\rho(x)$.这个权函数在解函数的正交归一化中起作用.这种情况下，采用式(6.1.1b)的形式来求解格林函数.一般情况下，则用(6.1.1a)式.这时，可以认为权函数 $\rho(x)=1$.注意，当不涉及正交归一化，内积中的权函数是可以任意选择的，只要在积分区间上 $\rho(x)$ 不变号.

以下推导的公式，是按照(6.1.1b)的形式推导的.在不涉及特征函数集的情况下，只要将这这些公式中令 $\rho(x)=1$，就得到相应于式(6.1.1a)的公式.

由于 $L(x)$ 是一个微分算符，因此 $G(x,x')$ 满足的是一个微分方程.只是方程的右边是一个特定的函数，即δ函数.

既然 $G(x,x')$ 满足的是一个微分方程，在变量 x 含空间坐标时，就需要考虑边界条件；在变量 x 含时间坐标时，就需要考虑初始条件.以下把边界条件和初始条件统称为边界条件.因此，当我们求解格林函数的时候，一定要同时指明边界条件.以后如果我们不特别指明边界条件，就意味着在任何一个方向都没有限制的无界空间求解格林函数.

无界空间内的格林函数的解，一般称为**格林函数的基本解**.

6.1.2 格林函数的作用和性质

1. 格林函数的作用

如果要求满足一定边界条件的非齐次微分方程

$$[\lambda - L(x)]\psi(x) = f(x) \tag{6.1.2}$$

的解ψ，我们可以先求解出相应的齐次微分方程

$$[\lambda - L(x)]\varphi(x) = 0 \tag{6.1.3}$$

的解$\varphi(x)$，和方程(6.1.1)的解$G(x,x')$.那么(6.1.3)的解可用$\varphi(x)$与$G(x,x')$表示如下.

$$\psi(x) = \varphi(x) + \int \rho\ (x')\ G(x,x')\ f(x')\,\mathrm{d}x' \tag{6.1.4}$$

此式的证明：将此式代入(6.1.2)并利用方程(6.1.3)和(6.1.1)，

$$[\lambda - L(x)]\psi(x) = [\lambda - L(x)]\varphi(x) + [\lambda - L(x)]\int G(x,x')\rho(x') f(x')\mathrm{d}x'$$

$$= \int [\lambda - L(x)]G(x,x')\rho(x') f(x')\mathrm{d}x' = \frac{1}{\rho(x)}\int \delta(x-x')\rho(x') f(x')\mathrm{d}x' = f(x)$$

其中利用了δ函数的取样性质.

在 3.1.1 小节中我们已经提到过，二阶非齐次常微分方程的解，就是相应的齐次微分方程的通解加上非齐次方程的一个特解.而(6.1.4)的第一项正是齐次微分方程的通解，第二项是非齐次方程的一个特解.可见，从数学的角度来说，格林函数主要用于求解非齐次方程的特解.假设齐次方程的解已经给出.对于二阶齐次微分方程的解，第三章已经给出了比较一般的理论.本章给出一个求非齐次方程的特解的标准方法.就是，只要求出了格林函数，那么方程(6.1.3)的特解就是式(6.1.4)的后一项.

在第三章曾经给出一个非齐次方程通解的公式(3.1.18)和(3.1.24)式.式(6.1.4)的优点是，其中的格林函数$G(x,x')$有比较明确的物理意义，并且它适用于高维的情况.而式(3.1.24)只适用于一维情况.

我们在写出通解(6.1.4)的时候，还没有考虑到边界条件.对于具体的边界条件，通解的表达式中会加上由于边界条件而出现的项.后面会讨论.

凡是有一个微分方程(6.1.2)或者(6.1.3)，就有对应的格林函数所满足的方程(6.1.1).这时我们称这个格林函数就是方程(6.1.2)或者(6.1.3)的格林函数.它们的边界条件是否一定相同，视具体情况而定.如果方程(6.1.1)满足一定的边界条件，我们就称此为满足边值问题的格林函数.

3. 格林函数的存在唯一性和对称性

1) 格林函数的存在唯一性

设有 n 阶常微分算子

$$L(x) = \sum_{i=0}^{n} p_i(x)\frac{\mathrm{d}^i}{\mathrm{d}x^i} \tag{6.1.5}$$

其中 $p_i(x), i = 0,1,2,\cdots,n$ 是连续函数.设有如下齐次边值问题

$$L(x)y(x) = \sum_{i=0}^{n} p_i(x)\frac{\mathrm{d}^i}{\mathrm{d}x^i}y(x) = 0, a < x < b \tag{6.1.6a}$$

$$\sum_{i=0}^{n}[\alpha_{k,i}y^{(i-1)}(a)+\beta_{k,i}y^{(i-1)}(b)]=0, k=1,2,\ldots,n \tag{6.1.6b}$$

其中方程和边界条件都是齐次的.

与边值问题(6.1.6a)相应的格林函数满足的方程是

$$L(x)G(x,x')=\delta(x-x'), a<x,x'<b \tag{6.1.7a}$$

$$\sum_{i=0}^{n}\{\alpha_{k,i}[\frac{\mathrm{d}^i}{\mathrm{d}x^i}G(x,x')]_{x=a}+\beta_{k,i}[\frac{\mathrm{d}^i}{\mathrm{d}x^i}G(x,x')]_{x=b}\}=0, k=1,2,\ldots,n \tag{6.1.7b}$$

符合这一边值问题的格林函数的特点是，在 $x=x'$ 处，$\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}x^{n-1}}G(x,x')$ 是不连续的，其它各阶导数则都是连续的.

定理 1 若齐次边值问题(6.1.6)没有非零解，那么(6.1.7)有且仅有一个格林函数的解.

2) 格林函数的对称性

在 $\rho(x')=1$ 时，方程右边只剩 δ 函数，是 $x-x'$ 的函数.如果求解区域是无限大的，可以有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}(x-x')} \tag{6.1.8}$$

此时如果算符(6.1.5)中的各 $p_i(x)$ 都是 $x-x'$ 的函数，包括与 x 无关的常数，那么，容易看到格林函数一定具有以下形式：

$$G(x,x')=G(x-x') \tag{6.1.9}$$

如果 $x=t$，$G(t,t')=G(t-t')$，表示时间平移不变性；如果 $x=\boldsymbol{r}$，$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=G(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$，表示空间平移不变性.

在许多情况下，格林函数是关于变量交换对称的函数

$$G(x,x')=G(x',x) \tag{6.1.10}$$

注意，如果求解区域不是无限大，式(6.1.8)也不成立，格林函数也就不能写成(6.1.9)式右边的形式.

一维情况下，我们明确写出，无限大区间是指

$$-\infty<x,x'<\infty \tag{6.1.11}$$

对于有限区间的情况.我们将在 6.4.1 小节对于算符 $L(x)$ 是斯图姆-刘维尔算符的情况，证明：$G^*(x_1,x_2;\lambda)=G(x_2,x_1;\lambda^*)$.

以下我们主要讨论二阶微分方程的格林函数.

6.1.3 格林函数的求解方法

有一些比较标准的求解格林函数的方法.本小节主要介绍特征函数法、分段表示法和傅里叶变换法三种.后面的各节是应用这三种方法的具体实例.要特别注意每种方法的适用条件.

1. 特征函数法

对于一个量子力学的系统，如果哈密顿量 H 已知，那么，就可以求出相应的特征值和特征函数.数学上与此对应的是，二阶微分方程的斯图姆-刘维尔系统，可以求出满足一定边界条件的特征值和特征函数.

一般地，假定算符 $L(x)$ 的特征值 λ_n 和对应的特征函数 $\varphi_n(x)$ 已经求出，记

$$L(x)\varphi_n(x)=\lambda_n\varphi_n(x) \tag{6.1.12}$$

其中特征函数集 $\{\varphi_n(x)\}$ 遵从一定的边界条件，属于不同特征值的特征函数是相互正交的，并且设特征函数集 $\{\varphi_n(x)\}$ 已经归一化.那么，格林函数总是可以用这一特征函数集作如下展开.

$$G(x,x')=\sum_n c_n(x')\varphi_n(x) \tag{6.1.13}$$

为了求出展开系数 $c_n(x')$，两边用算子 $\lambda-L(x)$ 作用之后，得到

$$\delta(x-x')=\rho(x)\sum_n c_n(x')[\lambda-L(x)]\varphi_n(x)=\rho(x)\sum_n c_n(x')(\lambda-\lambda_n)\varphi_n(x)$$

两边乘以 $\varphi_m^*(x)$ 并对 x 积分，

$$\int \mathrm{d}x\varphi_m^*(x)\delta(x-x')=\sum_n c_n(x')(\lambda-\lambda_n)\int \mathrm{d}x\rho(x)\varphi_m^*(x)\varphi_n(x)$$

利用 $\{\varphi_n(x)\}$ 的正交归一性，就求得系数的表达式

$$c_m(x')=\frac{\varphi_m^*(x')}{\lambda-\lambda_m}$$

格林函数的表达式为

$$G(x,x',\lambda)=\sum_n\frac{\varphi_n^*(x')\varphi_n(x)}{\lambda-\lambda_n} \tag{6.1.14}$$

其中把参量 λ 显式地表示出来.如果特征值是连续谱，那么求和就写成积分.式(6.1.14)表明，格林函数的参变量 λ 不能等于式(6.1.12)的特征值 λ_n，因为 λ 等于特征值处，是格林函数的一级极点.这样的点上格林函数没有定义.

如果 $\lambda=\lambda_m$ 是谱 $\{\lambda_n\}$ 中的某一数值，怎么处理呢？(i)若 λ_n 是分立谱，可定义一个广义格林函数.将在 6.4.3 小节中介绍.(ii)若 $\{\lambda_n\}$ 是实连续谱，可以让参量 λ 在复平面的上半平面或者下半平面无限趋近实轴，从而定义格林函数的的两个侧极限.这两个侧极限都是有物理意义的.将在求基本解时介绍.

特征值 λ_n 的下标只写了一个指标 n.对于二维和三维情况，应该分别有两个和三个指标，此时(6.1.14)式中应对所有指标求和.

2. 分段表示法

此法只适用于一维情形.分段表示法的要点是：对于 $x > x'$ 和 $x < x'$ 的两个区域，方程(6.1.1)的右边都是为零.因而，在这两个区域，我们要求解的方程是

$$[\lambda - L(x)]\varphi(x) = 0 \tag{6.1.15}$$

求解时，先不考虑边界条件.

我们以 $L(x)$ 是二阶常微分方程的斯图姆-刘维尔算符

$$L(x) = -A(x)\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} - B(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + C(x) = \frac{1}{\rho(x)}[-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}p(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + q(x)] \tag{6.1.16}$$

为例，介绍求解(6.1.1)式的分段表示法.

当算符 $L(x)$是斯图姆-刘维尔型时，方程(6.1.1)成为

$$[\lambda\rho(x) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}p(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - q(x)]G(x,x') = \delta(x - x') \tag{6.1.17a}$$

相应于(6.1.15)的齐次方程为

$$[\lambda + \frac{1}{\rho(x)}(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}p(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - q(x))]\varphi(x) = 0 \tag{6.1.17b}$$

在第三章中我们知道，一定可以求出 $L(x)$ 的两个线性无关的特解 $\psi_1(x)$ 和 $\psi_2(x)$.两个区域的格林函数都应该写成这两个特解的线性组合：

$$G(x,x') = \begin{cases} c_1(x')\psi_1(x) + c_2(x')\psi_2(x), & x > x' \\ d_1(x')\psi_1(x) + d_2(x')\psi_2(x), & x < x' \end{cases} \tag{6.1.18}$$

要求格林函数在 $x = x'$ 处是连续的，

$$[c_1(x') - d_1(x')]\psi_1(x') + [c_2(x') - d_2(x')]\psi_2(x') = 0 \tag{6.1.19}$$

把方程(6.1.17a)两边对 x 从 $x = x' - 0^+$ 到 $x = x' + 0^+$ 积分.由于积分区域是无穷小，凡是连续函数的积分都为零.两边积分的结果为

$$\int_{x-0^+}^{x+0^+}\mathrm{d}x[\lambda\rho(x) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}p(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - q(x)]G(x,x')$$

$$= \int_{x-0^+}^{x+0^+}\mathrm{d}x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}p(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}G(x,x') = \rho(x')A(x')\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}G(x,x')\right]_{x-0^+}^{x+0^+} = 1$$

在 $x = x'$ 的左右两侧的格林函数的表达式已经知道，就是(6.1.18)式，求导后代入上式，得到

$$\rho(x')A(x')[(c_1(x') - d_1(x'))\psi_1'(x) + (c_2(x') - d_2(x'))\psi_2'(x)] = 1 \tag{6.1.20a}$$

当二阶微分算符的系数都是常数，即 $A(x)$, $B(x)$和 $C(x)$都是常数，我们使用(6.1.1a)，

$$\int_{x-0^+}^{x+0^+}\mathrm{d}x(\lambda + A\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + B\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - C)G(x,x') = A(x)\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}G(x,x')\right]_{x-0^+}^{x+0^+} = 1$$

将这一结果代入(6.1.18)式，就得到

$$A[(c_1(x')-d_1(x'))\psi_1'(x)+(c_2(x')-d_2(x'))\psi_2'(x)]=1 \qquad (6.1.20b)$$

式(6.1.20)和(6.1.19)联立，即可求得

$$c_1(x')-d_1(x')=-\frac{\psi_2(x')}{\rho(x')A(x')W(x')},c_2(x')-d_2(x')=\frac{\psi_1(x')}{\rho(x')A(x')W(x')} \qquad (6.1.21)$$

其中

$$W(x')=\psi_1(x')\psi_2'(x)-\psi_2(x')\psi_1'(x) \qquad (6.1.22)$$

是朗斯基行列式.已知ψ_1和ψ_2是线性无关的，故朗斯基行列式不为零.对于(6.1.20a)的情况，我们记，

$$A_W(x')=\rho(x')A(x')W(y_1(x'),y_2(x')) \qquad (6.1.22a)$$

对于(6.1.20b)的情况，我们记

$$A_W(x')=AW(y_1(x'),y_2(x')) \qquad (6.1.22b)$$

把式(6.1.21)代入(6.1.18)，总是还剩下两个参量未定.它们是要根据边界条件来定的.可以把格林函数写成以下几种表达式.

(i)

$$G(x,x')=\begin{cases}[d_1(x')-\dfrac{\psi_2(x')}{A_W(x')}]\psi_1(x)+c_2(x')\psi_2(x),\ x>x' \\ d_1(x')\psi_1(x)+[c_2(x')-\dfrac{\psi_1(x')}{A_W(x')}]\psi_2(x),\ x<x'\end{cases} \qquad (6.1.23a)$$

特殊情况，若$d_1(x')=c_2(x')=0$，(6.1.23a)式简化为

$$G(x,x')=\begin{cases}-\dfrac{\psi_2(x')\psi_1(x)}{A_W(x')},\ x\ge x' \\ -\dfrac{\psi_1(x')\psi_2(x)}{A_W(x')},\ x\le x'\end{cases} \qquad (6.1.23b)$$

并进一步可利用阶跃函数统一写成

$$G(x,x')=-\frac{1}{A_W(x')}[\psi_2(x')\psi_1(x)\theta(x-x')+\psi_1(x')\psi_2(x)\theta(x'-x)] \qquad (6.1.23c)$$

(ii)

$$G(x,x')=\begin{cases}[d_1(x')-\dfrac{\psi_2(x')}{A_W(x')}]\psi_1(x)+[d_2(x')+\dfrac{\psi_1(x')}{A_W(x')}]\psi_2(x),\ x>x' \\ d_1(x')\psi_1(x)+d_2(x')\psi_2(x),\ x<x'\end{cases} \qquad (6.1.24a)$$

或者

$$G(x,x')=d_1(x')\psi_1(x)+d_2(x')\psi_2(x)-\frac{\psi_2(x')\psi_1(x)-\psi_1(x')\psi_2(x)}{A_W(x')}\theta(x-x') \qquad (6.1.24b)$$

一旦建立了边界条件，就可求出$d_1(x'),d_2(x')$.

特殊情况，若 $d_1(x')=d_2(x')=0$，(6.1.24b) 式简化为

$$G(x,x')=-\frac{1}{A_W(x')}[\psi_2(x')\psi_1(x)-\psi_1(x')\psi_2(x)]\theta(x-x') \tag{6.1.24c}$$

(iii)

$$G(x,x')=\begin{cases} c_1(x')\psi_1(x)+c_2(x')\psi_2(x),\ x>x' \\ [c_1(x')+\dfrac{\psi_2(x')}{A_W(x')}]\psi_1(x)+[c_2(x')-\dfrac{\psi_1(x')}{A_W(x')}]\psi_2(x),\ x<x' \end{cases} \tag{6.1.25a}$$

或者

$$G(x,\ x')=c_1(x')\psi_1(x)+c_2(x')\psi_2(x)$$

$$+\frac{1}{A_W(x')}[\psi_2(x')\psi_1(x)-\psi_1(x')\psi_2(x)]\theta(x'-x) \tag{6.1.25b}$$

一旦建立了边界条件，就可求出 $c_1(x'),c_2(x')$.

特殊情况，若 $c_1(x')=c_2(x')=0$，(6.1.25b) 式简化为

$$G(x,x')=\frac{1}{A_W(x')}[\psi_2(x')\psi_1(x)-\psi_1(x')\psi_2(x)]\theta(x'-x) \tag{6.1.25c}$$

将(6.1.14)式与(6.1.23-25)诸式比较，需要说明以下三点.

(1) $G(x,x')$ 是参变量λ的函数，因此(6.1.23)-(6.1.25)诸式的分母朗斯基行列式是含参变量λ的两个线性无关解的组合.

(2) 分段表示法主要用于变量 x 是一维坐标的情况，使用了从 $x=x'$ 的左侧到右侧的积分，如(6.1.20)式那样.而特征函数法对于变量 x 没有限制，x 可以是 6.1.1 小节中说的任意情况，即可以是多维坐标.

(3) 特征函数法是有一系列特征值及相应特征函数的最一般的情况.若相应的边值问题(6.1.12)无非零特征函数，就不能运用此法.

在§6.5 中，将介绍在二维和三维空间如何应用分段表示法.

3. 傅里叶变换法

如果算符 $L(x)$ 是常系数微分算符，且求解区域是无限大的，即(6.1.11)时，可以用傅里叶变换的方法来求解格林函数.

例如，算符 $L(x)$ 是一维的二阶常系数微分算符，即为如下形式

$$L(x)=A\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}+2B\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}+C \tag{6.1.26}$$

我们以变量 x 是时间 t 为例来说明此方法.按照(6.1.1a)来求格林函数满足，

$$(A\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}+2B\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}+C)G(t,t')=\delta(t-t') \tag{6.1.27}$$

这时由(6.1.8)式知，格林函数具有平移不变性，即有(6.1.9)的形式.

$$(A\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}+2B\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}+C)G(t-t')=\delta(t-t') \tag{6.1.28}$$

对格林函数做傅里叶变换

$$G(t-t')=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}G(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega(t-t')}\mathrm{d}\omega \tag{6.1.29}$$

将它与$\delta(t-t')$函数的傅里叶变换代入方程(6.1.28).

$$(-A\omega^2-2\mathrm{i}B\omega+C)G(\omega)=1 \tag{6.1.30}$$

解得格林函数的傅里叶变换式

$$G(\omega)=\frac{1}{-A\omega^2-2\mathrm{i}B\omega+C} \tag{6.1.31}$$

代入(6.1.29)式，

$$G(t-t')=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega(t-t')}}{-A\omega^2-2\mathrm{i}B\omega+C}\mathrm{d}\omega \tag{6.1.32}$$

式(6.1.31)的分母正是算符(6.1.26)的根的判别式，它有两个根，设两个根分别为ω_1和ω_2且$\omega_1\neq\omega_2$，那么

$$-A\omega^2-2\mathrm{i}B\omega+C=-A(\omega-\omega_1)(\omega-\omega_2) \tag{6.1.33}$$

其中

$$\omega_1=\frac{1}{A}(-\mathrm{i}B+\sqrt{AC-B^2}),\quad \omega_2=\frac{1}{A}(-\mathrm{i}B-\sqrt{AC-B^2}) \tag{6.1.34}$$

式(6.1.31)可写为

$$G(\omega)=\frac{1}{\omega_2-\omega_1}(\frac{1}{\omega-\omega_1}-\frac{1}{\omega-\omega_2}) \tag{6.1.35}$$

代入(6.1.32)

$$G(t-t')=-\frac{1}{4\pi\sqrt{AC-B^2}}\int_{-\infty}^{\infty}(\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega(t-t')}}{\omega-\omega_1}-\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega(t-t')}}{\omega-\omega_2})\mathrm{d}\omega \tag{6.1.36}$$

此处有两项积分，被积函数都具有一级极点.对于每一项，根据一级极点ω_1或者ω_2在复ω平面内的位置来决定是在上半平面还是在下半平面补上无穷大积分路径构成闭合回路积分，再利用留数定理求得积分的数值.

4. 求解非齐次方程的步骤

根据上面的叙述，我们叙述求解非齐次方程(6.1.2)的大致的步骤.

(1) 求解相应的齐次方程(6.1.3)，得到其特征值和对应的特征函数.

(2) 求解格林函数满足的相应的方程(6.1.1)，其中或者要用到前一步求出的特征值和特征函数，或者要用分段表示法求解.

(3) 由(6.1.4)式得到非齐次方程(6.1.2)的通解.

§6.2 拉普拉斯算子的基本解

本节我们考虑一个简单的情况,式(6.1.1)中的算子 $L(x)$ 是拉普拉斯算子，

$$L(\boldsymbol{r})=-\nabla_{\boldsymbol{r}}^2 \tag{6.2.1}$$

现在的权函数 $\rho(x)=1$.方程

$$\nabla_{\boldsymbol{r}}^2\psi(\boldsymbol{r})=0 \tag{6.2.2}$$

称为**拉普拉斯方程**，也称为**调和方程**.满足调和方程的函数称为**调和函数**.而方程

$$(\lambda+\nabla_{\boldsymbol{r}}^2)\psi(\boldsymbol{r})=0 \tag{6.2.3}$$

称为**亥姆霍兹方程**.在亥姆霍兹方程中通常将参量写成 $\lambda=\boldsymbol{k}^2$.

对应于亥姆霍兹方程的格林函数满足的方程就是

$$(\lambda+\nabla_{\boldsymbol{r}}^2)G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}';\lambda)=\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') \tag{6.2.4}$$

求出格林函数之后，令其中的参量 $\lambda\to 0$，就得到了拉普拉斯方程对应的格林函数.式(6.2.4)的求解区域V是全空间, 边界条件是: 格林函数在无限远处应是有限值.

我们用特征函数法求解.为此先求出拉普拉斯算子的特征函数.

$$-\nabla_{\boldsymbol{r}}^2\varphi_n(\boldsymbol{r})=\lambda_n\varphi_n(\boldsymbol{r}) \tag{6.2.5}$$

也就是求解亥姆霍兹方程.(6.2.5)式的特征函数是:

$$\varphi_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{r})=\frac{1}{\sqrt{2\pi}^d}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} \tag{6.2.6}$$

其中 $d=1,2,3$ 分别对应于一维、二维和三维的情况.特征值为

$$\lambda_n=\boldsymbol{k}^2 \tag{6.2.7}$$

现在矢量 $\boldsymbol{k}$ 就可用来代替特征值的下标 n. 可以套用公式(6.1.14)来求得格林函数.在计算之前，应考虑如何求和.

式(6.2.7)表明特征值构成连续谱, 范围从 $0\sim+\infty$, 没有分立特征值.每一个特征值对应于 $\pm\boldsymbol{k}$ 两个值.每一个 $\boldsymbol{k}$ 对应一个特征函数.物理上，这叫做二重简并.注意在(6.1.14)式中求和，要包括所有简并的状态.在本例的情况，(6.1.14)式中对 n 求和要写成对 $\boldsymbol{k}$ 的求和.而 $\boldsymbol{k}$ 的范围是整个空间.又 $\boldsymbol{k}$ 的变化是连续的，因此求和要写成积分.对于二维和三维空间，$\boldsymbol{k}$ 是一个矢量，分别有两个和三个分量，也就是在二维和三维空间积分.根据这些讨论，将求和写成如下形式.

$$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}';\lambda)=\sum_{\boldsymbol{k}}\frac{\varphi_{\boldsymbol{k}}^*(\boldsymbol{r}')\varphi_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{r})}{\lambda-\boldsymbol{k}^2}=\int\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{k}}{(2\pi)^d}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}}{\lambda-\boldsymbol{k}^2} \tag{6.2.8}$$

此处简记 $\mathrm{d}\boldsymbol{k}=\mathrm{d}^d\boldsymbol{k}$.下面按照一维、二维和三维的情况分别作具体计算.

一般情况下，λ是个复数，其根号记为

$$\sqrt{\lambda}=p+\mathrm{i}q \tag{6.2.9}$$

以下的讨论中都设 $\mathrm{Im}\lambda>0$ 和 $p>0$.对于其它情况，可做类似的讨论.

6.2.1 三维情况

三维情况 d=3.令 $\boldsymbol{\rho}=\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'$, 且 $\boldsymbol{\rho}$ 与 $\boldsymbol{k}$ 之间的夹角为 θ, 可直接对(6.2.8)式计算积分.

$$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}';\lambda)=\frac{1}{8\pi^3}\int_0^\infty\frac{2\pi k^2\mathrm{d}k}{\lambda-k^2}\int_0^\pi\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\rho\cos\theta}$$
$$=\frac{1}{4\pi^2}\int_0^\infty\frac{k^2\mathrm{d}k}{\lambda-k^2}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\rho}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\rho}}{\mathrm{i}k\rho}=\frac{1}{4\mathrm{i}\pi^2\rho}\int_{-\infty}^\infty\frac{k\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\rho}}{\lambda-k^2}\mathrm{d}k$$

其中将第二个等式中的后项作 $k\to -k$ 的变换成为$(-\infty,0)$区间内的积分.

$$\begin{aligned}G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}';\lambda)&=\frac{1}{8\mathrm{i}\pi^2\rho}\int_{-\infty}^\infty\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\rho}}{k-\sqrt{\lambda}}+\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\rho}}{k+\sqrt{\lambda}}\right)\mathrm{d}k\\&=\frac{1}{8\mathrm{i}\pi^2\rho}\int_{-\infty}^\infty\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\rho}}{k-(p+\mathrm{i}q)}+\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\rho}}{k+(p+\mathrm{i}q)}\right)\mathrm{d}k\end{aligned}\tag{6.2.10}$$

现在我们设有一复 k 平面,(6.2.10)式是沿着其实轴积分.我们利用留数定理进行积分.式(6.2.10)中的两项都只能在上半平面补上无限大半圆构成闭合回路作积分.现在 $\sqrt{\lambda}$ 如(6.2.9)式，则被积函数中的两项的极点位置分别在上下平面，因而只能有一项对积分有贡献.

若 $q>0$，则(6.2.10)中第一项的极点 $\sqrt{\lambda}$ 在上半平面内，第二项的极点 $-\sqrt{\lambda}$ 在下半平面内.只有第一项的积分有贡献.积分结果为

$$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}';\lambda)=-\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sqrt{\lambda}|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}=-\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p+\mathrm{i}q)|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}=-\frac{\mathrm{i}\sqrt{\lambda}}{4\pi}h_0^{(1)}(\sqrt{\lambda}|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|),q>0\tag{6.2.11a}$$

其中最后一个等式见(4.5.24c)，结果就是零阶第一类球汉克尔函数.若 $q<0$，则(6.2.10)中第二项的极点 $\sqrt{\lambda}$ 在上半平面内.只有这一项的积分有贡献.积分结果为

$$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}';\lambda)=-\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sqrt{\lambda}|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}=-\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p+\mathrm{i}q)|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}=\frac{\mathrm{i}\sqrt{\lambda}}{4\pi}h_0^{(2)}(\sqrt{\lambda}|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|),q<0\tag{6.2.11b}$$

最后结果表示成零阶第二类球汉克尔函数，见(4.5.24d)式.

如果 $\lambda<0$ 是个负实数，那么只要在(6.2.11a)或者(6.2.11b)式中令 $p=0$.由前者得到

$$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}';-q^2)=-\frac{\mathrm{e}^{-q|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}=\frac{q}{4\pi}h_0^{(1)}(\mathrm{i}q|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|),q\geq 0\tag{6.2.12}$$

特别是当其中 $q=0$ 即 $\lambda=0$ 时，

$$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}';0)=-\frac{1}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\tag{6.2.13}$$

这正是三维方程

$$\nabla_{\boldsymbol{r}}^2G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}';0)=\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\tag{6.2.14}$$

的解.满足方程(6.2.14)的格林函数的物理意义是：位于 $\boldsymbol{r}'$ 的点电荷在三维空间各点产生的电势.

如果$\lambda>0$是个正实数(也即在算子$L(\boldsymbol{r})=-\nabla_{\boldsymbol{r}}^2$的谱范围内)，由于式(6.2.10)中两项被积函数的极点都在实轴上，无法积分，所以格林函数没有定义.此时，我们可以利用(6.2.11)式的结果定义两个侧极限.在(6.2.11)式中令虚部q是个无穷小量并且在最后忽略这个无穷小量.那么就分别得到

$$G^{+}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}';p^2)=-\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}p|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}=-\frac{\mathrm{i}p}{4\pi}h_0^{(1)}(p|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|),\ p>0 \tag{6.2.15a}$$

$$G^{-}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}';p^2)=-\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}=\frac{\mathrm{i}p}{4\pi}h_0^{(2)}(p|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|),\ p>0 \tag{6.2.15b}$$

G^{+}表示参量λ在上半平面无限趋近于正实轴的极限，G^{-}则表示参量λ在下半平面无限趋近于正实轴的极限.因此当λ为正实数的时候，我们可以选择这两式之一.那么到底应该选择其中哪一个呢？式(6.2.15a)表示从中心向外发散的球面波，而(6.2.15b)则表示从无穷远处像中心汇聚的球面波.因此，如果要考虑发散波，用(6.2.15a)式；若要考虑汇聚波，则用(6.2.15b)式.

6.2.2 二维情况

二维情况d=2.令$\boldsymbol{\rho}=\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'$，且$\boldsymbol{\rho}$与$\boldsymbol{k}$之间的夹角为$\theta$，可直接对(6.2.8)式计算积分.

$$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}';\lambda)=\int\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{k}}{(2\pi)^2}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}}{\lambda-\boldsymbol{k}^2}=\int\frac{k\mathrm{d}\theta\mathrm{d}k}{(2\pi)^2}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\rho\cos\theta}}{\lambda-k^2} \tag{6.2.16}$$

平面波因子$\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\rho\cos\theta}$可以按照贝塞尔函数展开.见(4.3.20b)式.

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\rho\cos\theta}=J_0(k\rho)+2\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{i}^nJ_n(k\rho)\cos n\theta$$

代入(6.2.16)式，得到

$$\begin{aligned}G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}';\lambda)&=\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{\infty}\frac{k\mathrm{d}k}{\lambda-k^2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta[J_0(k\rho)+2\sum_{n=1}^{\infty}i^nJ_n(k\rho)\cos n\theta]\\&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}\mathrm{d}k\frac{kJ_0(k\rho)}{\lambda-k^2}=\frac{1}{4\pi}\int_0^{\infty}\mathrm{d}k\frac{k[H_0^{(1)}(k\rho)+H_0^{(2)}(k\rho)]}{\lambda-k^2}\end{aligned} \tag{6.2.17}$$

显然，对角度积分之后，只剩下零阶贝塞尔函数的项不为零.再把零阶第一类贝塞尔用第三类贝塞尔函数来表达，见(4.5.1)式.

$$J_0(z)=\frac{1}{2}[H_0^{(1)}(z)+H_0^{(2)}(z)]$$

就得到(6.2.17)的最后等式.由(4.5.6)式得到零阶第一类和第二类汉克尔函数之间的关系，

$$H_0^{(1)}(-z)=-H_0^{(2)}(z) \tag{6.2.18}$$

可以只积分其中一项，同时把积分区域扩展到整个实轴.

$$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}';\lambda)=\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}k\ \frac{kH_0^{(1)}(k\rho)}{\lambda-k^2}=-\frac{1}{8\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{H_0^{(1)}(k\rho)}{k-\sqrt{\lambda}}+\frac{H_0^{(1)}(k\rho)}{k+\sqrt{\lambda}}\right)\mathrm{d}k \quad (6.2.19)$$

与三维情况一样，我们利用留数定理进行积分.先看汉克尔函数在无限远处的极限行为.

$$H_\nu^{(1)}(k\rho\to\infty)=\sqrt{\frac{2}{\pi k\rho}}\exp[\mathrm{i}(k\rho-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4})] \quad (6.2.20\mathrm{a})$$

$$H_\nu^{(2)}(k\rho\to\infty)=\sqrt{\frac{2}{\pi k\rho}}\exp[-\mathrm{i}(k\rho-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4})] \quad (6.2.20\mathrm{b})$$

可见，式(6.2.19)中的两项都只能在上半平面补上无限大半圆构成闭合回路作积分.$\sqrt{\lambda}$ 如(6.2.9)式，则被积函数中的两项的极点位置分别在上下平面，因而只能有一项对积分有贡献.

若 $q>0$，则(6.2.19)中第一项的极点 $\sqrt{\lambda}$ 在上半平面内，第二项的极点 $-\sqrt{\lambda}$ 在下半平面内.只有第一项的积分有贡献.因此，

$$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}';\lambda)=-\frac{1}{8\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{H_0^{(1)}(k\rho)}{k-\sqrt{\lambda}}\mathrm{d}k=-\frac{\mathrm{i}}{4}H_0^{(1)}((p+\mathrm{i}q)\rho),q>0 \quad (6.2.21\mathrm{a})$$

若 $q<0$，则(6.2.19)中第二项的极点 $\sqrt{\lambda}$ 在上半平面内. 只有这一项的积分有贡献.积分结果为

$$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}';\lambda)=-\frac{1}{8\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{H_0^{(1)}(k\rho)}{k+\sqrt{\lambda}}\mathrm{d}k=-\frac{\mathrm{i}}{4}H_0^{(1)}(-(p+\mathrm{i}q)\rho),q<0 \quad (6.2.21\mathrm{b})$$

如果 $\lambda<0$ 是个负实数，那么只要在(6.2.21a)或者(6.2.21b)式中令 $p=0$.由前者得到

$$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}';-q^2)=-\frac{\mathrm{i}}{4}H_0^{(1)}(\mathrm{i}q\rho)=\frac{1}{2\pi}K_0(q\rho),q\ge 0 \quad (6.2.22)$$

其中利用了公式 $H_\nu^{(1)}(\mathrm{i}z)=-\dfrac{2}{\pi}\mathrm{i}e^{-\mathrm{i}\nu\pi/2}K_\nu(z)$，$K_0$ 是零阶变型第二类贝塞尔函数.

特别是当 $q=0$ 即 $\lambda=0$ 时,利用汉克尔函数的渐近式 $H_0^{(1)}(z\to 0)\sim\mathrm{i}\dfrac{2}{\pi}\ln\dfrac{z}{2}$,得到

$$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}';\lambda\to 0)\to-\frac{\mathrm{i}}{4}\mathrm{i}\frac{2}{\pi}\ln\frac{\sqrt{\lambda}\,|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}{2}=\frac{1}{2\pi}(\ln|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|+\ln\frac{\sqrt{\lambda}}{2})$$

后一项虽然是无穷大，却是一个常数.

因此，$\lambda=0$ 时，得到二维拉普拉斯算子的格林函数：

$$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}';0)=\frac{1}{2\pi}\ln|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|+\text{常数} \quad (6.2.23)$$

注意：出来一无穷大常数的原因，是在(6.2.19)式中当 $\lambda=0$ 时，被积函数在原点不是简单的一级极点. (思考：为什么说 $\lambda=0$ 处不是简单的一级极点？)

式(6.2.23)的格林函数满足二维空间的拉普拉斯方程 $\nabla_{\boldsymbol{r}}^2G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}';0)=\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$，它的物理意义是：二维空间中位于 $\boldsymbol{r}'$ 的点电荷在空间各点产生的电势.

如果$\lambda > 0$是个正实数(也即在算子$L(\boldsymbol{r}) = -\nabla_{\boldsymbol{r}}^2$的谱范围内), 由于式(6.2.19)中两项被积函数的极点都在实轴上, 无法积分, 所以格林函数没有定义.此时，我们可以利用(6.2.21)式的结果定义两个侧极限.在(6.2.21)式中令虚部q是个无穷小量并且在最后忽略这个无穷小量.那么就分别得到

$$G^{+}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}';p^2) = -\frac{\mathrm{i}}{4}H_0^{(1)}(p\rho), p > 0 \tag{6.2.24a}$$

$$G^{-}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}';p^2) = -\frac{\mathrm{i}}{4}H_0^{(1)}(-p\rho) = \frac{\mathrm{i}}{4}H_0^{(2)}(p\rho), p > 0 \tag{6.2.24b}$$

因此当λ为正实数的时候，我们可以选择这两式之一.G^{+}表示参量λ在上半平面无限趋近于正实轴的极限， G^{-}则表示参量λ在下半平面无限趋近于正实轴的极限.由(6.2.20)是可知，第一类汉克尔函数的渐进式表示了它是向无限远处去的出射波，而第二类汉克尔函数的渐进式表示了它是从无限远处来的入射波.因此，当我们考虑从中心发出的出射波的行为时，就用G^{+}，若考虑向中心的汇聚波的行为，就用G^{-}.

若将两个位置矢量$\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'$的大小和方向代入(6.2.21)式，则得到

$$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}';\lambda) = -\frac{\mathrm{i}}{4}H_0^{(1)}(\sqrt{\lambda}\,|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|) = \frac{\mathrm{i}}{4}H_0^{(1)}(\sqrt{\lambda}\sqrt{r^2 - 2rr'\cos\theta + r'^2}) \tag{6.2.25}$$

式中θ是$\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'$之间的夹角.

6.2.3 一维情况

一维情况 d=1. 容易直接对(6.2.8)式计算积分.

$$G(x,x';\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}k\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(x-x')}}{\lambda - k^2} = -\frac{1}{4\pi\sqrt{\lambda}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}k(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(x-x')}}{k-\sqrt{\lambda}} - \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(x-x')}}{k+\sqrt{\lambda}}) \tag{6.2.26}$$

利用留数定理进行积分.$\sqrt{\lambda}$是(6.2.9)式.

当$q > 0$时，第一项的极点在上半平面内，第二项的极点$-\sqrt{\lambda}$在下半平面内.积分时要注意，当$x - x' > 0$，只能在上半平面补上无穷大半圆构成积分回路，因此只有第一项积分不为零；当$x - x' < 0$，只能在下半平面补上回路积分，只有第二项积分不为零.

$$G(x,x';\lambda) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p+\mathrm{i}q)|x-x'|}}{2\mathrm{i}\sqrt{\lambda}}, q > 0 \tag{6.2.27a}$$

当$q < 0$时，积分的结果为

$$G(x,x';\lambda)=-\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p+\mathrm{i}q)|x-x'|}}{2\mathrm{i}\sqrt{\lambda}},q<0 \tag{6.2.27b}$$

如果$\lambda<0$是个负实数，只要在上两式中令$p=0$，

$$G(x,x';-q^2)=-\frac{1}{2q}\mathrm{e}^{-q|x-x'|},q>0 \tag{6.2.28}$$

特别是当$q=0$即$\lambda=0$时,要特别注意.我们关注的是格林函数随空间坐标的变化情况.我们应把 e 指数对于小 q 展开至一级项.

$$G(x,x',q\to 0)=-\frac{1}{2q}[(1-q\,|\,x-x'\,|]=\frac{1}{2}|\,x-x'\,|-\frac{1}{2q}$$

结果是

$$G(x,x';0)=\frac{1}{2}|\,x-x'\,|+\text{常数} \tag{6.2.29}$$

这就是一维拉普拉斯方程的格林函数.与二维的情况类似，后面一项尽管在$\lambda\to 0$时趋于无穷大，但它是与 x 无关的常数.出来一无穷大常数的原因，是在(6.2.26)式中当$\lambda=0$时，被积函数在原点不是简单的一级极点.

如果$\lambda>0$是个正实数(也即在算子$L(x)=-\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}$特征谱范围内), 由于式(6.2.26)中两项的极点都在实轴上, 无法积分, 所以格林函数没有定义.此时，我们可以利用(6.2.27)式的结果定义两个侧极限.令其中的虚部 q 是个无穷小量并且在最后忽略这个无穷小量.那么就分别得到

$$G^{\pm}(x,x';p^2)=\pm\frac{\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}p|x-x'|}}{2\mathrm{i}p},p>0 \tag{6.2.30}$$

因此当λ为正实数的时候，我们可以选择这两式之一.G^+和G^-分别表示参量λ在上平面无限和在下半平面趋近于正实轴的极限.它们分别表示从中心向两侧和从两侧向中心传播的波，因此也是出射波和汇聚波的概念.

请注意，(6.2.8)实际上就是基本解的傅里叶变换表达式.通过以上三小节的计算，我们分别得到了三维、二维和一维的坐标空间中的格林函数基本解的表达式.在 $\boldsymbol{k}$ 空间的表达式显然就是(6.2.8)式中被积函数去掉 e 因子后的函数，也就是

$$G(\boldsymbol{k};\lambda)=-\frac{1}{k^2-\lambda+\mathrm{i}\varepsilon} \tag{6.2.31}$$

此处在分母上加上了一个无限小虚部，强调参量λ不取在实轴上.

§6.3 阻尼振子的格林函数

经典力学中受迫阻尼振子方程的柯西问题：

$$(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}+2\gamma\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}+\omega_0^2)\psi(t)=F(t),t>t_0 \tag{6.3.1a}$$

$$\gamma > 0, \omega_0 > \gamma，\quad \psi(t)|_{t=t_0} = x_0; \psi'(t)|_{t=t_0} = y_0 \tag{6.3.1b}$$

这是个一维问题，其中时间的起点是t_0.我们按照 6.1.3 小节末尾叙述的三个步骤来求解这个方程.

6.3.1 齐次方程的解

先求解齐次二阶常微分方程

$$-L(t)\varphi(t) = 0 \tag{6.3.2a}$$

$$\gamma > 0, \omega_0 > \gamma，\quad \varphi(t)|_{t=t_0} = x_0; \varphi'(t)|_{t=t_0} = y_0 \tag{6.3.2b}$$

其中算子

$$L(t) = -(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} + 2\gamma\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2) \tag{6.3.3}$$

这是一个常系数的二阶微分算符.式(6.3.2)现在是个常系数的二阶微分方程.令$\psi(t) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$代入(6.3.2),得到特征方程

$$-\omega^2 - 2\mathrm{i}\gamma\omega + \omega_0^2 = 0 \tag{6.3.4}$$

两个特征根是

$$\omega_{1,2} = -\mathrm{i}\gamma \pm \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} = -\mathrm{i}\gamma \pm \alpha \tag{6.3.5}$$

其中已令$\alpha = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$.因此得到两个线性无关的解：

$$\psi_1(t) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_1 t}, \psi_2(t) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_2 t} \tag{6.3.6}$$

相应的朗斯基行列式

$$W(\psi_1, \psi_2) = \begin{vmatrix} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_1 t} & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_2 t} \\ -\mathrm{i}\omega_1\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_1 t} & -\mathrm{i}\omega_2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_2 t} \end{vmatrix} = \mathrm{i}(\omega_1 - \omega_2)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega_1+\omega_2)t} = 2\mathrm{i}\alpha\mathrm{e}^{-2\gamma t}$$

算符(6.3.3)中函数$A(t) = 1$.因而

$$A_W(t') = \rho(t')A(t')W(\psi_1(t'), \psi_2(t')) = 2\mathrm{i}\alpha\mathrm{e}^{-2\gamma t'} \tag{6.3.7}$$

其中用了(6.1.22b)式.

6.3.2 求解格林函数

按照(6.1.1a)来求$G(t,t')$：

$$-L(t)G(t,t') = \delta(t-t'),\quad t, t' > t_0 \tag{6.3.8a}$$

其中算符是(6.3.3)式.由此式决定的函数$G(t,t')$称为柯西问题的格林函数.由于边界条件中非齐次的部分已归于(6.3.2b)，对于格林函数只需选择齐次的初始条件

$$G(t_0,t')=0,[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}G(t,t')]_{t=t_0}=0 \tag{6.3.8b}$$

这一形式也称为单点边界条件.

现在要求解是一维格林函数，可以用分段表示法求解.我们按照(6.1.24b)式写出格林函数的表达式.

$$G(t,t')=d_1(t')\psi_1(t)+d_2(t')\psi_2(t)-\frac{\psi_2(t')\psi_1(t)-\psi_1(t')\psi_2(t)}{A_W(t')}\theta(t-t') \tag{6.3.9}$$

由初始条件(6.3.8b)

$$G(t_0,t')=d_1(t')\psi_1(t_0)+d_2(t')\psi_2(t_0)=0$$

$$[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}G(t,t')]_{t=t_0}=d_1(t')\psi_1'(t_0)+d_2(t')\psi_2'(t_0)=0$$

可解得$d_1(t')=d_2(t')=0$.

$$\begin{aligned}G(t,t')&=\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_2t'-\mathrm{i}\omega_1t}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_1t'-\mathrm{i}\omega_2t}}{2\mathrm{i}\alpha}\theta(t-t')\\&=\exp[-\mathrm{i}((-\mathrm{i}\gamma-\alpha)t'+(-\mathrm{i}\gamma+\alpha)t]-\exp[-\mathrm{i}((-\mathrm{i}\gamma+\alpha)t'+(-\mathrm{i}\gamma-\alpha)t)]\frac{\theta(t-t')}{2\mathrm{i}\alpha}\\&=\frac{\mathrm{e}^{-\gamma(t-t')}}{2\mathrm{i}\alpha}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha(t-t')}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha(t-t')})\theta(t-t')=-\frac{\mathrm{e}^{-\gamma(t-t')}}{\alpha}\sin[\alpha(t-t')]\theta(t-t')\end{aligned} \tag{6.3.10}$$

最后得到

$$G(t,t')=\frac{\mathrm{e}^{-\gamma(t-t')}}{\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}}\sin[\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}(t-t')]\theta(t-t') \tag{6.3.11}$$

对于阻尼振子的微分方程，在初始条件(6.3.8b)下，得到了格林函数只有推迟部分.这说明实际的阻尼振子系统一旦在某一时刻t_0启动，只能朝着未来的方向演化.格林函数(6.3.11)是宗量$t-t'$的函数.

注意，本例是用分段表示法来求格林函数的.

6.3.3 方程的通解

现在可以写出原非齐次方程(6.3.1)的通解了.齐次方程(6.3.2)式的解应该是(6.3.6)的两个线性无关解的线性组合.由(6.1.4)式，得到通解的形式为

$$\begin{aligned}x(t)&=\varphi(t)+\int_{t_0}^{\infty}\rho(t')G(t,t')f(t')\mathrm{d}t'\\&=b_1\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_1t}+b_2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_2t}+\int_{t_0}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{-\gamma(t-t')}}{\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}}\sin[\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}(t-t')]\theta(t-t')F(t')\mathrm{d}t'\end{aligned} \tag{6.3.12}$$

其中的系数b_1,b_2由(6.3.1b)的初始条件所决定.式(6.3.12)的最后一项就是方程(6.3.1)的特解.

当 $t<t'$ 时，特解项为零.因此

$$x(t<t')=b_1\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_1 t}+b_2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_2 t} \tag{6.3.13}$$

方程(6.3.1)右边的函数 $F(t)$ 表示外界对系统的作用.在这个作用发生之前，系统只是按照齐次方程所固有的模式运动.只有这个作用发生之后，系统才会有相应的响应，式(6.3.12)的特解项就是表示这样的响应.

我们现在假设一种特殊情况.

$$F(t)=F_0\mathrm{e}^{-\beta t}\theta(t)$$

并且 $t_0=0$.在初始时刻 $x(t)|_{t=0}=0; x'(t)|_{t=0}=0$.求得两个系数 $b_1=b_2=0$.式(6.3.12)积分后得到

$$\begin{aligned}x(t)&=\int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-\gamma(t-t')}}{\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}}\sin[\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}(t-t')]\theta(t-t')F_0\mathrm{e}^{-\beta t'}\mathrm{d}t'\\&=\frac{F_0}{\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}}\frac{\sin[\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}t-\phi]}{\sqrt{\omega_0^2+\beta^2-2\beta\gamma}}\mathrm{e}^{-\gamma t}+\frac{F_0\mathrm{e}^{-\beta t}}{\omega_0^2+\beta^2-2\beta\gamma}\end{aligned} \tag{6.3.14}$$

其中角度 ϕ 由

$$\tan\phi=\frac{\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}}{\beta-\gamma}$$

来计算.式(6.3.14)的两项都随时间而衰减.但是衰减的原因不同.第一项是由于振子本身是阻尼的，第二项是由于外界的驱动力是指数衰减的.

6.3.4 无阻尼的情况

此时如令阻尼趋于零，格林函数成为

$$G(t,t')=\frac{\sin[\omega_0(t-t')]}{\omega_0}\theta(t-t') \tag{6.3.15}$$

则振子的运动方程简化成

$$x(t)=\frac{F_0\sin(\omega_0 t-\phi)}{\omega_0\sqrt{\omega_0^2+\beta^2}}+\frac{F_0\mathrm{e}^{-\beta t}}{\omega_0^2+\beta^2}$$

足够长时间之后，后项趋于零.只剩下纯粹的简谐振动 $x(t)=\dfrac{F_0\sin(\omega_0 t-\phi)}{\omega_0\sqrt{\omega_0^2+\beta^2}}$.这是因为外力趋于零.不过，一段时间外力的作用产生两个效果.一个效果是使得简谐振动的振幅变化为 $\dfrac{F_0}{\omega_0\sqrt{\omega_0^2+\beta^2}}$，这是与外力的大小和外力衰减的快慢有关的.另一个是简谐振动的相位有 $\phi=\tan^{-1}(\omega_0/\beta)$ 的移动.

注意当$\gamma=0$时，由(6.3.5)，特征值$\omega_{1,2}=\pm\omega_0$是实数.而我们是从$\gamma>0$趋于零的，所以是在复ω平面的下半平面趋于实轴的.这样取极限的结果得到的是推迟格林函数.

6.3.5 边界条件对格林函数的影响

我们考虑无阻尼的情况.那么，只要在公式(6.3.3)-(6.3.9)中令$\gamma=0$即可.例如特征值$\omega_{1,2}=\pm\omega_0$.特征函数也由(6.3.6)式简化为

$$\psi_1(t)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0 t},\psi_2(t)=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_0 t} \tag{6.3.16}$$

也可以选择特征函数为

$$\psi_1(t)=\sin\omega_0 t,\psi_2(t)=\cos\omega_0 t \tag{6.3.17}$$

相应的朗斯基行列式

$$W(\psi_1,\psi_2)=\begin{vmatrix}\sin\omega_0 t & \cos\omega_0 t\\ \omega_0\cos\omega_0 t & -\omega_0\sin\omega_0 t\end{vmatrix}=-\omega_0 \tag{6.3.18}$$

并且

$$A_W(t')=A(t')W(\psi_1(t'),\psi_2(t'))=-\omega_0 \tag{6.3.19}$$

此时，由于特征函数不是阻尼的，没有随时间趋于无穷大而趋于零的行为，我们可以保留格林函数中$t>t'$和$t<t'$两部分.仍可采用(6.1.24b)的形式.

$$\begin{aligned}G(t,t')&=d_1(t')\psi_1(t)+d_2(t')\psi_2(t)-\frac{\psi_2(t')\psi_1(t)-\psi_1(t')\psi_2(t)}{A_W(t')}\theta(t-t')\\&=d_1(t')\sin\omega_0 t+d_2(t')\cos\omega_0 t+\frac{\sin[\omega_0(t-t')]}{\omega_0}\theta(t-t')\end{aligned} \tag{6.3.20}$$

其中，$d_1(t'),d_2(t')$由初始条件决定.

对于初始条件(6.3.8b)，得到$d_1(t')=d_2(t')=0$，格林函数就是(6.3.15)式.

若边界条件如下，

$$G(t_0,t')=G(0,t')=0,G(t_1,t')=G(1,t')=0 \tag{6.3.21}$$

这个边界条件也称为二端点边界条件.它表明，现在考虑的解的区域$0\le t,t'\le 1$.先看$t=0$的条件，但此时，只能取$t<t'$的部分，因此得

$$d_2(t')=0 \tag{6.3.22a}$$

再看$t=1$的条件，只能取$t>t'$的部分.

$$d_1(t')\sin\omega_0+\frac{\sin[\omega_0(1-t')]}{\omega_0}=0$$

解得

$$d_1(t')=\frac{\cot\omega_0\sin\omega_0 t'-\cos\omega_0 t'}{\omega_0} \tag{6.3.22b}$$

这样就求得满足边界条件(6.3.21)的格林函数.

$$G(t,t')=-\frac{\sin[\omega_0(1-t')]}{\omega_0\sin\omega_0}\sin\omega_0 t+\frac{\sin[\omega_0(t-t')]}{\omega_0}\theta(t-t') \tag{6.3.23}$$

可以看到，不同的边界条件导致不同的格林函数.

式(6.3.23)的特例：当$\omega_0\to 0$时，

$$G(t,t')=-(1-t')t+(t-t')\theta(t-t') \tag{6.3.24}$$

§6.4 二阶常微分方程的格林函数

本节我们考虑的是二阶微分方程的自伴斯图姆-刘维尔算符

$$L(x)=-A(x)\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}-B(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}+C(x)=\frac{1}{\rho(x)}[-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}p(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}+q(x)] \tag{6.4.1a}$$

且在$[a,b]$上，

$$p(x)>0,q(x)\geq 0,\rho(x)\geq 0 \tag{6.4.1b}$$

并只考虑二阶常微分方程的两端边值问题.即方程的求解区间$[a,b]$是有限的，且在两端点有确定的边界条件.

下面我们要频繁地提到齐次方程及其齐次边界条件，因此这儿先写下这一边值问题.

$$[\lambda-L(x)]\varphi(x)=0 \tag{6.4.2a}$$

$$B(\varphi)=0 \tag{6.4.2b}$$

边界条件是以下两式的简写形式，

$$B_1(y)=\alpha_{1,1}y(a)+\alpha_{1,2}y'(a)+\beta_{1,1}y(b)+\beta_{1,2}y'(b) \tag{6.4.3a}$$

$$B_2(y)=\alpha_{2,1}y(a)+\alpha_{2,2}y'(a)+\beta_{2,1}y(b)+\beta_{2,2}y'(b) \tag{6.4.3b}$$

见第三章(3.2.18)式和 3.8 节中的说明.注意，这是最一般的形式.只有其中的一些特殊形式，也就是系数组的一些特别的选择，才能够使得边界条件达到自伴.见第三章 3.7 节的定理 2，第 2 章习题 22 和第 3 章和习题 49.

这一边值问题可能是有解的，也可能是无解的.

以下我们按照非齐次方程边界条件的不同情况，结合方程(6.4.2)是否有解，来分别求解的一般表达式.在此之前，先一般地讨论格林函数的对称性.

6.4.1 格林函数的对称性

对于形式伴随的斯图姆-刘维尔算子，格林函数定义为满足如下方程的函数

$$(\lambda - L)G(x,x';\lambda) = \delta(x-x')/\rho(x) \tag{6.4.4}$$

在格林函数中将参数λ明确写出.注意λ一般是个复数.设

$$(\lambda - L)g(x,x_1;\lambda) = \delta(x-x_1)/\rho(x) \tag{6.4.5a}$$

$$(\lambda^* - L)g(x,x_2;\lambda^*) = \delta(x-x_2)/\rho(x) \tag{6.4.5b}$$

它们是满足同样的边界条件的.由伴随算子的定义，应有

$$\left(g(x,x_2;\lambda^*),(\lambda-L)g(x,x_1;\lambda)\right) = \left((\lambda^*-L)g(x,x_2;\lambda^*),g(x,x_1;\lambda)\right) \tag{6.4.6}$$

计算此式的两边，分别得到

$$\left(g(x,x_2;\lambda^*),(\lambda-L)g(x,x_1;\lambda)\right)$$
$$=\int_a^b \mathrm{d}x\rho(x)g^*(x,x_2;\lambda^*)(\lambda-L)g(x,x_1;\lambda) = g^*(x_1,x_2;\lambda^*)$$
$$\left((\lambda^*-L)g(x,x_2;\lambda^*),g(x,x_1;\lambda)\right)$$
$$=\int_a^b \mathrm{d}x\rho(x)[(\lambda^*-L)g(x,x_2;\lambda^*)]^* g(x,x_1;\lambda) = g(x_2,x_1;\lambda)$$

结论是，格林函数的对称性表现为如下的形式：

$$g^*(x_1,x_2;\lambda) = g(x_2,x_1;\lambda^*) \tag{6.4.7}$$

若用特征函数法求格林函数时，在参量λ非特征值时，格林函数的表达式为

$$G(x,x') = \sum_i \frac{\varphi_i^*(x')\varphi_i(x)}{\lambda - \lambda_i}$$

此式也表明了(6.4.7)的对称性.

6.4.2 二阶微分方程边值问题的解

1. 边值问题

考虑如下边值问题，

$$[\lambda - L(x)]\psi(x) = f(x) \tag{6.4.8a}$$

$$B(\psi) = \gamma \tag{6.4.8b}$$

当其中 $f(x)=0$，就是齐次方程的边值问题.而这样的边值问题，就是特征值问题，即满足这样的边值问题的参量只能是特征值，解函数是特征函数.

我们明确写出特征值问题如下.

$$[\lambda_m - L(x)]\varphi_m(x) = 0 \tag{6.4.9a}$$

$$B(\varphi_m) = \gamma \tag{6.4.9b}$$

其中λ_m是特征值，其对应的特征函数是$\varphi_m(x)$.

2. 参量λ非特征值

这时如下边值问题无解.

$$[\lambda - L(x)]\varphi(x) = 0, \lambda \neq \lambda_m \tag{6.4.15a}$$

$$B(\varphi) = \gamma \tag{6.4.15b}$$

为了求解(6.4.8)，我们先求解相应的格林函数满足的方程，

$$[\lambda - L(x)]G(x, x'; \lambda) = \delta(x - x') / \rho(x) \tag{6.4.16a}$$

$$B(G) = \sigma \tag{6.4.16b}$$

其中

$$\sigma = \gamma[\int_a^b \rho\ (x')\ \ f(x')\ \mathrm{d}x'\ ]^{-1} \tag{6.4.17}$$

条件是$\int_a^b \rho(x') f(x') \mathrm{d}x' \neq 0$.那么(6.4.8)的解为

$$\psi(x) = \int_a^b G(x, x'; \lambda)\rho(x') f(x') \mathrm{d}x' \tag{6.4.18}$$

代入边界条件

$$B(\psi) = \int_a^b B(G)\rho(x') f(x') \mathrm{d}x' = \int_a^b \sigma\rho(x') f(x') \mathrm{d}x'$$

$$= \sigma\int_a^b \rho(x') f(x') \mathrm{d}x' = \frac{\gamma}{\int_a^b \rho(x') f(x') \mathrm{d}x'} \int_a^b \rho(x') f(x') \mathrm{d}x' = \gamma$$

3. 参量λ为某一特征值

若参量λ为(6.4.9)的某一特征值，我们把(6.4.8)的解分成两部分，

$$\psi(x) = \varphi_m(x) + \xi(x) \tag{6.4.19}$$

其中$\varphi_m(x)$满足(6.4.9)，$\xi(x)$则满足如下边值问题.

$$[\lambda_m - L(x)]\xi(x) = f(x) \tag{6.4.20a}$$

$$B(\xi) = 0 \tag{6.4.20b}$$

为了求解(6.4.20)，我们先求解相应的格林函数满足的方程，

$$[\lambda_m - L(x)]G(x, x'; \lambda_m) = \delta(x - x') / \rho(x) \tag{6.4.21a}$$

$$B(G) = 0 \tag{6.4.21b}$$

这样，函数$\xi(x)$可如下计算

$$\xi(x)=\int_a^b G(x,x';\lambda_m)\rho(x')f(x')\mathrm{d}x' \tag{6.4.22}$$

最后得到(6.4.8)的解为

$$\psi(x)=\varphi_m(x)+\int_a^b G(x,x';\lambda_m)\rho(x')f(x')\mathrm{d}x' \tag{6.4.23}$$

其中第一项符合非齐次边界条件(6.4.9b)，第二项符合齐次边界条件(6.4.20b).

此时格林函数$G(x,x';\lambda_m)$怎么求？如果用特征函数法，须按以下的步骤进行.

与边值问题(6.4.21)对应的特征值问题是

$$[\kappa_n-L(x)]\chi_n(x)=0 \tag{6.4.24a}$$

$$B(\chi_n)=0 \tag{6.4.24b}$$

由特征函数法，格林函数的表达式是

$$G(x,x';\lambda_m)=\sum_n\frac{\chi_n^*(x')\chi_n(x)}{\lambda_m-\kappa_n} \tag{6.4.25}$$

此处应注意(6.4.21)的格林函数应该用(6.4.24)的特征函数来展开，因为它们具有相同的齐次边界条件.

若特征值问题(6.4.24)没有非零解，就只能用分段表示法求解格林函数。

当参量λ恰是一个本征值的时候要特别注意.若边界条件是齐次的，(6.4.25)式就不适用.这时必须引入和求解如下将要介绍的广义格林函数.若是自然边界条件下，即(6.4.9b)中的γ_1和γ_2至少有一个是有限的，而不是具体的数值，那么特征值问题(6.4.24)和(6.4.9)的求解很可能是一样的.这时(6.4.25)式也可能不适用.必须求广义格林函数.

6.4.3 广义格林函数

1. 半齐次边值问题

在边值问题(6.4.8)中，我们假定了γ_1,γ_2中至少有一个不为零，即边界条件是非齐次.若是齐次边界条件，重写边值问题如下.

$$[\lambda-L(x)]\psi(x)=f(x) \tag{6.4.26a}$$

$$B(\psi)=0 \tag{6.4.26b}$$

它也称为**半齐次边值问题**，因为方程是非齐次的而边界条件是齐次的.相应的齐次边值问题是如下的特征值问题.

$$[\lambda_m-L(x)]\varphi_m(x)=0 \tag{6.4.27a}$$

$$B(\varphi_m)=0 \tag{6.4.27b}$$

其中λ_m和$\varphi_m(x)$是特征值和对应的特征函数.

(1) 若(6.4.26)中的λ非(6.4.27)的特征值，求解过程就与(6.4.16)-(6.4.18)相同，只要令(6.4.16)和(6.4.17)中$\gamma_{1,2}=0$.解式就是(6.4.18).

(2) 若半齐次边值问题(6.4.26)中的参量λ恰是(6.4.27)的某个特征值，$\lambda=\lambda_m$.

$$[\lambda_m - L(x)]\psi(x) = f(x) \tag{6.4.28a}$$

$$B(\psi)=0 \tag{6.4.28b}$$

我们先来看(6.4.28)有解的条件.因为是自伴算子，有$(\lambda_m - L)^+ = (\lambda_m - L)$，所以

$$(\varphi_m,(\lambda_m - L)\psi)-((\lambda_m - L)^+\varphi_m,\psi)=(\varphi_m, f) \tag{6.4.29}$$

此式左边显然应该为零.我们得到

$$(\varphi_m, f)=\int_a^b \rho(x)\varphi_m^*(x) f(x)\mathrm{d}x = 0 \tag{6.4.30}$$

式(6.4.30)就是参数$\lambda=\lambda_m$是特征值时，非齐次方程(6.4.28)有解的条件.即非齐次项$f(x)$与属于λ_m的特征函数$\varphi_m(x)$正交.式(6.4.30)称为边值问题(6.4.28)的**相容性条件**. 这一有解的条件就是§3.8 中的择一定理，相容性条件就是(3.8.8)式.式(6.4.29,30)与(3.8.9)是相同的.在择一定理中，结果是函数 $f(x)$与齐次伴随边值问题的解正交.此处因为是自伴算子，直接用了齐次边值问题解.

若是非齐次的边界条件，则不需要此条件.

为了求出(6.4.28)的解，我们仿照前面的做法，先写出对应的格林函数所满足的方程应该是

$$[\lambda_m - L(x)]G(x,x') = \delta(x-x')/\rho(x) \tag{6.4.31a}$$

$$B(G)=0 \tag{6.4.31b}$$

我们希望由此求出格林函数之后，按照(6.4.23)式那样求得(6.4.28)的解.可是，满足(6.4.31)的格林函数实际上是不存在的.证明如下.

由于λ_m是(6.4.28)的特征值，我们用(6.4.31a)中的$G(x,x')$和$\delta(x-x')/\rho(x)$分别代替(6.4.28a)中的$\psi(x)$和$f(x)$，则(6.4.30)式要求

$$(\varphi_m,(\lambda_m - L)G)-((\lambda_m - L)^+\varphi_m,G)=(\varphi_m,\delta(x-x')/\rho(x))=0$$

$$\int_a^b \varphi_m(x)\delta(x-x')\mathrm{d}x = \varphi_m(x') = 0 \tag{6.4.32}$$

此式显然是矛盾的，因为特征函数$\varphi_m(x)$肯定是不恒为零的.

2. 广义格林函数的定义

上述矛盾出现的原因是什么呢？在得到(6.4.32)式时，我们用到了(6.4.27)和(6.4.31).前者是我们的前提条件.因此，问题出在后者.也就是说，在(6.4.27)式的情况下，相应的格林函数满足的方程不应该由(6.4.31)式来定义.或者说，由(6.4.31)定

义的格林函数不存在.应该定义格林函数满足另一个方程，才能得到(6.4.28)有非零解的表达式.

我们设此时的格林函数应满足以下方程.

$$[\lambda_m - L(x)]G(x,x') = \delta(x-x')/\rho(x) + c(x')\varphi_m(x), a \le x, x' \le b \tag{6.4.33a}$$

$$B(G) = 0 \tag{6.4.33b}$$

边界条件仍然是齐次的.我们来确定其中的系数$c(x')$.计算如下积分，

$$(\varphi_m, (\lambda_m - L)\, G) - (\,(\lambda_m - L)^\dagger\, \varphi_m, G) = (\,\varphi_m, \delta(x-x')\ /\rho + c(x')\,\varphi_m)$$

$$= (\varphi_m, \delta(x-x')\ /\rho) + c(x') = 0$$

其中设特征函数已经规一化.就得到

$$c(x') = -\int_a^b \varphi_m^*(x)\delta(x-x')\mathrm{d}x = -\varphi_m^*(x') \tag{6.4.34}$$

因此$G(x,x')$应满足的方程就是

$$[\lambda_m - L(x)]G(x,x') = \delta(x-x')/\rho(x) - \varphi_m^*(x')\varphi_m(x), a \le x, x' \le b \tag{6.4.35a}$$

$$B(G) = 0 \tag{6.4.35b}$$

我们称满足此方程的解为**广义格林函数**.

可以证明，广义格林函数同样具有对称性(6.4.7)式.

3. 解的表达式

现在来给出(6.4.28)的解的表达式.为此计算积分

$$I = (\psi, (\lambda_m - L)G) - ((\lambda_m - L)\psi, G) = 0$$

将左边逐项计算

$$I = (\psi, \delta(x-x')/\rho - \varphi_m^*(x')\varphi_m) - (f, G)$$
$$= \psi^*(x') - \varphi_m^*(x')(\psi, \varphi_m) - (f, G) = 0$$

其中，$(\psi, \varphi_m) = c$是个常数，$G(x,x')$是广义格林函数.

$$\psi^*(x') = c\varphi_m^*(x') + \int_a^b \rho(x)G(x,x')f^*(x)\mathrm{d}x$$

两边取复数，就得到解的表达式

$$\psi(x) = c\varphi_m(x) + \int_a^b \rho(x')G^*(x',x)f(x')\mathrm{d}x'$$

因广义格林函数具有(6.4.7)式那样的对称性，上式可写为

$$\psi(x) = c\varphi_m(x) + \int_a^b G(x,x')\rho(x')f(x')\mathrm{d}x' \tag{6.4.36a}$$

我们把算符$[\lambda_m - L(x)]$作用在两边，有

$$[\lambda_m - L(x)]\psi(x) = \int_a^b [\,\delta(x-x')\ /\rho(x) - \varphi_m^*(x')\ \varphi_m(x)]\,\rho(x')\ f(x')\,\mathrm{d}x'$$

$$= f(x) - \varphi_m(x)\int_a^b \rho(x')\,\varphi_m^*(x')\,f(x')\,\mathrm{d}x'$$

为了得到等式(6.4.28a)，上式右边第二项必须为零.因此

$$\int_a^b \rho(x')\,\varphi_m^*(x')\,f(x')\,\mathrm{d}x' = 0 \qquad (6.4.36b)$$

这是(6.4.28)有解的相容性条件.因此，(6.4.28)在 $f(x)$ 满足相容性条件(6.4.36b) 时有解式(6.4.36a) ，其中 $G(x,x')$ 是满足(6.4.35)的广义格林函数.

注意(6.4.36a)式与(6.4.23)式的区别.式(6.4.36)中的 $\varphi_m(x)$ 服从齐次边界条件，因此可以有一个任意常数 c；而式(6.4.23)中的 $\varphi_m(x)$ 服从非齐次边界条件，因此就不能有这样的任意常数.

4. 广义格林函数的求解

对于广义格林函数满足的方程(6.4.35)，可用特征函数法和分段表示法来求解.

1) 特征函数法

设特征值问题(6.4.27)的特征值 $\{\lambda_n\}$ 和相应的正交规一特征函数系 $\{\varphi_n(x)\}$ 已求出.将广义格林函数用此函数系展开，

$$G(x,x') = \sum_n c_n(x')\varphi_n(x) \qquad (6.4.37)$$

代入(6.4.35a)式，

$$\sum_{n(n\neq m)} c_n(x')(\lambda_m - \lambda_n)\varphi_n(x) = \delta(x-x')/\rho(x) - \varphi_m^*(x')\varphi_m(x)$$

此式两边乘 $\rho(x)\varphi_l^*(x)$ 并积分.

$$\int_a^b \rho(x)\varphi_l^*(x)\mathrm{d}x \sum_{n(n\neq m)} c_n(x')(\lambda_m - \lambda_n)\varphi_n(x)$$

$$= \int_a^b \varphi_l^*(x)\mathrm{d}x[\delta(x-x') - \rho(x)\varphi_m^*(x')\varphi_m(x)]$$

利用 $\{\varphi_n(x)\}$ 的正交归一性，

$$(\lambda_m - \lambda_n)c_n(x') = \varphi_n^*(x'), n\neq m$$

得到

$$c_n(x') = \frac{\varphi_n^*(x')}{\lambda_m - \lambda_n}, n\neq m \qquad (6.4.38)$$

代入(6.4.37)式：

$$G(x,x') = c_m(x')\varphi_m(x) + \sum_{n(n\neq m)} \frac{\varphi_n^*(x')\varphi_n(x)}{\lambda_m - \lambda_n}$$

其中 $c_m(x')$ 是任意的.这就是前面提到过的，广义格林函数中有一个待定的量.我们利用广义格林函数的对称性条件来确定这个量.对称性条件要求

$$c_m(x')\varphi_m(x)+\sum_{i=0,i\neq m}^{\infty}\frac{\varphi_i^*(x')\varphi_i(x)}{\lambda_m-\lambda_i}=c_m^*(x)\varphi_m^*(x')+\sum_{i=0,i\neq m}^{\infty}\frac{\varphi_i^*(x')\varphi_i(x)}{\lambda_m-\lambda_i}$$

得到

$$c_m(x')\varphi_m(x)=c_m^*(x)\varphi_m^*(x') \qquad (6.4.39)$$

两边乘以$\rho(x)\varphi_m^*(x)$然后对 x 在$[a,b]$区间上积分.

$$c_m(x')=\varphi_m^*(x')\int_a^b \mathrm{d}x\rho(x)\varphi_m^*(x)c_m^*(x)$$

右边的积分是一个数，记为 d.

$$c_m(x')=d\varphi_m^*(x')$$

显然，任意非零实数 d 都可以满足(6.4.39)式.通常选择$d=1$.

$$c_m(x')=\varphi_m^*(x')$$

就能满足这一对称性的要求.因此

$$G(x,x')=\varphi_m^*(x')\varphi_m(x)+\sum_{i=0,i\neq m}^{\infty}\frac{\varphi_i^*(x')\varphi_i(x)}{\lambda_m-\lambda_i} \qquad (6.4.40)$$

这就是所要求的广义格林函数的解.此式也表明,广义格林函数具有(6.4.7)式那样的对称性.只是现在的参数λ_m是特征值，所以是实数.对称性简化为

$$G(x,x';\lambda_m)=G^*(x',x;\lambda_m) \qquad (6.4.41)$$

式(6.4.41)与 6.2 节普通格林函数的特征函数法的表达式相比,差别在于把属于特征值λ_m的那一项分离出来，以避免出现无穷大.

2) 分段表示法

在$x>x'$和$x<x'$的两侧的区域，求解方程

$$[\lambda_m-L(x)]\zeta(x,x')=-\varphi_m(x')\varphi_m(x) \qquad (6.4.42)$$

这个方程本身在

$$[\lambda_m-L(x)]\zeta(x,x')=0 \qquad (6.4.43)$$

时应该有线性无关的两个特解,记为$\zeta_1(x)$和$\zeta_2(x)$.另外方程(6.4.42)还有一个特解,记为$\zeta_0(x,x')$.那么在$x>x'$和$x<x'$的两侧区域的格林函数都应该写成齐次方程的两个特解的线性叠加再加上非齐次方程的这个特解.

$$G(x,x')=\begin{cases}a_1(x')\zeta_1(x)+a_2(x')\zeta_2(x)+\zeta_0(x,x'),\ x>x'\\ b_1(x')\zeta_1(x)+b_2(x')\zeta_2(x)+\zeta_0(x,x'),\ x<x'\end{cases} \qquad (6.4.44)$$

此式与(6.1.18)式的差别就是多了一个特解.特解在两个区域是一样的.

要求格林函数在 $x=x'$处是连续的,

$$[a_1(x')-b_1(x')]\zeta_1(x')+[a_2(x')-b_2(x')]\zeta_2(x')=0 \qquad (6.4.45)$$

把方程(6.4. 35)两边对 x 从 $x=x'-0^+$ 到 $x=x'+0^+$ 积分.由于积分区域是无穷小，凡是连续函数的积分都为零.得到

$$p_2(x')[(a_1(x')-b_1(x'))\zeta_1'(x)+(a_2(x')-b_2(x'))\zeta_2'(x)]=1 \tag{6.4.46}$$

式(6.4.45,46)与(6.1.19,20)完全相同.此两式联立，即可求得

$$a_1(x')-b_1(x')=-\frac{\zeta_2(x')}{p_2(x')W(x')},a_2(x')-b_2(x')=\frac{\zeta_1(x')}{p_2(x')W(x')} \tag{6.4.47}$$

其中

$$W(x')=\zeta_1(x')\zeta_2'(x)-\zeta_2(x')\zeta_1'(x) \tag{6.4.48}$$

是 $\zeta_1(x)$ 和 $\zeta_2(x)$ 的朗斯基行列式.再加上两个边界条件(6.4.35b),就可定出所有的系数.以下的讨论与第一节中(6.1.19)-(6.1.25)的讨论是完全一样的.唯一的差别就是现在的广义格林函数的表达式多一个特解项.

广义格林函数是为了求解特定情况下的非齐次方程的解而引入的，没有格林函数那么强的物理意义.

还有一点要注意，分段表示法与特征函数法是等价的.在特征函数法中，我们已经看到，必须用到格林函数的对称性条件(6.4.7)式，才能把最后一个待定的量确定下来.因此，在分段表示法中，也一定会用到(6.4.7)式，才能把最后一个系数确定下来.

以上我们在求普通的格林函数和广义格林函数时，都用到特征函数法和分段表示法. 若求解区域存在特征函数系，这两种方法是完全等价的，则应该可以一般地证明这两种方法的等价性.未见到这个证明.在不少情况下，确实可以看到，分段表示法的结果用特征函数系展开后，就是采用特征函数法得到的结果.

6.4.4 求解二阶微分方程边值问题的实例

例 1 求解以下边值问题.

$$-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\psi(x)=f(x),0<x<1 \tag{6.4.49a}$$

$$\frac{\mathrm{d}\psi(x)}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=0}=\frac{\mathrm{d}\psi(x)}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=1}=0 \tag{6.4.49b}$$

解答 算符中的权函数 $\rho(x)=1$，$q(x)=1$.参量 $\lambda=0$.这是齐次边界条件的情况.相应的齐次边值问题

$$(\lambda_m+\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2})\varphi_m(x)=0,0<x<1 \tag{6. 4.50a}$$

$$\frac{\mathrm{d}\varphi_m(x)}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=0}=\frac{\mathrm{d}\varphi_m(x)}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=1}=0 \tag{6. 4.50b}$$

是有零特征值解的.对应于 $\lambda_0=0$ 的两个线性无关的特征函数是 1 和 x.

$$\varphi_0(x)=a+bx$$

代入边界条件(6. 4.50b)，得到解是一个任意常数 c.而归一化的解是

$$\varphi_0(x)=1 \tag{6. 4.51}$$

当 $\lambda_m\neq 0$，两个特解为 $\cos\sqrt{\lambda_m}x$ 和 $\sin\sqrt{\lambda_m}x$.满足边界条件的特征值和特征函数系是

$$\varphi_0(x)=1,\varphi_n(x)=\sqrt{2}\cos n\pi x;\quad \lambda_n=n^2\pi^2,n=0,1,2,3,\cdots \tag{6. 4.52}$$

现在(6.4.49a)中的参量 $\lambda=0$ 恰是一特征值.相容性条件(6.4.30)式要求，边值问题(6.4.49)有解的条件是

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=0$$

因 $\lambda=0=\lambda_0$ 是特征值，且边界条件是齐次的，需要求解广义格林函数.相应的广义格林函数满足的方程是

$$-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}G(x,x')=\delta(x-x')-1,0<x<1 \tag{6. 4.53a}$$

$$\frac{\mathrm{d}G(x,x')}{\mathrm{d}x}\bigg|_{x=0}=\frac{\mathrm{d}G(x,x')}{\mathrm{d}x}\bigg|_{x=1}=0 \tag{6.4.53b}$$

(i) 用特征函数法求解

套用(6.4.40)式，立即写出广义格林函数为，

$$G(x,x')=1+\frac{2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cos n\pi x'\cos n\pi x \tag{6.4.54}$$

(ii) 用分段表示法

当 $x\neq x'$ 时，方程(6.4.53a)有一个特解

$$\zeta_0(x,x')=\frac{x^2}{2} \tag{6.4.55}$$

相应的齐次方程

$$-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\zeta(x)=0 \tag{6.4.56}$$

的两个线性无关解是

$$\zeta_1(x)=1,\zeta_2(x)=x \tag{6.4.57}$$

因此广义格林函数是

$$G(x,x')=[c_1(x')+c_2(x')x+\frac{x^2}{2}]\theta(x-x')+[d_1(x')+d_2(x')x+\frac{x^2}{2}]\theta(x'-x) \tag{6.4.58}$$

$$0<x,x'<1$$

用(6.1.19)和(6.1.20)两式的条件,

$$c_1(x')-d_1(x')+[c_2(x')-d_2(x')]x'=0 \tag{6.4.59a}$$

$$-c_2(x')+d_2(x')=1 \tag{6.4.59b}$$

用边界条件(6.4.53b)式得到

$$\frac{\mathrm{d}G(x,x')}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=0}=d_2(x')=0 \tag{6.4.59c}$$

$$\frac{\mathrm{d}G(x,x')}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=1}=c_2(x')+1=0 \tag{6.4.59d}$$

从(6.4.59b-d)四式中解出 $c_1(x')=d_1(x')+x'$ 后，格林函数是

$$G(x,x')=[c_1(x')-x+\frac{x^2}{2}]\theta(x-x')+[c_1(x')-x'+\frac{x^2}{2}]\theta(x'-x) \tag{6.4.60a}$$

现在还有一个未知量 $c_1(x')$ 待定.正像前面在介绍分段表示法求解广义格林函数时指出的，我们不得不借助于对称性(6.4.7)来定这最后一个系数.把(6.4.60a)中的 x 和 x' 交换，得

$$G(x',x)=[c_1(x)-x'+\frac{x'^2}{2}]\theta(x'-x)+[c_1(x)-x+\frac{x'^2}{2}]\theta(x-x') \tag{6.4.60b}$$

令 $G(x',x)=G(x,x')$，得到

$$c_1(x')+\frac{x^2}{2}=c_1(x)+\frac{x'^2}{2}$$

只要设

$$c_1(x)=\frac{x^2}{2}$$

即可.解出的广义格林函数为

$$G(x,x')=(-x+\frac{x^2+x'^2}{2})\theta(x-x')+(-x'+\frac{x^2+x'^2}{2})\theta(x'-x) \tag{6.4.61}$$

方程(6.4.49)的解为

$$\psi(x)=c+\int_0^1 G(x,x')f(x')\mathrm{d}x',\quad 0<x<1 \tag{6.4.62}$$

其中 c 是任意常数.

例 2 求解以下边值问题.

$$[-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x})+\frac{n^2}{x}]\psi(x)=f(x),0<x<1 \tag{6.4.63a}$$

$$\psi(x=0)<\infty,\psi(x=1)=0 \tag{6.4.63b}$$

其中 n 是整数.

解答 算符的权函数 $\rho(x)=1$，$p(x)=x,q(x)=n^2/x$.参量 $\lambda=0$.相应的特征值问题是

$$[-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x})+\frac{n^2}{x}]\varphi_m(x)=\lambda_m\varphi_m(x),-1<x<1 \tag{6.4.64a}$$

$$\varphi(x=0)<\infty,\varphi(x=1)=0 \tag{6.4.64b}$$

相应的齐次方程是

$$[-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x})+\frac{n^2}{x}]\varphi(x)=0,-1<x<1 \tag{6.4.65a}$$

$$\varphi_m(x=0)<\infty,\varphi_m(x=1)=0 \tag{6.4.65b}$$

相应的格林函数满足的方程是

$$[-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x})+\frac{n^2}{x}]G(x,x')=\delta(x-x'),0<x,x'<1 \tag{6.4.66a}$$

$$G(x=0)<\infty,G(x=1)=0 \tag{6.4.66b}$$

现在的边界条件是非齐次的，因此不用涉及广义格林函数.

方程(6.4.65)的特征值和特征函数系未知.因此我们只能用分段表示法来求解格林函数.

我们先来求方程(6.4.63a)式右边为零时，也就是方程

$$(-x^2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}-x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}+n^2)\varphi(x)=0 \tag{6.4.67}$$

在各整数 n 时的两个线性无关的特解.这一方程在 x=0 点处是第一类奇点. $a_0=1,b_0=-n^2$ 指标方程为

$$\lambda(\lambda-1)+\lambda-n^2=\lambda^2-n^2=0$$

解出

$$\lambda=\pm n$$

它们对应的特征向量，

$$A_0=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -b_0 & 1-a_0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ n^2 & 0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0 & 1\\ n^2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1\\ a_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_2\\ -n^2a_1\end{pmatrix}=\pm n\begin{pmatrix}a_1\\ a_2\end{pmatrix},\frac{a_2}{a_1}=\pm n$$

这两个特征值对应的特征向量是线性无关的.将(6.4.67)式写成(3.6.53)的形式可知，此时的系数只有 A_0 矩阵项.因此，不必用级数法求解.当 $n\neq 0$ 时两个线性无关的解就是

$$\varphi_1(x)=x^n,\varphi_2(x)=x^{-n}$$

当 $n=0$ 时，两个根相重，其中一个特解有对数项.容易得到，此时两个线性无关的特解为

$$\varphi_1(x)=1,\varphi_2(x)=\ln x$$

当参量$n=0,1,2,\cdots$时，对应的齐次方程的通解分别是

$$\{a_0+b_0\ln x, a_1x+b_1x^{-1}, a_2x^2+b_2x^{-2},\cdots,a_nx^n+b_nx^{-n},\cdots\},$$

下面按$n=0$和$n\neq 0$两种情况求格林函数.

注意，由(6.4.66a)得$x=x'$处格林函数跃变的条件为

$$[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}G(x,x')]_{x=x'-0^+}-[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}G(x,x')]_{x=x'-0^+}=-1/x' \qquad \text{(A)}$$

(1) 当$n=0$，格林函数应当是

$$G(x,x')=[c_1(x')+c_2(x')\ln x]\theta(x-x')+[d_1(x')+d_2(x')\ln x]\theta(x'-x)$$

利用边界条件(6.4.66b)式，可知，只有取$c_1(x')=0, d_2(x')=0$才能满足边界条件.

$$G(x,x')=c_2(x')\ln x\theta(x-x')+d_1(x')\theta(x'-x)$$

利用$x=x'$时格林函数连续的条件得

$$c_2(x')\ln x'=d_1(x')$$

又由$x=x'$处格林函数跃变的条件得

$$\frac{c_2(x')}{x'}=-\frac{1}{x'}，\quad -c_2(x')=1$$

因此$n=0$的格林函数是

$$G(x,x')=-\ln x\theta(x-x')-\ln x'\theta(x'-x)$$

方程(6.4.63)的通解为

$$\psi(x)=a_1+a_2\ln x+\int_0^1 G(x,x')f(x')\mathrm{d}x'，\quad 0<x<1$$

其中a_1,a_2是任意常数.由边界条件(6.4.63b)得到，$a_1=a_2=0$.最后得

$$\psi(x)=\int_0^1 G(x,x')f(x')\mathrm{d}x'，\quad 0<x<1$$

(2) 当$n\neq 0$，格林函数是

$$G(x,x')=[c_1(x')x^n+c_2(x')x^{-n}]\theta(x-x')+[d_1(x')x^n+d_2(x')x^{-n}]\theta(x'-x)$$

利用边界条件(6.4.66b)式，可知，只有取$c_1(x')=-c_2(x'), d_2(x')=0$才能满足边界条件.

$$G(x,x')=c_1(x')(x^n-x^{-n})\theta(x-x')+d_1(x')x^n\theta(x'-x)$$

利用$x=x'$时格林函数连续的条件得

$$c_1(x')(x'^n-x'^{-n})=d_1(x')x'^n$$

又由$x=x'$处两侧格林函数导数的条件得

$$nc_1(x')(x'^{n-1}+x'^{-n-1})-nd_1(x')x'^{n-1}=-1/x'$$

由此两式解得

$$nc_1(x')x'^n + nc_1(x')x'^{-n} - nd_1(x')x'^n = -1$$
$$nc_1(x')x'^n - nc_1(x')x'^{-n} - nd_1(x')x'^n = 0$$
$$2nc_1(x')x'^{-n} = -1, c_1(x') = -\frac{x'^n}{2n}$$
$$d_1(x')x'^n = c_1(x')(x'^n - x'^{-n}), d_1(x') = -\frac{x'^n - x'^{-n}}{2n}$$

最后解出的格林函数为

$$G(x,x') = -\frac{x'^n}{2n}(x^n - x^{-n})\theta(x-x') - \frac{x'^n - x'^{-n}}{2n}x^n\theta(x'-x)$$

方程(6.4.63)的通解为

$$\psi(x) = b_1x^n + b_2x^{-n} + \int_0^1 G(x,x')f(x')\mathrm{d}x', \quad 0<x<1$$

其中b_1, b_2是任意常数.由边界条件(6.4.63b)得到，$b_1 = b_2 = 0$.最后得

$$\psi(x) = \int_0^1 G(x,x')f(x')\mathrm{d}x', \quad 0<x<1$$

此题不是求广义函数，因此不需要利用对称性$G(x,x') = G^*(x',x)$，就能求出所有待定参量.

若原方程按如下形式多一个常数：

$$\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) + (\lambda - \frac{n^2}{x^2})y = -\frac{1}{x}f(x)$$

那么，相应的齐次方程是

$$\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) + (\lambda - \frac{n^2}{x^2})y = 0$$

这是个n阶贝塞尔方程，特征值和特征函数系已知.$\lambda = 0$不是这一方程满足边界条件的特征值.

贝塞尔特征方程是

$$\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x\frac{\mathrm{d}\varphi_m}{\mathrm{d}x}\right) + (\lambda_m - \frac{n^2}{x^2})\varphi_m = 0$$

$$\varphi_m(x=0) < \infty, \varphi_m(x=1) = 0$$

规一化的解函数是$\varphi_m = N_m J_n(k_m x)$，其中$J_n$是$n$阶的贝塞尔函数，$N_m$是归一化系数，$k_m = \sqrt{\lambda_m}$.特征函数系是$\{N_m J_n(k_m x)\}$.那么格林函数写成特征函数系的展开，套用公式，

$$G(x,x') = -\sum_{i=1}^{\infty}\frac{N_i^2}{\lambda_i}J_n(k_i x')J_n(k_i x)$$

这就很方便地得到了格林函数.

以上例子可以看到，在已知特征函数集的情况下，用特征函数法给出格林函数要快捷得多.而特征函数系未知的情况下，只能用分段表示法来求解.

6.4.5 非自伴算子时解的表达式

以上的讨论中，都假定了算子 L 是自伴的.非自伴算子的情况如何？设边值问题(6.4.9)无非零解，与边值问题(6.4.8)对应的格林函数 $G(x,x';\lambda)$ 已经求出.由伴随算子的定义，我们有下式，

$$\left(G(\lambda^*),(\lambda-L)\psi\right)-\left((\lambda^*-L)G(\lambda^*),\psi\right)=[J(\psi,G)]_a^b \tag{6.4.10}$$

其中两个内积为

$$\begin{aligned}\left(G(\lambda^*),(\lambda-L)\psi\right)&=\int_V\rho(x)G^*(x,x';\lambda^*)[\lambda-L(x)]\psi(x)\mathrm{d}x\\&=\int_a^b\rho(x)G^*(x,x';\lambda^*)f(x)\mathrm{d}x\end{aligned} \tag{6.4.11}$$

$$\left((\lambda^*-L)G(\lambda^*),\psi\right)=\int_V\rho(x)\{[\lambda^*-L(x)]G(x,x';\lambda^*)\}^*\psi(x')]\mathrm{d}x=\psi(x') \tag{6.4.12}$$

结函数见(3.2.10)式.因此，就得到边值问题(6.4.8)的解的表达式，

$$\begin{aligned}\psi(x')&=\int_a^b\rho(x)G^*(x,x';\lambda^*)f(x)\mathrm{d}x\\&+[p(x)\{\psi(x)\frac{\partial}{\partial x}G^*(x,x';\lambda^*)-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\psi(x)G^*(x,x';\lambda^*)\}]_a^b\end{aligned} \tag{6.4.13}$$

把 x,x' 交换，利用格林函数的对称性(6.4.7)式，得到

$$\begin{aligned}\psi(x)&=\int_a^b\rho(x')G(x,x';\lambda)f(x')\mathrm{d}x\\&+[p(x')\{\psi(x')\frac{\partial}{\partial x'}G(x,x';\lambda)-G(x,x';\lambda)\psi'(x')\}]_a^b\end{aligned} \tag{6.4.14}$$

这儿要说明的是，其中第二项表示了端点处的贡献，它就是(6.4.10)式右边.若微分算子 L 是自伴的，则(6.4.10)式右边的值应该为零.若边界条件没有使得其值为零，算子就只是形式自伴的.本节以上只考虑自伴算子，所以解式中没有端点的贡献.

§6.5 高维空间的格林函数

6.5.1 二阶微分方程与格林函数

1. 二阶微分方程

本章的高维空间是指二维和三维空间.在求解数学物理的偏微分方程的时候，高维空间的问题总是用分离变量法化为一维问题来求解.

我们将微分方程求解的区域记为 V，它的表面记为 S.对于二维空间，V 实际上是平面上的一个区域，而 S 就代表了其边界闭合线.当我们说体积分 $\int_V\mathrm{d}V$ 和面积分

$\oint_S \mathrm{d}S$ 的时候，对于二维空间，就分别相应于对于二维区域的面积分和其边界的线积分.本节以下的理论对于二维和三维空间都适用.

二维和三维空间，我们也只考虑最高是二次微分的微分算子，并且写成斯图姆-刘维尔算子的形式.

$$L = \frac{1}{\rho(\boldsymbol{r})}\left(-\nabla\cdot[p(\boldsymbol{r})\nabla]+q(\boldsymbol{r})\right) \tag{6.5.1a}$$

要求，在求解区域 V 内， $p(\boldsymbol{r}),q(\boldsymbol{r}),\rho(\boldsymbol{r})$ 这三个函数都是连续的实函数，且满足以下条件.

$$p(\boldsymbol{r})\ge 0, q(\boldsymbol{r})\ge 0, \rho(\boldsymbol{r})>0 \tag{6.5.1b}$$

其中的 $\rho(\boldsymbol{r})$ 是权函数.以下的积分都是指带权 $\rho(\boldsymbol{r})$ 的积分，除非特别说明.因此内积是

$$(f, g)=\int_V \rho(\boldsymbol{r})\ f^*(\boldsymbol{r})\ g(\boldsymbol{r})\ \mathrm{d}V$$

只要 $\rho(\boldsymbol{r}), p(\boldsymbol{r}), q(\boldsymbol{r})$ 三个函数是实的，式(6.5.1)的算子 L 是形式自伴的.这可由下式看出来.

$$\begin{aligned}
(v,Lu) &= \int_V \rho v^* Lu\mathrm{d}V = \int_V v^*[-\nabla\cdot(p\nabla)+q]u\mathrm{d}V \\
&= \int_V u[-\nabla\cdot(p\nabla)+q]v^*\mathrm{d}V + \int_V \nabla\cdot(up\nabla v^* - v^* p\nabla u)\mathrm{d}V \\
&= \int_V \rho(Lv)^* u\mathrm{d}V + \oint_S [p(u\nabla v^* - v^*\nabla u)]\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} \\
&= (Lv,u) + \oint_S [p(u\nabla v^* - v^*\nabla u)]\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}
\end{aligned} \tag{6.5.2}$$

现在高维时的结就是

$$J = \oint_S (up\nabla v - vp\nabla u)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

一维情况时的对应就是(2.2.11)式.如果对边界积分的这一项为零，那么算符 $L(\boldsymbol{r})$ 就是自伴的了.

如此明确了算子 $L(\boldsymbol{r})$ 的形式之后，我们就可以叙述二阶微分方程的边值问题和如何求解边值问题的格林函数了.

边值问题是

$$[\lambda - L(\boldsymbol{r})]\psi(\boldsymbol{r}) = f(\boldsymbol{r}),(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'\in V) \tag{6.5.3a}$$

$$[\alpha\psi(\boldsymbol{r})+\beta\frac{\partial\psi(\boldsymbol{r})}{\partial n}]_S = u(\boldsymbol{r}) \tag{6.5.3b}$$

当其中 $f(x)=0$ ，就是齐次方程的边值问题.而这样的边值问题，就是特征值问题，即满足这样的边值问题的参量只能是特征值，解函数是特征函数.

我们明确写出特征值问题如下.

$$[\lambda_m - L(\boldsymbol{r})]\varphi_m(\boldsymbol{r}) = 0,(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'\in V) \tag{6.5.4a}$$

$$[\alpha\varphi_m(\boldsymbol{r})+\beta\frac{\partial\varphi_m(\boldsymbol{r})}{\partial n}]_S=v(\boldsymbol{r}) \tag{6.5.4b}$$

其中λ_m是特征值，其对应的特征函数是$\varphi_m(x)$.

2. 格林函数

与边值问题(6.5.3)相应的格林函数满足的方程如下.

$$[\lambda-L(\boldsymbol{r})]G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')/\rho(\boldsymbol{r}),(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'\in V) \tag{6.5.5a}$$

$$[\alpha G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')+\beta\frac{\partial G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')}{\partial n}]_S=w(\boldsymbol{r}) \tag{6.5.5b}$$

若$w(\boldsymbol{r})=0$，称为齐次边界条件，否则称为非齐次边界条件.最常见的情况是齐次边界条件.

格林函数具有如下对称性

$$G^*(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2;\lambda)=G(\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{r}_1;\lambda^*) \tag{6.5.6}$$

证明的步骤与 6.4.1 小节中完全相同.

高维空间求解格林函数主要是特征函数法和分段表示法两种方法.特征函数法已如前叙述.对于分段表示法，在一维情况中已经给出标准步骤.在高维空间中，有两个或者三个变量.此时可以在空间的一个方向上，也是对于一个坐标采取分段表示法.其它方向上只要求解特征函数系即可.这一方法仍然称为分段表示法.

二维和三维空间分别有两个和三个坐标，应该选择其中哪一个坐标来分段计算呢？此处给出一些粗略的原则.

对于三维空间有球对称的系统，应采用球坐标，这时应在径向上采用分段计算.因为球对称时角向的特征函数系和容易就求出来了.同理，二维空间中圆对称性的系统，采用柱坐标，也应在径向上采用分段计算.

采用分离变量法之后，二维空间的特征函数实际上是两个方向上的特征函数的乘积.如果系统在其中一个空间方向上没有非零的特征函数，那么就肯定是在这个方向上采用分段表示法.同理，三维空间中，也是在没有特征函数的方向上采用分段表示法.

如果采用直角坐标系，其中一个方向的范围是无限长而其它方向是有限范围，就选择无限长的方向作为分段计算的方向.

这些选取的原则都反映在以下的实例中.

3. 二阶微分方程解的一般表达式

求解边值问题(6.5.3)的步骤与一维情况类似.此处不再重复.我们在这里只给出一个求解非齐次微分方程(6.5.3a)的一般表达式.

(1) 算子L是自伴的

设特征值问题(6.5.4)有非零解.则(6.5.3)的解的表达式为

$$\psi(\boldsymbol{r})=\varphi_m(\boldsymbol{r})+\int_a^b G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}';\lambda_m)\rho(\boldsymbol{r}')f(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\boldsymbol{r}', \tag{6.5.7}$$

这个解对应于一维的式(6.1.4)或(6.4.23).

(2) 算子L是非自伴的

一般情况下，特征值问题(6.5.4)无非零解.此时，在(6.5.2)式的左边，将 v, L, u 分别换成 $G(\lambda^*), \lambda - L, \psi$ ，那么

$$\left(G(\lambda^*), (\lambda - L)\psi\right) - \left((\lambda^* - L)G(\lambda^*), \psi\right)$$
$$= \oint_S [p(\boldsymbol{r})(\psi(\boldsymbol{r})\nabla G^*(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}'; \lambda^*) - G^*(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}'; \lambda^*)\nabla\psi(\boldsymbol{r}))] \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

利用(6.5.3a)和(6.5.5a)，两个内积分别为

$$\left(G(\lambda^*), (\lambda - L)\psi\right) = \int_V \rho(\boldsymbol{r})G^*(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}'; \lambda^*)[\lambda - L(\boldsymbol{r})]\psi(\boldsymbol{r})\mathrm{d}\boldsymbol{r}$$
$$= \int_V \rho(\boldsymbol{r})G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}'; \lambda^*) f(\boldsymbol{r})\mathrm{d}\boldsymbol{r}$$
$$\left((\lambda^* - L)G(\lambda^*), \psi\right) = \int_V \rho(\boldsymbol{r})\{[\lambda^* - L(\boldsymbol{r})]G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}'; \lambda^*)\}^*\psi(\boldsymbol{r}')]\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \psi(\boldsymbol{r}')$$

$$\psi(\boldsymbol{r}') = \int_V \rho(\boldsymbol{r})G^*(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}'; \lambda^*) f(\boldsymbol{r})\mathrm{d}\boldsymbol{r}$$
$$- \oint_S [p(\boldsymbol{r})(\psi(\boldsymbol{r})\nabla_{\boldsymbol{r}} G^*(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}'; \lambda^*) - G^*(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}'; \lambda^*)\nabla\psi(\boldsymbol{r}))] \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

交换 $\boldsymbol{r}$ 和 $\boldsymbol{r}'$，再利用格林函数的对称性，得到解的一般表达式：

$$\psi(\boldsymbol{r}) = \int_{V'} \rho(\boldsymbol{r}')G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}'; \lambda) f(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\boldsymbol{r}'$$
$$- \oint_{S'} [p(\boldsymbol{r}')(\psi(\boldsymbol{r}')\nabla_{\boldsymbol{r}'} G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}'; \lambda) - G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}'; \lambda)\nabla\psi(\boldsymbol{r}'))] \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}' \qquad (6.5.8a)$$

一个函数的梯度与表面法向的点乘，可以直接写成函数对于表面法向的导数，所以上式也可改写成

$$\psi(\boldsymbol{r}) = \int_{V'} \rho(\boldsymbol{r}')G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}'; \lambda) f(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\boldsymbol{r}'$$
$$- \oint_{S'} [p(\boldsymbol{r}')(\psi(\boldsymbol{r}')\frac{\partial}{\partial n'} G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}'; \lambda) - G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}'; \lambda)\frac{\partial}{\partial n'}\psi(\boldsymbol{r}'))] \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}' \qquad (6.5.8b)$$

以上的推导实际上与得到(6.4.14)的过程是一样的.

对于解的表达式(6.5.8a)，我们要说明以下三点.

(1) 注意，格林函数中含有参量λ.一般不明确写出来.

(2) 若参量λ恰是某一特征值 λ_m ，就应该在(6.5.8a)式中加上 λ_m 的特征函数 $\varphi_m(\boldsymbol{r})$ 这一项.一般说来，(6.5.8a)这一形式总是用于系统不存在非零特征函数的情况.即参量λ不会是特征值.此时不用考虑广义格林函数的问题.

(3) 式(6.5.8a)中的第一项是非齐次的贡献，第二项则是边界的贡献，现在边界条件还未具体写出.因此我们称之为解的一般表达式. 边界上的贡献见(6.4.14)下的说明.

6.5.2 二维格林函数求解实例

1. 长方形内亥姆霍兹方程的格林函数

求如下问题的格林函数

$$(\nabla^2 + k^2)G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') = \delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'), (0 \le x, x' \le a; 0 \le y, y' \le b) \qquad (6.5.9a)$$

$$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')|_{x=0}=G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')|_{x=a}=0,G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')|_{y=0}=G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')|_{y=b}=0 \tag{6.5.9b}$$

这时的参量$\lambda=k^2$，算符$L=-\nabla^2$.相应的边值问题

$$(\nabla^2+k^2)\psi(\boldsymbol{r})=f(\boldsymbol{r}),(0\le x\le a;0\le y\le b)$$

$$\psi(\boldsymbol{r})|_{x=0}=\psi(\boldsymbol{r})|_{x=a}=0,\psi(\boldsymbol{r})|_{y=0}=\psi(\boldsymbol{r})|_{y=b}=0$$

1) 特征函数法

求解相应的特征值问题

$$(\nabla^2+k_i^2)\varphi_i(\boldsymbol{r})=0,(0\le x\le a;0\le y\le b)$$

$$\varphi_i(\boldsymbol{r})|_{x=0}=\varphi_i(\boldsymbol{r})|_{x=a}=0,\varphi_i(\boldsymbol{r})|_{y=0}=\varphi_i(\boldsymbol{r})|_{y=b}=0$$

用分离变量法，令

$$\varphi_i(\boldsymbol{r})=X(x)Y(y) \tag{6.5.10}$$

$$\frac{X''(x)}{X(x)}+\frac{Y''(y)}{Y(y)}+k^2=0$$

可得到两个方向上的特征方程和边界条件如下.

$$X''(x)+X(x)k_x^2=0 \tag{6.5.11a}$$

$$X(0)=X(a)=0 \tag{6.5.11b}$$

$$Y''(y)+k_y^2Y(y)=0 \tag{6.5.11c}$$

$$Y(0)=Y(b)=0 \tag{6.5.11d}$$

边界条件(6.5.11b)和(6.5.11d)由(6.5.9b)得到.求得两个方向上的归一化的特征函数和特征值各自为

$$X(x)=\sqrt{\frac{2}{a}}\sin k_x x,Y(y)=\sqrt{\frac{2}{b}}\sin k_y y,k_x=\frac{n\pi}{a},k_y=\frac{m\pi}{b} \tag{6.5.12}$$

其中 m 和 n 都是正整数.总的特征函数和特征值是

$$\varphi_i(\boldsymbol{r})=\varphi_{n,m}(\boldsymbol{r})=\sqrt{\frac{4}{ab}}\sin\frac{n\pi}{a}x\sin\frac{m\pi}{b}y,k_i^2=k_x{}^2+k_y{}^2 \tag{6.5.13}$$

因为是二维系统，所以特征值和特征函数有两重指标.

(1) 参量k^2不等于特征值

则格林函数为

$$\begin{aligned}G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')&=\sum_i\frac{\varphi_i(\boldsymbol{r}')\varphi_i(\boldsymbol{r})}{k^2-k_i^2}=\sum_{n,m=1}^{\infty}\frac{\varphi_{n,m}(\boldsymbol{r}')\varphi_{n,m}(\boldsymbol{r})}{k^2-k_{n,m}^2}\\&=\frac{4}{ab}\sum_{n,m=1}^{\infty}\frac{1}{k^2-[(n\pi/a)^2+(m\pi/b)^2]}\sin\frac{n\pi}{a}x'\sin\frac{m\pi}{b}y'\sin\frac{n\pi}{a}x\sin\frac{m\pi}{b}y\end{aligned} \tag{6.5.14}$$

(2) 参量k^2等于某一特征值

设

$$k^2=(\frac{n_1\pi}{a})^2+(\frac{m_1\pi}{b})^2 \tag{6.5.15}$$

则必须求广义格林函数，满足的方程为

$$\begin{aligned}&(\nabla^2+(\frac{n_1\pi}{a})^2+(\frac{m_1\pi}{b})^2)G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=\delta(x-x')\delta(y-y')\\&-\frac{4}{ab}\sin\frac{n_1\pi}{a}x'\sin\frac{m_1\pi}{b}y'\sin\frac{n_1\pi}{a}x\sin\frac{m_1\pi}{b}y\end{aligned} \tag{6.5.16}$$

方程右边减去的这一项正是相应于特征值(6.5.15)的特征函数.套用广义而格林函数的公式，得到

$$\begin{aligned}G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')&=\frac{4}{ab}\sin\frac{n_1\pi}{a}x'\sin\frac{m_1\pi}{b}y'\sin\frac{n_1\pi}{a}x\sin\frac{m_1\pi}{b}y\\&+\frac{4ab}{\pi^2}\sum_{n=1,n\neq n_1}^{\infty}\sum_{m=1,m\neq m_1}^{\infty}\frac{\sin\frac{n\pi}{a}x'\sin\frac{m\pi}{b}y'\sin\frac{n\pi}{a}x\sin\frac{m\pi}{b}y}{b^2(n_1^2-n^2)+a^2(m_1^2-m^2)}\end{aligned} \tag{6.5.17}$$

2) 分段表示法

本题是直角坐标系，两个方向都是有限范围，并且两个方向都存在特征函数系，如(6.5.11)式所示.因此，可以任意选取一个方向作为分段计算.我们选取x坐标作为分段计算的方向.

$$(\nabla^2+k^2)G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=0,(0\le x\neq x'\le a;0\le y,y'\le b) \tag{6.5.18}$$

略去变量$\boldsymbol{r}'$后，相应的函数方程是

$$(\nabla^2+k^2)\psi(\boldsymbol{r})=0$$

用分离变量法，$\psi(\boldsymbol{r})=X(x)Y(y)$，其中求解关于变量$y$的方程，就是(6.5.11)式.归一化的特征函数和特征值见(6.5.13)式.

函数$\delta(y-y')$用此特征系展开.

$$\delta(y-y')=\frac{2}{b}\sum_m\sin\frac{m\pi}{b}y'\sin\frac{m\pi}{b}y \tag{6.5.19}$$

因为$\sin\frac{m\pi}{b}y$是一个完备系，将格林函数用此完备系展开.

$$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=\frac{2}{b}\sum_m g_m(x,x')\sin\frac{m\pi}{b}y'\sin\frac{m\pi}{b}y \tag{6.5.20}$$

(1) 参量k^2不等于特征值

将(6.5.19)和(6.5.20)代入原方程(6.5.9a)，经过求导之后，得到

$$\frac{2}{b}\sum_m\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}g_m(x,x')+k_{xm}^2 g_m(x,x')\right]\sin\frac{m\pi}{b}y'\sin\frac{m\pi}{b}y$$

$$=\delta(x-x')\frac{2}{b}\sum_m\sin\frac{m\pi}{b}y'\sin\frac{m\pi}{b}y$$

此式两边始终相等的条件是下式成立.

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}g_m(x,x')+k_{xm}^2 g_m(x,x')=\delta(x-x') \tag{6.5.21a}$$

这是 x 方向的格林函数应满足的方程，其边界条件可由(6.5.9b)得到，

$$g_m(0,x')=g_m(a,x')=0 \tag{6.5.21b}$$

现在就可以用分段表示法来求此方程了.结果为，

$$\begin{aligned}g_m(x,x')=&\frac{1}{k_{xm}\sin k_{xm}a}[\sin k_{xm}(x'-a)\sin k_{xm}x\theta(x'-x)\\&+\sin k_{xm}x'\sin k_{xm}(x-a)\theta(x-x')]\end{aligned} \tag{6.5.22}$$

将此式代入(6.5.20)式，最后得格林函数为

$$\begin{aligned}G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=&\frac{2}{b}\sum_m\sin\frac{m\pi}{b}y'\sin\frac{m\pi}{b}y\frac{1}{k_{xm}\sin k_{xm}a}\\&\times[\sin k_{xm}(x'-a)\sin k_{xm}x\theta(x'-x)+\sin k_{xm}x'\sin k_{xm}(x-a)\theta(x-x')]\end{aligned} \tag{6.5.23}$$

其中

$$k_{xm}^2=k^2-\left(\frac{m\pi}{b}\right)^2 \tag{6.5.24}$$

以上的解只有在 $k^2\neq\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{m\pi}{b}\right)^2$ 时成立.

(2) 参量 k^2 等于某一特征值

当参量为某一特征值 $k^2=\left(\frac{n_1\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{m_1\pi}{b}\right)^2$ 时，需要求广义格林函数.广义格林函数满足的方程就是(6.5.16)式.边界条件就是(6.5.8b).格林函数和δ函数仍然用(6.5.20)和(6.5.19)的展开式，代入(6.5.16)式.

$$\begin{aligned}&\left(\nabla^2+\left(\frac{n_1\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{m_1\pi}{b}\right)^2\right)\frac{2}{b}\sum_m g_m(x,x')\sin\frac{m\pi}{b}y'\sin\frac{m\pi}{b}y\\&=\frac{2}{b}\sum_m\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+k_{1m}^2\right)g_m(x,x')\sin\frac{m\pi}{b}y'\sin\frac{m\pi}{b}y\\&=\delta(x-x')\frac{2}{b}\sum_m\sin\frac{m\pi}{b}y'\sin\frac{m\pi}{b}y\\&-\frac{4}{ab}\sin\frac{n_1\pi}{a}x'\sin\frac{m_1\pi}{b}y'\sin\frac{n_1\pi}{a}x\sin\frac{m_1\pi}{b}y\end{aligned} \tag{6.5.25}$$

其中

$$k_{1m}^2=\left(\frac{n_1\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{m_1\pi}{b}\right)^2-\left(\frac{m\pi}{b}\right)^2 \tag{6.5.26}$$

将(6.5.25)两边用 y 方向的第 n 模式的本征函数做内积，得到

$$(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+k_{1n}^2)g_n(x,x')=\delta(x-x')-\frac{2}{a}\sin\frac{n_1\pi}{a}x'\sin\frac{n_1\pi}{a}x\delta_{nm_1} \tag{6.5.27}$$

当 $n\neq m_1$ 时，

$$(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+k_{1n}^2)g_n(x,x')=\delta(x-x'),n\neq m_1$$

与(6.5.21a)式同，解式就是(6.5.22).

$$g_m(x,x')=-\frac{1}{k_{1m}\sin k_{1m}a}[\sin k_{1m}(x'-a)\sin k_{1m}x\theta(x-x') \tag{6.5.28a}$$
$$+\sin k_{1m}x'\sin k_{1m}(x-a)\theta(x'-x)]$$

当 $n=m_1$ 时，由(6.5.27)式得到

$$(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+k_{1m_1}^2)g_{m_1}(x,x')=\delta(x-x')-\frac{2}{a}\sin\frac{n_1\pi}{a}x'\sin\frac{n_1\pi}{a}x$$

其中刚好有 $k_{1m_1}^2=(\frac{n_1\pi}{a})^2=k_{n_1}^2$，见(6.5.26)式.当 $x\neq x'$ 时，

$$(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+k_{n_1}^2)g_{m_1}(x,x')=-\frac{2}{a}\sin k_{n_1}x'\sin k_{n_1}x$$

齐次方程的两个特解为

$$\zeta_1(x)=\sin k_{n_1}x,\zeta_2(x)=\cos k_{n_1}x$$

朗斯基行列式为

$$W=k_{n_1}\begin{vmatrix}\sin k_{n_1}x & \cos k_{n_1}x\\ \cos k_{n_1}x & -\sin k_{n_1}x\end{vmatrix}=-k_{n_1}$$

用公式(3.1.24)来求非齐次方程的特解.设

$$\zeta_0(x,x')=u(x)\sin k_{n_1}x'.$$

函数 $u(x)$的表达式可计算得到为

$$u(x)=\frac{2}{a}(-\sin k_{n_1}x\int\frac{\cos k_{n_1}x_1}{k_{n_1}}\sin k_{n_1}x_1\mathrm{d}x_1+\cos k_{n_1}x\int\frac{\sin k_{n_1}x_1}{k_{n_1}}\sin k_{n_1}x_1\mathrm{d}x_1)$$
$$=\frac{1}{ak_{n_1}^2}(-\sin x\int 2\sin x_1\cos x_1\mathrm{d}x_1+\cos x\int 2\sin^2 x_1\mathrm{d}x_1)$$
$$=\frac{1}{ak_{n_1}^2}(-\sin x\sin^2 x+\cos x\frac{2x-\sin 2x}{2})$$
$$=\frac{1}{ak_{n_1}^2}(-\sin^3 x+x\cos k_{n_1}x-\frac{1}{2}\sin 2x\cos x)$$
$$=\frac{1}{ak_{n_1}^2}(-\sin^3 x+x\cos x-\sin x\cos^2 x)=\frac{1}{ak_{n_1}^2}(x\cos x-\sin x)$$
$$=\frac{1}{ak_{n_1}^2}(k_{n_1}x\cos k_{n_1}x-\sin k_{n_1}x).$$

另一种计算法

$$u(x)=\frac{2}{a}(-\sin k_{n_1}x\int\frac{\cos k_{n_1}x_1}{k_{n_1}}\sin k_{n_1}x_1\mathrm{d}x_1+\cos k_{n_1}x\int\frac{\sin k_{n_1}x_1}{k_{n_1}}\sin k_{n_1}x_1\mathrm{d}x_1)$$
$$=\frac{2}{ak_{n_1}^2}\int(\cos x\sin x_1-\sin x\cos x_1)\sin x_1\mathrm{d}x_1=\frac{2}{ak_{n_1}^2}\int\sin(x_1-x)\sin x_1\mathrm{d}x_1$$
$$=\frac{1}{ak_{n_1}^2}\int\ [\cos(x_1-x-x_1)-\cos(x_1-x+x_1)]\mathrm{d}x_1$$
$$=\frac{1}{ak_{n_1}^2}\int\ [\cos x-\cos(2x_1-x)]\mathrm{d}x_1=\frac{1}{ak_{n_1}^2}[x\cos x-\frac{1}{2}\sin(2x_1-x)_{x_1=0}^{x_1=x}]$$
$$=\frac{1}{ak_{n_1}^2}(x\cos x-\sin x)=\frac{1}{ak_{n_1}^2}(k_{n_1}x\cos k_{n_1}x-\sin k_{n_1}x)$$

它在边界上的值为

$$u(0)=0,u(a)=(-1)^{n_1}/k_{n_1}.$$

这样，就得到特解为

$$\zeta_0(x,x')=\frac{\sin k_{n_1}x'}{ak_{n_1}^2}(-\sin k_{n_1}x+k_{n_1}x\cos k_{n_1}x).$$

现在的广义格林函数就是(6.4.44)式：

$$g_{m_1}(x,x')=\begin{cases}a_1(x')\zeta_1(x)+a_2(x')\zeta_2(x)+\zeta_0(x,x'),\ x>x'\\ b_1(x')\zeta_1(x)+b_2(x')\zeta_2(x)+\zeta_0(x,x'),\ x<x'\end{cases}$$

系数按照(6.4.47)式来求，

$$a_1(x')-b_1(x')=-\frac{\zeta_2(x')}{p_2(x')W(x')}=\frac{\cos k_{n_1}x'}{k_{n_1}}$$
$$a_2(x')-b_2(x')=\frac{\zeta_1(x')}{p_2(x')W(x')}=-\frac{\sin k_{n_1}x'}{k_{n_1}}$$

$$\zeta_1(x)=\sin k_{n_1}x,\zeta_2(x)=\cos k_{n_1}x$$

$$\zeta_0(x,x')=\frac{\sin k_{n_1}x'}{ak_{n_1}^2}(-\sin k_{n_1}x+k_{n_1}x\cos k_{n_1}x)=u(x)\sin k_{n_1}x'$$

$$\sin k_{n_1}a=0,\cos k_{n_1}a=(-1)^{n_1}$$

再利用格林函数的边界条件(6.5.9b)，在 $x=a$ 和 $x=0$ 处分别得到

$$g_{m_1}(a,x')=[a_1(x')\sin k_{n_1}x+a_2(x')\cos k_{n_1}x$$

$$+\frac{\sin k_{n_1}x'}{ak_{n_1}^2}(-\sin k_{n_1}x+k_{n_1}x\cos k_{n_1}x)]_{x=a}=0$$

$$g_{m_1}(0,x')=[b_1(x')\sin k_{n_1}x+b_2(x')\cos k_{n_1}x$$

$$+\frac{\sin k_{n_1}x'}{ak_{n_1}^2}(-\sin k_{n_1}x+k_{n_1}x\cos k_{n_1}x)]_{x=0}=0$$

所以有，

$$(-1)^{n_1}a_2(x')+\frac{(-1)^{n_1}}{k_{n_1}}\sin k_{n_1}x'=0$$

$$b_2(x')=0$$

因此，得到的格林函数是

$$g_{m_1}(x,x')=\begin{cases}a_1(x')\sin k_{n_1}x-\dfrac{1}{k_{n_1}}\sin k_{n_1}x'\cos k_{n_1}x+\zeta_0(x,x'),\ x>x'\\[2ex] [a_1(x')-\dfrac{\cos k_{n_1}x'}{k_{n_1}}]\sin k_{n_1}x+\zeta_0(x,x'),\ x<x'\end{cases}$$

还有一个因子有待确定.这需要用到广义格林函数的对称性. 令 $g_{m_1}(x',x)=g_{m_1}(x,x')$，得到

$$a_1(x')\sin k_{n_1}x-\frac{1}{k_{n_1}}\sin k_{n_1}x'\cos k_{n_1}x+\zeta_0(x,x')=[a_1(x)-\frac{\cos k_{n_1}x}{k_{n_1}}]\sin k_{n_1}x'+\zeta_0(x',x)$$

简化之后，

$$a_1(x')\sin k_{n_1}x+u(x)\sin k_{n_1}x'=a_1(x)\sin k_{n_1}x'+u(x')\sin k_{n_1}x$$

显然，符合此式的解是

$$a_1(x)=u(x)=(-\sin k_{n_1}x+k_{n_1}x\cos k_{n_1}x)/ak_{n_1}^2$$

这样，我们就得到广义格林函数的表达式：

$$g_{m_1}(x,x')=\begin{cases}u(x')\sin k_{n_1}x+u(x)\sin k_{n_1}x'-\dfrac{1}{k_{n_1}}\sin k_{n_1}x'\cos k_{n_1}x,\ x>x'\\[2ex] u(x')\sin k_{n_1}x+u(x)\sin k_{n_1}x'-\dfrac{1}{k_{n_1}}\cos k_{n_1}x'\sin k_{n_1}x,\ x<x'\end{cases}\qquad(6.5.28b)$$

最后我们得到 $k^2=(\frac{n_1\pi}{a})^2+(\frac{m_1\pi}{b})^2$ 时的(6.5.9)的广义格林函数解：

$$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=\frac{2}{b}\sum_m g_m(x,x')\sin\frac{m\pi}{b}y'\sin\frac{m\pi}{b}y \qquad (6.5.29)$$

其中，当 $m\neq m_1$ 时，$g_m(x,x')$ 是(6.5.28a)式，$g_{m_1}(x,x')$ 项则是(6.5.28b)式.

简单小结一下。当参量λ非本征值，格林函数展开成(6.5.20)式，其中 x 方向的格林函数 $g_m(x,x')$ 是(6.5.22)式.若λ为本征值(6.5.15)式，则广义格林函数也可展开成(6.5.20)的形式，其中 x 方向的格林函数 $g_m(x,x')$ 当 $m=m_1$ 是(6.5.28a)，与(6.5.22)形式相同；但是 $g_{m_1}(x,x')$ 这一项是(6.5.28b).

本例也可以对 y 方向分段求解.由于本例系统的简单性，只要在边值问题(6.5.8)中将 x 和 y 交换，a 和 b 交换，边值问题的形式不变.在一个正确的解式中作这样的交换得到的解式也一定是正确的.例如，在特征函数法的结果中这样的交换，解式不变的.因此，只要将解式(6.5.20)中 x 和 y 交换，a 和 b 交换，就得到对 y 分段的解. 例如，在(6.5.23)式中做这样的交换，就得到：

$$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=-\frac{2}{a}\sum_m\sin\frac{m\pi}{a}x'\sin\frac{m\pi}{a}x\frac{1}{k_{ym}b\sin k_{ym}b}$$
$$\times[\sin k_{ym}(y'-b)\sin k_{ym}y\theta(y-y')+\sin k_{ym}y'\sin k_{ym}(y-b)\theta(y'-y)]$$

2. 圆内亥姆霍兹方程的格林函数

求解满足如下边值问题的格林函数.

$$(\nabla^2+k^2)G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}');r,r'<a \qquad (6.5.30a)$$

$$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')|_{r=0}<\infty,\quad G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')|_{r=a}=0 \qquad (6.5.30b)$$

当参量$\lambda=k^2$ 为零时，就是拉普拉斯方程的格林函数.

相应的边值问题是

$$(\nabla^2+k^2)\psi(\boldsymbol{r})=f(\boldsymbol{r})$$

$$\psi(\boldsymbol{r})|_{r=0}<\infty,\quad \psi(\boldsymbol{r})|_{r=a}=0$$

既然是圆内问题，就采用极坐标.极坐标的拉普拉斯算符和δ函数的形式分别是

$$\nabla^2=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial}{\partial r})+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial^2\theta} \qquad (6.5.31)$$

$$\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')=\frac{\delta(r-r')\delta(\theta-\theta')}{r} \qquad (6.5.32)$$

1) 特征函数法

求解相应的特征值问题

$$(\nabla^2+k_i^2)\varphi_i(\boldsymbol{r})=0$$

$$\varphi_i(\boldsymbol{r})|_{r=0}<\infty,\quad \varphi_i(\boldsymbol{r})|_{r=a}=0$$

柱坐标下的方程是

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial}{\partial r})\varphi_m(\boldsymbol{r})+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial^2\theta}\varphi_m(\boldsymbol{r})+k_m^2\varphi_m(\boldsymbol{r})=0 \tag{6.5.33}$$

用分离变量法求解此方程.令 $\varphi_i(\boldsymbol{r})=R(r)\Theta(\theta)$，得到

$$\frac{r}{R(r)}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial R(r)}{\partial r})+k_i^2r^2=-\frac{1}{\Theta(\theta)}\frac{\partial^2\Theta(\theta)}{\partial^2\theta}=\gamma$$

角向函数因子满足的方程是

$$\Theta''(\theta)+\gamma\Theta(\theta)=0 \tag{6.5.34}$$

在角向上由于函数的单值性，只能用周期性边界条件.得到解为

$$\Theta(\theta)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\theta} \tag{6.5.35}$$

其中 $\gamma=m^2$，m 是整数.

径向方程

$$r\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial R(r)}{\partial r})+(k_i^2r^2-m^2)R(r)=0 \tag{6.5.36a}$$

边界条件应该是

$$R(0)<\infty, R(a)=0$$

令

$$kr=\rho$$

得到

$$\rho^2\frac{\partial^2R(\rho)}{\partial^2\rho}+\rho\frac{\partial R(\rho)}{\partial\rho}+(\rho^2-m^2)R(\rho)=0 \tag{6.5.36b}$$

这是 m 阶贝塞尔方程.其通解为第一和第二类贝塞尔函数的线性组合.

$$R(kr)=AJ_m(kr)+BY_m(kr) \tag{6.5.37}$$

符合边界条件的解是

$$B=0, J_m(k_{m,n}a)=0 \tag{6.5.38}$$

设 $J_m(k_{m,n}r)$ 在 $[0,a]$ 上的归一化系数是 $N_{m,n}$

$$N_{m,n}^2=\int_0^a J_m^2(k_{m,n}r)r\mathrm{d}r$$

需要计算解函数的归一化系数.现在边界上采用了第一类边界条件，所以归一化系数的公式就是(4.7.15)式.

$$N_{m,n}^2=\frac{a^2}{2}[J_m'(k_{m,n}a)]^2=\frac{a^2}{2}[J_{m+1}(k_{m,n}a)]^2 \tag{6.5.39}$$

归一化的特征函数是

$$\varphi_i(\boldsymbol{r})=\varphi_{m,n}(\boldsymbol{r})=\frac{J_m(k_{m,n}r)}{N_{m,n}}\frac{\mathrm{e}^{im\theta}}{\sqrt{2\pi}} \tag{6.5.40}$$

特征值由(6.5.38)式决定.特征函数和特征值都具有两个指标.

(1) 参量 k 不等于特征值

则格林函数为

$$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{\varphi_{m,n}^{*}(\boldsymbol{r}')\varphi_{m,n}(\boldsymbol{r})}{k^2-k_{m,n}^2}=\frac{1}{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{J_m(k_{m,n}r')J_m(k_{m,n}r)}{(k^2-k_{m,n}^2)N_{m,n}^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}m(\theta-\theta')} \quad (6.5.41)$$

(2) 参量 k 等于某一特征值

此时，由于边界条件(6.5.30b)是非齐次的，可用 6.4.2 小节的办法，即求解具有齐次边界条件的特征值问题(6.4.24).可是当我们把边界条件(6.5.30b)改成齐次的之后，我们发现，径向方程(6.5.36a)m=0 时没有符合边界条件的非零特征函数解；当 $m\neq0$ 时，在齐次边界下得到的特征函数与自然边界条件下得到的特征函数是相同的.这是一个特殊情况.因而，此时我们只能求解原非齐次边界条件下的广义格林函数.

若 $k^2=k_{m1,n1}^2$，则容易写出广义格林函数为

$$\begin{aligned}G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')&=\frac{J_{m1}(k_{m1,n1}r')}{2\pi N_{m1,n1}^2}J_{m1}(k_{m1,n1}r)\mathrm{e}^{\mathrm{i}m_1(\theta-\theta')}\\&+\frac{1}{2\pi}\sum_{n=1,n\neq n_1}^{\infty}\sum_{m=-\infty.m\neq m_1}^{\infty}\frac{J_m(k_{m,n}r')J_m(k_{m,n}r)}{(k_{n1,m1}^2-k_{n,m}^2)N_{m,n}^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}m(\theta-\theta')}\end{aligned} \quad (6.5.42)$$

2) 分段表示法

在柱坐标下，(6.5.30a)式写成

$$\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial}{\partial r})+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial^2\theta}+k^2\right)G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=\frac{\delta(r-r')\delta(\theta-\theta')}{r} \quad (6.5.43)$$

我们选择在径向做分段计算.当 $r\neq r'$ 时

$$\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial}{\partial r})+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial^2\theta}+k^2\right)G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=0;(r\neq r'<a;0\leq\theta<2\pi)$$

略去变量 $\boldsymbol{r}'$ 后，相应的函数方程是

$$\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial}{\partial r})+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial^2\theta}+k^2\right)\psi(\boldsymbol{r})=0$$

此方程的形式与(6.5.33)同.进行分离变量之后，只求解角向的特征方程.归一化的特征函数和特征值见(6.5.35)式.因此，δ函数的角向因子可用此特征函数系展开.

$$\delta(\theta-\theta')=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}m(\theta-\theta')} \quad (6.5.44)$$

格林函数做如下展开.

$$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=\sum_{m=-\infty}^{\infty}g_m(r,r')\mathrm{e}^{\mathrm{i}m(\theta-\theta')} \quad (6.5.45)$$

将上两式代入(6.5.43)式.

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty}[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial}{\partial r})+(k^2-\frac{m^2}{r^2})]g_m(r,r')\mathrm{e}^{\mathrm{i}m(\theta-\theta')}=\frac{\delta(r-r')}{r}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}m(\theta-\theta')}$$

经过算符作用之后，方程两边相等的条件是下式成立.

$$[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial}{\partial r})+(k^2-\frac{m^2}{r^2})]g_m(r,r')=\frac{\delta(r-r')}{r} \qquad (6.5.46)$$

满足此方程的 $g_m(r,r')$ 也叫做径向格林函数.相应的边界条件从(6.5.30b)得到：

$$g_m(0,r')<\infty，\quad g_m(a,r')=0 \qquad (6.5.47)$$

从(6.5.46)得到格林函数的跃变条件为

$$[r\frac{\partial}{\partial r}g_m(r,r')]_{r=r'+0^+}-[r\frac{\partial}{\partial r}g_m(r,r')]_{r=r'-0^+}=1 \qquad (6.5.48)$$

现在可用分段表示法来求解径向格林函数的方程(6.5.46).当 $r\neq r'$ 时

$$[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial}{\partial r})+(k^2-\frac{m^2}{r^2})]g_m(r,r')=0 \qquad (6.5.49)$$

这是 m 阶贝塞尔方程.其通解为第一和第二类贝塞尔函数的线性组合.

$$g_m(r,r')=\begin{cases}a_1(r')J_m(kr)+a_2(r')Y_m(kr), r<r'\\ b_1(r')J_m(kr)+b_2(r')Y_m(kr), r>r'\end{cases} \qquad (6.5.50)$$

根据连续性和跃变条件

$$[a_1(r')-b_1(r')]J_m(kr')+[a_2(r')-b_2(r')]Y_m(kr')=0$$
$$[a_1(r')-b_1(r')]J_m'(kr')+[a_2(r')-b_2(r')]Y_m'(kr')=1/r'$$

令 $c_i(r')=a_i(r')-b_i(r'), i=1,2$，

$$c_1(r')J_m(kr')+c_2(r')Y_m(kr')=0$$
$$c_1(r')J_m'(kr')+c_2(r')Y_m'(kr')=1/r'$$

其中的系数行列式

$$\begin{vmatrix}J_m(kr') & Y_m(kr')\\ J_m'(kr') & Y_m'(kr')\end{vmatrix}=\frac{2}{\pi kr'}$$

结合上两式解得：

$$c_1(r')=a_1(r')-b_1(r')=-\frac{\pi k}{2}Y_m(kr'), c_2(r')=a_2(r')-b_2(r')=\frac{\pi k}{2}J_m(kr') \qquad (6.5.51)$$

由边界条件(6.5.47)，可从(6.5.50)得

$$a_2(r')=0, b_1(r')J_m(ka)+b_2(r')Y_m(ka)=0 \qquad (6.5.52)$$

结合(6.5.51)式解得：

$$b_2(r')=-\frac{\pi k}{2}J_m(kr'), b_1(r')=\frac{\pi k}{2}\frac{Y_m(ka)}{J_m(ka)}J_m(kr'),$$

$$a_1(r')=\frac{\pi k}{2}\frac{Y_m(ka)J_m(kr')-J_m(ka)Y_m(kr')}{J_m(ka)}=\frac{\pi k}{2}\frac{U_m(a,r')}{J_m(ka)}$$

$$U_m(r,r')=Y_m(kr)J_m(kr')-J_m(kr)Y_m(kr')$$

因此径向格林函数是

$$g_m(r,r')=\frac{\pi k}{2}[\frac{U_m(a,r')}{J_m(ka)}J_m(kr)\theta(r'-r)+\frac{U_m(a,r)}{J_m(ka)}J_m(kr')\theta(r-r')] \qquad (6.5.53)$$

代入(6.5.45)，得到总的格林函数

$$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=\frac{\pi k}{2}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}m(\theta-\theta')}[\frac{U_m(a,r')}{J_m(ka)}J_m(kr)\theta(r'-r)+\frac{U_m(a,r)}{J_m(ka)}J_m(kr')\theta(r-r')]\quad(6.5.54)$$

当数值 k 恰好满足 $J_m(ka)=0$ 时，这一解式不适用.这时需要求解相应的广义格林函数.

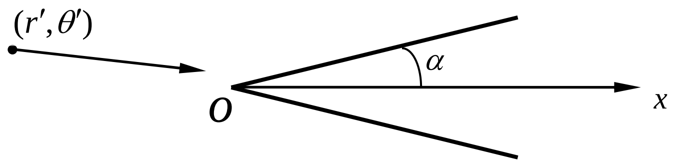

图 6.1

3. 电磁波受到理想导体劈的散射

这是从无穷远处入射的平面波受到尖端处于原点的理想导体劈的散射.如图6.1，劈尖的半角是α.以劈尖的角平分线作为 x 轴.入射的是偏振方向为 z 方向的电场.由于劈尖是理想导体，根据电磁场的边界条件，在劈尖表面的电场值为零.

求解的思路是，先考虑空间一点(r',θ')处的点源在劈尖以外各点产生的场.当$r'\to\infty$时就成为从无穷远处以θ'角度入射的平面波受到劈尖散射之后在空间各点产生的场.因此先求解满足如下边值问题的格林函数.

$$(\nabla^2+k^2)G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}');\alpha<\theta<2\pi-\alpha\qquad(6.5.55a)$$

$$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')|_{r=0}<\infty，\quad G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')|_{\theta=\alpha,2\pi-\alpha}=0\qquad(6.5.55b)$$

极坐标的拉普拉斯算符和δ函数的形式分别是

$$(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial}{\partial r})+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial^2\theta}+k^2)G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=\frac{\delta(r-r')\delta(\theta-\theta')}{r};\alpha<\theta<2\pi-\alpha\quad(6.5.56)$$

用分段表示法求解.选择在径向分段.

1) 求角向特征函数系

当$r\neq r'$时，(6.5.56)式成为

$$(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial}{\partial r})+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial^2\theta}+k^2)G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=0;\alpha<\theta<2\pi-\alpha,r\neq r'$$

略去变量$\boldsymbol{r}'$后，相应的函数方程是

$$(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial}{\partial r})+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial^2\theta}+k^2)\psi(\boldsymbol{r})=0$$

进行分离变量之后，只求解角向的特征方程，

$$\Theta''(\theta)+\gamma\Theta(\theta)=0\qquad(6.5.57a)$$

边界条件为

$$\Theta(\alpha)=\Theta(2\pi-\alpha)=0\qquad(6.5.57b)$$

边值问题(6.5.57)的解已经在第五章 5.4 节的例 4 中求出.正交归一的函数系是

$$\{\frac{1}{\sqrt{\pi-\alpha}}\sin\frac{n\pi(\theta-\alpha)}{2(\pi-\alpha)}\} \tag{6.5.58}$$

其中 n 是正整数.特征值是

$$\gamma_n=\nu^2 \tag{6.5.59}$$

其中令

$$\nu=\frac{n\pi}{2(\pi-\alpha)},n=1,2,3,\cdots \tag{6.5.60}$$

因此，δ函数的角向因子可用此特征函数系展开.

$$\delta(\theta-\theta')=\frac{1}{\pi-\alpha}\sum_{\nu}^{\infty}\sin\nu(\theta'-\alpha)\sin\nu(\theta-\alpha) \tag{6.5.61}$$

格林函数做如下展开.

$$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=\sum_{\nu}^{\infty}g_\nu(r,r')\frac{1}{\pi-\alpha}\sin\nu(\theta'-\alpha)\sin\nu(\theta-\alpha) \tag{6.5.62}$$

2) 求径向格林函数

将上两式代入(6.5.56)式.

$$\sum_{\nu}^{\infty}(\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial}{\partial r})-\frac{1}{r}\nu^2+k^2)g_\nu(r,r')\sin\nu(\theta'-\alpha)\sin\nu(\theta-\alpha)$$

$$=\delta(r-r')\sum_{\nu}^{\infty}\sin\nu(\theta'-\alpha)\sin\nu(\theta-\alpha)$$

经过算符作用之后，方程两边相等的条件是下式成立.

$$(\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial}{\partial r})-\frac{1}{r}\nu^2+rk^2)g_\nu(r,r')=\delta(r-r') \tag{6.5.63}$$

这是径向格林函数 $g_\nu(r,r')$ 应满足的方程.用分段表示法求解.

当 $r\neq r'$ 时

$$[r\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial}{\partial r})+(k^2r^2-\nu^2)]g_\nu(r,r')=0$$

令

$$kr=\rho$$

得到

$$[\rho^2\frac{\partial^2}{\partial^2\rho}+\rho\frac{\partial}{\partial\rho}+(\rho^2-\nu^2)]g_\nu(r,r')=0$$

这是ν阶贝塞尔方程.由于 r 的范围可以是无穷大,无法建立在有限 r 处的边界条件,因此这个方程是没有本征函数的.只能采用分段表示法.

其通解可以为第一和第二类，也可以是第一和第三类贝塞尔函数的线性组合.经过验证，发现写成第一类贝塞尔函数和第二类汉克尔函数的线性组合是比较方便的.要注意的是，现在的ν不是整数.

$$g_\nu(r,r')=\begin{cases}a_1(r')J_\nu(kr)+a_2(r')H_\nu^{(2)}(kr), r<r'\\ b_1(r')J_\nu(kr)+b_2(r')H_\nu^{(2)}(kr), r>r'\end{cases} \tag{6.5.64}$$

根据连续性和跃变条件

$$[a_1(r')-b_1(r')]J_\nu(kr')+[a_2(r')-b_2(r')]H_\nu^{(2)}(kr')=0$$

$$[a_1(r')-b_1(r')]J_\nu'(kr')+[a_2(r')-b_2(r')]H_\nu^{(2)\prime}(kr')=1/r'$$

令 $c_i(r')=a_i(r')-b_i(r'), i=1,2$，

$$c_1(r')J_\nu(kr')+c_2(r')H_\nu^{(2)}(kr')=0$$

$$c_1(r')J_\nu'(kr')+c_2(r')H_\nu^{(2)\prime}(kr')=1/kr'$$

其中的系数行列式

$$\begin{vmatrix}J_\nu(kr') & H_\nu^{(2)}(kr')\\ J_\nu'(kr') & H_\nu^{(2)\prime}(kr')\end{vmatrix}=J_\nu(kr')H_\nu^{(2)\prime}(kr')-J_\nu'(kr')H_\nu^{(2)}(kr')=\frac{2\mathrm{i}}{\pi kr'}$$

解得：

$$c_1(r')=a_1(r')-b_1(r')=-\frac{\pi k}{2\mathrm{i}}H_\nu^{(2)}(kr'), c_2(r')=a_2(r')-b_2(r')=\frac{\pi k}{2\mathrm{i}}J_\nu(kr') \tag{6.5.65}$$

由边界条件

$$g_\nu(0,r')<\infty$$

得到

$$a_2(r')=0$$

$$g_\nu(r,r')=\begin{cases}b_1(r')J_\nu(kr)+\dfrac{\mathrm{i}\pi k}{2}H_\nu^{(2)}(kr')J_\nu(kr), r<r'\\ b_1(r')J_\nu(kr)+\dfrac{\mathrm{i}\pi k}{2}H_\nu^{(2)}(kr)J_\nu(kr'), r>r'\end{cases}$$

由于无穷远处的边界条件没有给定，所以需要利用格林函数的对称性.容易看出来，当取

$$b_1(r')=0$$

时

$$g_\nu(r,r')=\frac{\mathrm{i}\pi k}{2}\begin{cases}H_\nu^{(2)}(kr')J_\nu(kr), r<r'\\ J_\nu(kr')H_\nu^{(2)}(kr), r>r'\end{cases} \tag{6.5.66}$$

3) 总的格林函数

将(6.5.66)式代入(6.5.62)式就得到总的格林函数.

$$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=\frac{\mathrm{i}\pi k}{2(\pi-\alpha)}\sum_\nu^\infty \sin\nu(\theta'-\alpha)\sin\nu(\theta-\alpha)\begin{cases}H_\nu^{(2)}(kr')J_\nu(kr), r<r'\\ J_\nu(kr')H_\nu^{(2)}(kr), r>r'\end{cases} \tag{6.5.67}$$

最后我们来说明为什么在(6.5.64)式中取第一类贝塞尔函数和第二类汉克尔函数的线性组合.考虑 $r'\to\infty$ 时，源趋于无穷远，应该得到一个无穷大空间中的解，二维空间这样的解已经求得为

$$G^+(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}';k^2)=-\frac{\mathrm{i}}{4}H_0^{(1)}(k|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|) \tag{6.5.68a}$$

$$G^-(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}';k^2)=\frac{\mathrm{i}}{4}H_0^{(2)}(k|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|) \tag{6.5.68b}$$

其中G^+是中心发出的出射波，G^-是向中心的汇聚波.我们现在$r'\to\infty$，考虑的是从无穷远处入射的波，所以应该取G^-.

利用汉克尔函数的渐进式

$$H_\nu^{(2)}(k\rho\to\infty)=\sqrt{\frac{2}{\pi k\rho}}\exp[-\mathrm{i}(k\rho-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4})] \tag{6.5.69}$$

当$r'\to\infty$时

$$|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|\to r'-r\cos(\theta'-\theta) \tag{6.5.70}$$

因此

$$H_0^{(2)}(k\rho\to\infty)\to\sqrt{\frac{2\mathrm{i}}{\pi kr'}}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k[r'-r\cos(\theta'-\theta)]}=\sqrt{\frac{2\mathrm{i}}{\pi kr'}}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kr'}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr\cos(\theta'-\theta)}$$

格林函数的渐近行为是

$$G^-(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'\to\infty)=\frac{\mathrm{i}}{4}\sqrt{\frac{2\mathrm{i}}{\pi kr'}}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kr'}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr\cos(\theta'-\theta)} \tag{6.5.71}$$

考虑格林函数$g_\nu(r,r')$中$r<r'$的部分.

$$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=\frac{\mathrm{i}\pi k}{2(\pi-\alpha)}\sum_\nu^\infty\sin\nu(\theta'-\alpha)\sin\nu(\theta-\alpha)H_\nu^{(2)}(kr')J_\nu(kr),r<r' \tag{6.5.72}$$

当$r'\to\infty$，汉克尔函数用(6.5.69)的渐近式.

$$H_\nu^{(2)}(kr'\to\infty)=\sqrt{\frac{2\mathrm{i}}{\pi kr'}}\mathrm{i}^\nu\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kr'}$$

代入(6.5.72)式，

$$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'\to\infty)=\frac{\mathrm{i}\pi k}{2(\pi-\alpha)}\sqrt{\frac{2\mathrm{i}}{\pi kr'}}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kr'}\sum_\nu^\infty\mathrm{i}^\nu\sin\nu(\theta'-\alpha)\sin\nu(\theta-\alpha)J_\nu(kr) \tag{6.5.73}$$

式(6.5.71)和(6.5.73)应相等，易见，此两式随$r'\to\infty$时的渐近行为时一样的.都是$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kr'}/\sqrt{r'}$的行为.这就是为什么在(6.5.64)式中取第二类汉克尔函数做线性组合.若用第二类贝塞尔函数，则渐近行为有所不同，不能与(6.5.71)式匹配.

因为式(6.5.71)和(6.5.73)应相等，我们可以得到如下的展开式.

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr\cos(\theta'-\theta)}=\frac{2\pi k}{\pi-\alpha}\sum_\nu^\infty\mathrm{i}^\nu\sin\nu(\theta'-\alpha)\sin\nu(\theta-\alpha)J_\nu(kr) \tag{6.5.74}$$

其中ν的取值见(6.5.60)式.这是平面波在劈尖以外区域的展开式.

(iv) 半无限大理想金属板对电磁波的散射

当图 6.1 中的劈尖的半角α等于零时，并不是劈尖消失了，而是成为一个位于正x轴的半无穷大薄板.这是因为我们在求解角向的特征函数系时用的边界条件是(6.5.57b)，而不是周期性边界条件.在(6.5.67)和(6.5.60)式中令$\alpha=0$，

$$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=\frac{\mathrm{i}k}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\sin(\frac{n}{2}\theta')\sin(\frac{n}{2}\theta)\begin{cases}H_\nu^{(2)}(kr')J_\nu(kr), r<r'\\ J_\nu(kr')H_\nu^{(2)}(kr), r>r'\end{cases} \tag{6.5.75}$$

这就是半无限大理想金属板以外区域的格林函数.

6.5.3 三维格林函数求解实例

球内问题拉普拉斯方程

$$\nabla^2 G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'); r,r<a \tag{6.5.76a}$$

$$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')|_{r=0}<\infty,\quad G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')|_{r=a}=0 \tag{6.5.76b}$$

既然是球对称的问题，就用球坐标.拉普拉斯算符和δ函数的形式是

$$\nabla^2=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial}{\partial r})+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta})+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$$

$$\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')=\frac{\delta(r-r')\delta(\varphi-\varphi')\delta(\theta-\theta')}{r^2\sin\theta}$$

先解拉普拉斯方程在边界条件(6.5.76b)下的特征值问题.令

$$\psi(r)=R(r)\Theta(\theta)\Phi(\varphi)$$

$$\frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(r^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r})+\frac{1}{\Theta\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}(\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta})+\frac{1}{\Phi\sin^2\theta}\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}\varphi^2}=0$$

此式分解成以下两式，

$$\frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(r^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r})=\gamma \tag{6.5.77}$$

$$\frac{1}{\Theta\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}(\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta})+\frac{1}{\Phi\sin^2\theta}\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}\varphi^2}=-\gamma \tag{6.5.78}$$

式(6.5.78)球谐函数满足的方程.归一化的解为球谐函数

$$Y_l^m(\theta,\varphi)=\Theta(\theta)\Phi(\varphi)=P_l^m(\cos\theta)\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi} \tag{6.5.79}$$

它是连带勒让德函数$\Theta(\theta)=P_l^m(\cos\theta)$和$\Phi(\varphi)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi}$的乘积.特征值为

$$\gamma=l(l+1),(l=0,1,2,\cdots),\quad m=0,\pm1,\pm2,\cdots,\pm l$$

把这一特征值代入径向方程(6.5.77)

$$r^2\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}r^2}+2r\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}-l(l+1)R=0$$

由(6.5.76b)，径向方程应满足的边界条件是

$$R(0)<\infty, R(a)=0,\quad G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')|_{r=a}=0$$

此方程的通解

$$R(r)=Ar^l+\frac{B}{r^{l+1}}$$

若由边界条件知， $A=0,B=0$.因此，本问题不存在特征函数系. 原因是在贝塞尔方程中的参量为零，非特征值.只能用分段表示法求解.

由于沿径向是没有特征函数的，因此就考虑在径向采用分段表示法.

$$(\nabla^2+k^2)G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=\frac{\delta(r-r')\delta(\varphi-\varphi')\delta(\theta-\theta')}{r^2\sin\theta},\qquad (6.5.80)$$
$$(r,r'<a,0\le\varphi\le 2\pi,0\le\theta\le\pi)$$

当 $r\neq r'$ 时的方程为

$$(\nabla^2+k^2)G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=0,\quad (r\neq r'<a,0\le\varphi\le 2\pi,0\le\theta\le\pi)$$

经过分离变量之后，角向的方程就是(6.5.78).归一化的特征函数就是球谐函数(6.5.79)式.因此有

$$\delta(\theta-\theta')\delta(\varphi-\varphi')=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\sin\theta Y_l^{m*}(\theta',\varphi')Y_l^m(\theta,\varphi)\qquad (6.5.81)$$

此处不能漏掉一个权重函数 $\sin\theta$.将格林函数也用此特征函数系展开，

$$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}Y_l^{m*}(\theta',\varphi')Y_l^m(\theta,\varphi)g(r,r')\qquad (6.5.82)$$

将上两式代入(6.5.80)式，

$$\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\ Y_l^{m*}(\theta',\varphi')Y_l^m(\theta,\varphi)[\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial}{\partial r})-l(l+1)]g(r,r')$$
$$=\delta(r-r')\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\ Y_l^{m*}(\theta',\varphi')Y_l^m(\theta,\varphi)$$

经过算符的作用，等式成立的条件是

$$[\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial}{\partial r})-l(l+1)]g(r,r')=\delta(r-r')\qquad (6.5.83)$$

此处的 $g(r,r')$ 是球坐标下的径向格林函数.边界条件为

$$g(0,r')<\infty,\quad g(a,r')=0\qquad (6.5.84)$$

跃变条件

$$[r^2\frac{\partial}{\partial r}g(r,r')]_{r=r'+0^+}-[r^2\frac{\partial}{\partial r}g(r,r')]_{r=r'-0^+}=1\qquad (6.5.85)$$

径向格林函数方程的分段解为

$$g(r,r')=\begin{cases}a_1(r')r^l+a_2(r')r^{-l-1},r<r'\\ b_1(r')r^l+b_2(r')r^{-l-1},r>r'\end{cases}\qquad (6.5.86)$$

由连续条件和跃变条件，

$$[a_1(r')-b_1(r')]r'^l+[a_2(r')-b_2(r')]r'^{-l-1}=0$$
$$[a_1(r')-b_1(r')]lr'^{l-1}-(l+1)[a_2(r')-b_2(r')]r'^{-l-2}=1/r'^2$$

令 $c_i(r')=a_i(r')-b_i(r'),i=1,2$， 得到

$$c_1(r')r'^l + c_2(r')r'^{-l-1} = 0$$
$$lc_1(r')r'^{l-1} - (l+1)c_2(r')r'^{-l-2} = 1/r'^2$$

解得

$$c_1(r') = a_1(r') - b_1(r') = \frac{r'^2}{2l+1}\frac{r'^{-l-1}}{r'^2} = \frac{r'^{-l-1}}{2l+1}$$
$$c_2(r') = a_2(r') - b_2(r') = -\frac{r'^2}{2l+1}\frac{r'^l}{r'^2} = -\frac{r'^l}{2l+1} \quad (6.5.87)$$

由边界条件(6.5.84)式得到

$$a_2(r') = 0, b_1(r')a^l + b_2(r')a^{-l-1} = 0$$

代入(6.5.87)解出

$$b_2(r') = \frac{r'^l}{2l+1}, b_1(r') = -\frac{r'^l}{2l+1}a^{-2l-1}, a_1(r') = r'^l\frac{r'^{-2l-1} - a^{-2l-1}}{2l+1}$$

得到径向格林函数为

$$g(r,r') = \frac{r'^{-2l-1} - a^{-2l-1}}{2l+1}r'^l r^l \theta(r'-r) + \frac{r^{-2l-1} - a^{-2l-1}}{2l+1}r'^l r^l \theta(r-r') \quad (6.5.88)$$

代入(6.5.82)得总的格林函数为

$$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} Y_l^{m*}(\theta',\varphi')Y_l^m(\theta,\varphi)$$
$$\times\left[\frac{r'^{-2l-1} - a^{-2l-1}}{2l+1}r'^l r^l \theta(r'-r) + \frac{r^{-2l-1} - a^{-2l-1}}{2l+1}r'^l r^l \theta(r-r')\right] \quad (6.5.89)$$

本题的特点是，在径向不存在特征函数系，而在另外两个方向上是存在特征函数系的.

§6.7 一阶微分方程的格林函数

对于自伴算子，可以如 6.4.1 小节一样证明，格林函数具有 (6.4.7)式那样的对称性.

6.7.1 非齐次方程边值问题

带参量λ的一阶微分方程的边值问题的一般形式如下.

$$[\lambda - p(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - q(x)]\psi(x) = f(x); a \le x \le b \quad (6.7.1a)$$

$$\alpha\psi(a) + \beta\psi(b) = \gamma \quad (6.7.1b)$$

设在区间$[a,b]$上， $p(x) \neq 0$.

仿照方程二阶微分方程的情况，将边值问题(6.7.1)分成两部分.

$$\psi(x)=\varphi(x)+\xi(x) \tag{6.7.2}$$

其中函数$\varphi(x)$满足带非齐次边界条件的齐次方程，$\xi(x)$满足带齐次边界条件的非齐次方程.

6.7.2 齐次方程边值问题

函数$\varphi(x)$满足的边值问题如下.

$$[\lambda-p(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}-q(x)]\varphi(x)=0; a\le x\le b \tag{6.7.3a}$$

$$\alpha\varphi(a)+\beta\varphi(b)=\gamma \tag{6.7.3b}$$

容易得到其解为

$$\varphi(x)=C\exp[\int_a^x\frac{\lambda-q(x_1)}{p(x_1)}\mathrm{d}x_1] \tag{6.7.4}$$

由边界条件，得到

$$\alpha C+\beta C\exp[\int_a^b\frac{\lambda-q(x_1)}{p(x_1)}\mathrm{d}x_1]=\gamma$$

因此，常数C为

$$C=\gamma\left\{\alpha+\beta\exp[\int_a^b\frac{\lambda-q(x_1)}{p(x_1)}\mathrm{d}x_1]\right\}^{-1}$$

当$\gamma=0$时，$C=0$，即一阶齐次微分方程只有在非齐次边界条件下才有解.得到(6.7.3)的解为

$$\varphi(x)=\gamma\left\{\alpha+\beta\exp[\int_a^b\frac{\lambda-q(x_1)}{p(x_1)}\mathrm{d}x_1]\right\}^{-1}\exp[\int_a^x\frac{\lambda-q(x_2)}{p(x_2)}\mathrm{d}x_2] \tag{6.7.5}$$

例如，当$p(x)=-\mathrm{i}, q(x)=0$时，$\varphi(x)=\dfrac{\gamma\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda(x-a)}}{\alpha+\beta\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda(b-a)}}$.

6.7.3 非齐次方程与格林函数

函数$\xi(x)$满足的边值问题如下.

$$[\lambda-p(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}-q(x)]\xi(x)=f(x); a\le x\le b \tag{6.7.6a}$$

$$\alpha\xi(a)+\beta\xi(b)=0 \tag{6.7.6b}$$

与边值问题(6.7.6)相应的是满足如下微分方程和齐次边界条件的格林函数.

$$[\lambda - p(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - q(x)]G(x,x') = \delta(x-x'); a \le x, x' \le b \tag{6.7.7a}$$

$$\alpha G(a,x') + \beta G(b,x') = 0 \tag{6.7.7b}$$

一旦格林函数解出之后，

$$\xi(x) = \int_a^b G(x,x') f(x')\mathrm{d}x' \tag{6.7.8}$$

我们还是用分段表示法来解格林函数.只不过要注意，现在的跃变条件是

$$-G(x'+0^+,x') + G(x'-0^+,x') = \frac{1}{p(x)} \tag{6.7.9}$$

此时的格林函数本身是不连续的.

当 $x \ne x'$ 时，方程

$$[\lambda - p(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - q(x)]G(x,x') = 0$$

的解如(6.7.4)式.

$$G(x,x') = A(x')\exp[\int_a^x \frac{\lambda - q(y)}{p(y)}\mathrm{d}y]\theta(x'-x) + B(x')\exp[\int_a^x \frac{\lambda - q(y)}{p(y)}\mathrm{d}y]\theta(x-x')$$

为简便计，令

$$\eta(x) = \exp[\int_a^x \frac{\lambda - q(y)}{p(y)}\mathrm{d}y]$$

由跃变条件(6.7.9)式

$$A(x') - B(x') = 1/p(x')\eta(x')$$

再用边界条件(6.7.7b)，

$$\alpha A(x') + \beta B(x')\eta(b) = 0$$

由此两式解得

$$\alpha A(x') - \alpha B(x') = \alpha / p(x')\eta(x'), \alpha B(x') + \beta B(x')\eta(b) = -\alpha / p(x')\eta(x')$$

$$B(x') = -\frac{1}{p(x')\eta(x')}\frac{\alpha}{\alpha + \beta\eta(b)}$$

$$A(x') = \frac{1}{p(x')\eta(x')} + B(x') = \frac{1}{p(x')\eta(x')}(1 - \frac{\alpha}{\alpha + \beta\eta(b)}) = \frac{1}{p(x')\eta(x')}\frac{\beta\eta(b)}{\alpha + \beta\eta(b)}$$

再令

$$\Delta = \alpha + \beta\eta(b)$$

球的格林函数为

$$\begin{aligned} G(x,x') &= \eta(x)[A(x')\theta(x'-x) + B(x')\theta(x-x')] \\ &= \eta(x)[\frac{1}{p(x')\eta(x')}\frac{\beta\eta(b)}{\Delta}\theta(x'-x) - \frac{1}{p(x')\eta(x')}\frac{\alpha}{\Delta}\theta(x-x')] \\ &= \frac{\eta(x)}{p(x')\eta(x')\Delta}[\beta\eta(b)\theta(x'-x) - \alpha\theta(x-x')] \end{aligned} \tag{6.7.10}$$

最简单的情况是 $p(x) = -\mathrm{i}, q(x) = 0$

这时

$$\eta(x)=\exp[\int_a^x\frac{\lambda-q(y)}{p(y)}\mathrm{d}y]=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda(x-a)},\Delta=\alpha+\beta\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda(b-a)}$$

格林函数简化为

$$G(x,x')=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda(x-a)}}{-\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda(x'-a)}(\alpha+\beta\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda(b-a)})}[\beta\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda(b-a)}\,\theta(x'-x)-\alpha\theta(x-x')]$$
$$=\frac{\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda(x-x')}}{\alpha\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda a}+\beta\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda b}}[\beta\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda b}\,\theta(x'-x)-\alpha\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda a}\,\theta(x-x')]$$

6.7.4 边值问题的通解

边值问题(6.7.1)的解就是

$$\psi(x)=\varphi(x)+\int_a^b G(x,x')f(x')\mathrm{d}x' \qquad (6.7.11)$$

其中$\varphi(x)$和$G(x,x')$分别是(6.7.5)和(6.7.10)式.

式(6.7.11)是边值问题(6.7.1)的标准的求解公式.假如(6.7.1)扩展成如下的形式，

$$[\lambda-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}-q(x)]y(x)=f(x,y(x));a\le x\le b \qquad (6.7.12a)$$

$$\alpha y(a)+\beta y(b)=\gamma \qquad (6.7.12b)$$

其中非齐次项中含有待求函数$y(x)$，那么解式仍然是(6.7.11).

$$y(x)=\varphi(x)+\int_a^b G(x,x')f(x',y(x'))\mathrm{d}x' \qquad (6.7.13)$$

只不过现在(6.7.13)式的被积函数中有待求函数$y(x)$，所以这是一个积分方程.

本章重点

格林函数的定义。
格林函数在求解非齐次微分方程中的作用。
求解格林函数的三个基本方法。熟练掌握特征函数法和分段表示法。
格林函数的对称性。
会求一维边值问题的格林函数。

轻点
拉普拉斯算子的三维和一维空间基本解的求解过程和解的形式。由求解过程可以体会：傅里叶变换法可以看做是特征函数法的一个特例。
二阶微分方程的解 6.4.2 小节。
1. 边值问题解的一般公式一维(6.4.14)，高维(6.5.7)。
2. 参量λ非齐次方程特征值时非齐次方程的解。
3. 参量λ为齐次方程特征值时非齐次方程的解。
运用分离变量法求解二维问题的格林函数。

小贴士

本章讲的是数学物理方程中的格林函数。不要与量子统计中的格林函数理论相混淆。

格林函数在电动力学的静电学中已经用到过。电像法在本讲义中未介绍。

格林函数在第八章求积分方程中要用到。

本章既用到了第五章的δ函数，也用到了第三章的常微分方程的理论。

格林函数是求解积分方程中的一个常用的方法。

格林函数是具有δ函数源的微分方程的解。本章写的微分方程中，只含空间的导数。还有更复杂的情况，就是，除了对空间的导数，还要加上对时间的一阶或者二阶导数。第五章的(5.2.19)给出了加上时间一次导数项的一个例子。那是薛定谔方程(或者扩散方程)的格林函数。其解(5.2.20)在高量中被称为传播子。如果在(5.2.19)式中，把时间的一次导数项换成二阶导数，那么，就成为电磁场波动方程的格林函数满足的方程，其解称为电磁场的传播函数。

本书没有介绍加上一阶和二阶时间导数项的格林函数的解。程建春著《数学物理方程及其近似方法》一书中有些介绍。有兴趣的同学可参考。这方面的内容，如果要详细介绍，还需要很多的篇幅。作者认为，要介绍，就应当详细介绍，把细节都说清楚。作者不想只介绍一些皮毛。但是再写更多的内容不太妥当，就干脆未写这部分的内容。

布置习题：

做以下习题 2,3,4 中(1)(2),9,11,21，28,，此外，再任选 5 题。

习题

1. (1) 求 $\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}G(x,x')=\delta(x-x'),0<t,t'<1;G(0,x')=G(1,x')=0$ 的解.它应该就是(6.3.24)式. (2) 求 $(\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}+\lambda)G(x,x')=\delta(x-x'),0<t,t'<1;G(0,x')=G(1,x')=0$ 的解.当求 $\lambda=0$ 时，就回到(1)的解.

2. 对于三阶微分算符

$$L(x)=\frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}x^3}+f_2(x)\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}+f_1(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}+f_0(x)$$

用分段表示法求解格林函数.从结果推断 n 阶微分算符的格林函数的表达式.

3. 求满足如下边值问题的格林函数

$$(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}+k^2)G(x,x')=\delta(x-x'),0<x,x'<\infty$$

$$G(x=0)=1,G(x\to\infty)\sim \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$$

这是半无限长导线上的电压(或电流)满足的一维亥姆霍兹方程的格林函数.

4. 求以下边值问题的格林函数.

(1) $(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}+\lambda^2)G(x,x')=\delta(x-x'),0<x,x'<\pi$, $[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}G(x,x')]_{x=0}=0,[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}G(x,x')]_{x=\pi}=0$

(2) $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}G(x,x')=\delta(x-x'),0<x,x'<1$

$G(0,x')+G(1,x')=0,[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}G(x,x')]_{x=0}+[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}G(x,x')]_{x=1}=0$

(3) $(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}+1)G(x,x')=\delta(x-x'),0<x,x'<1$,

$G(0,x')=G(1,x'),[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}G(x,x')]_{x=0}=[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}G(x,x')]_{x=1}$

(4) $(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}-k^2)G(x,x')=\delta(x-x'),0<x,x'<1$

$G(0,x')=[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}G(x,x')]_{x=1},G(1,x')=[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}G(x,x')]_{x=1}$

(5) $\frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}x^3}G(x,x')=\delta(x-x'),0<x,x'<1$

$G(0,x')=G(1,x')=0,[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}G(x,x')]_{x=0}=[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}G(x,x')]_{x=1}$

5. 求以下边值问题的格林函数

(1) $(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}-1)G(x,x')=\delta(x-x')$ ，$|x|\to\infty$ 时，格林函数的值有限.

(2) $(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}-1)G(x,x')=\delta(x-x'),G(-a,x')=G(a,x')=0$.当 $a\to\infty$ 时，解应趋于(1)的结果.

6. 证明格林函数的围线积分公式：

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\oint_C \mathrm{d}\lambda G(x,x',\lambda)=\delta(x-x')$$

其中积分回路 C 包含格林函数 $G(x,x',\lambda)$ 的所有一级极点.

7. 将格林函数的表达式(6.3.11)代入(6.3.1)验证是满足此方程的.

8. 对于阻尼振子，用傅里叶变换法求解格林函数.

9. 由(6.1.14)式，格林函数在特征值处似乎一定是一级极点.其实并不尽然.情况以下二阶微分方程的边值：

$$(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}+\lambda^2)y(x)=0, y(0)=0, y'(0)+y'(\pi)=0$$

求出其特征函数和特征值.求出满足同样边值问题的格林函数.此题的格林函数在特征值处是二级极点.不过本章只考虑格林函数在特征值处是一级极点的情况.

10. 我们在 6.2 节中用特征函数法求出了拉普拉斯算子格林函数的基本解.请用分段表示法求拉普拉斯算子格林函数的基本解.用球坐标系，可得到一、二、三维空间的统一的径向方程，得到格林函数的统一的表达式.并依此方法，求出四维空间中的基本解.

11.广义格林函数 $g(x,x';\lambda_m)$ 满足的方程(6.4.33)并不保证它具有对称性(6.4.7)式.为实现这一对称性，需要再加一定的限制条件。一种限制条件是：$\int_a^b \mathrm{d}x\rho(x)g^*(x,x_1;\lambda_m^*)\varphi_m(x)=c\varphi_m(x_1)$，其中 c 是常数.请证明，在这一条件下广义格林函数 $g(x,x';\lambda_m)$ 具有对称性(6.4.7).式(6.4.40)的形式满足这一条件.这是一个充分条件.

12. 求解(6.5.21)的格林函数.即获得表达式(6.5.22).

13. 将分段表示法的结果(6.5.22)用特征函数系展开，结果与特征函数法的结果(6.5.14)是否相同.

14. 将(6.5.54)式中的径向格林函数展开，可否得到(6.5.41)?

15. 试证明，存在特征函数集时，求解格林函数的特征函数法和分段表示法这两种方法是等价的.意思是说，从一个表达式出发，可以推得另一个表达式.

16. 对于边值问题(6.5.30)，是否可以在角向上进行分段求解？若行，试求解之.

17. 对于圆内的亥姆霍兹方程边值问题(6.5.30)，用分段表示法求解当参数 k 恰好为特征值时的广义格林函数的解.

18. 用分段表示法求球内亥姆霍兹方程的格林函数

$$\nabla^2 G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'); r,r<a$$

$$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')|_{r=0}<\infty,\quad G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')|_{r=a}=0$$

19. 二维长方形内如下边值问题.

$$(\nabla^2+k^2)G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'),(0\le x,x'\le a;0\le y,y'\le b)$$

$$[\frac{\partial}{\partial x}G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')]|_{x=0}=[\frac{\partial}{\partial x}G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')]|_{x=a}=0,[\frac{\partial}{\partial y}G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')]|_{y=0}=[\frac{\partial}{\partial y}G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')]|_{y=b}=0$$

20. 求解环形区域的格林函数.

$$\nabla^2 G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'); a<r,r<b$$

$$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')|_{r=a}=G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')|_{r=b}=0$$

21. 我们已经计算了理想导体劈的散射(6.5.67)，其中的边界条件是，在劈尖表面上格林函数的值为零.这实际上是振动方向与平面垂直的电场受劈尖散射的分布.现在将边界条件修改如下.

$$(\nabla^2+k^2)G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}');\alpha<\theta<2\pi-\alpha$$

$$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')|_{r=0}<\infty\,,\quad [\frac{\partial}{\partial\theta}G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')]_{\theta=\alpha,2\pi-\alpha}=0$$

这实际上是振动方向与平面垂直的电场受劈尖散射的分布.请求解这一格林函数.

26. 求解边值问题，$\nabla^2\psi(\boldsymbol{r})=(4r^2-6)\mathrm{e}^{-r^2};\lim\limits_{r\to\infty}\psi(\boldsymbol{r})=0$. (提示：用(6.5.8). 答案：$\psi(\boldsymbol{r})=\mathrm{e}^{-r^2}$)

28. *RC* 电路中，电动势是 *E*，*C* 两端的电压是 *u*，电路中的电流是 *i*.*E*、电阻 *R* 和电容 *C* 是常量.电压 *u* 电流 *i* 和电容极板上的电荷量 *q* 是随时间而变化的.在此回路中有关系式，$-E+iR+u=0$；电流就是电容极板上电量的变化率，$i=\dfrac{dq}{dt}$；电容上的电压与电量的关系为，$u=\dfrac{q}{C}$；由以上三式得到

$$R\frac{dq}{dt}+\frac{q}{C}-E=0$$

设初始条件：当$t=0$时，$q=0$.用 6.7 节的方法求解之.

29 我们已经算得一阶微分方程齐次边界条件的格林函数是(6.7.10)式.若算子是自伴的，取最简单的自伴形式，$p(x)=-\mathrm{i},q(x)=0$.则当(6.7.6b)中的系数α和β满足什么样的条件，格林函数具有(6.4.7)式的对称性.(提示：一阶微分算子自伴的条件见第三章末尾.)