Chapter 8

Integral Equations

§8.1 积分方程的基础理论

8.1.1 积分方程的定义和分类

1. 积分方程的定义和分类

我们先叙述积分方程的定义和分类.

定义 1 对含有未知函数进行积分的方程称为**积分方程**. 如果积分方程中，只出现未知函数的一次项，则称为**线性积分方程**.否则称为**非线性积分方程**.

本章以下除非特别说明，把未知的函数都记为 f，其它的函数则都是已知的.

例 1 以下的几个方程都属于积分方程.

$$\int_0^1 f(y)\cos y\mathrm{d}y=1 \tag{8.1.1}$$

$$\int_0^y f(x)x^4\mathrm{d}x+\sin x=f(y) \tag{8.1.2}$$

$$\int_1^y f^2(x)\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=f(y) \tag{8.1.3}$$

上述例中，(8.1.1)和(8.1.2)是线性积分方程，(8.1.3)是非线性积分方程.显然，比较而言，线性积分方程更容易求解.

先给出积分方程分类.

定义 2 形如

$$\int_a^b k(x,y)f(y)\mathrm{d}y+g(x)=0 \tag{8.1.4}$$

$$\lambda\int_a^b k(x,y)f(y)\mathrm{d}y+g(x)=f(x) \tag{8.1.5}$$

$$\lambda\int_a^b k(x,y)f(y)\mathrm{d}y+g(x)=a(x)f(x) \tag{8.1.6}$$

的方程称为**弗雷德霍姆积分方程**.(8.1.4)，(8.1.5)和(8.1.6)分别称为**第一类，第二类和第三类弗雷德霍姆积分方程**.显然，弗雷德霍姆积分方程都是线性积分方程.

第一种方程一般不易求解.只能求解一些特例.有一个特例是大家所熟悉的：

$$g(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}xy}f(y)\mathrm{d}y \tag{8.1.7}$$

这正是未知函数的傅里叶变换.做傅里叶反变换就可求得未知函数的解.

$$f(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}yx}g(x)\mathrm{d}x \tag{8.1.8}$$

其它的例子有拉普拉斯变换与反变换，汉克尔变换与反变换，梅林变换与反变换等.

定义 3 形如

$$\int_a^x k(x,y)f(y)\mathrm{d}y+g(x)=0 \tag{8.1.9}$$

$$\lambda\int_a^x k(x,y)f(y)\mathrm{d}y+g(x)=f(x) \tag{8.1.10}$$

$$\lambda\int_a^x k(x,y)f(y)\mathrm{d}y+g(x)=q(x)f(x) \tag{8.1.11}$$

的方程分别称为**第一类，第二类和第三类沃尔泰拉积分方程**.

沃尔泰拉积分方程也都是线性积分方程.一般地，非线性的沃尔泰拉积分方程应有如下形式.

$$f(x)=g(x)+\int_a^x h(x,y,f(y))\mathrm{d}y \tag{8.1.12}$$

定义 4 上述线性积分方程中，$k(x,y)$称为积分方程的**核**，也称为**基本核**或**积分核**.在第二类和第三类积分方程中，函数$g(x)$称为方程的**自由项**.如果$g(x)$不恒等于零，方程称为**非齐次的**，如果$g(x)$处处为零则方程为**齐次的**.

在第一类沃尔泰拉积分方程(8.1.9)中，若$k(x,x)\neq 0$，$k(x,y)$和$g(x)$是连续的，则方程可变换成第二类沃尔泰拉积分方程(8.1.10)的形式.为此将方程(8.1.9)两边对 x 求导数，且除以$k(x,x)$，得到

$$f(x)+\int_a^x\frac{k_x(x,y)}{k(x,x)}f(y)\mathrm{d}y=\frac{-g'(x)}{k(x,x)}$$

这就是方程(8.1.10)的形式.其中$k_x(x,y)$中的下标x表示对x求偏导.

本章我们将主要研究形如(8.1.5)式的第二类弗雷德霍姆积分方程，包括非齐次和齐次积分方程的求解.也会讨论形如(8.1.10)式的第二类沃尔泰拉积分方程.有一节是专门讨论非线性沃尔泰拉方程(8.1.12)的求解技术.

积分方程有许多实际的应用.

2. 核函数的分类

以下是根据核函数的性质定义的一些概念.

定义 5 若核 $k(x,y)$ 在 $a \le x, y \le b$ 上是连续的，则称之为**连续核**.若 $k(x,y)$ 是平方可积的，即

$$\int_a^b \mathrm{d}x\rho(x)\int_a^b \mathrm{d}y\left|k(x,y)\right|^2 \rho(y) < \infty . \tag{8.1.13}$$

则称 $k(x,y)$ 是**平方可积核**，简称 L_2 **核**.其中将权函数明确写出，见(2.1.24).

本章以下所提到的核，如不特别说明，都是指 L_2 核.

定义 6 若核函数 $k(x,y)$ 满足

$$k(x,y) = k^*(y,x)$$

则称之为**厄米核**，也称为**共轭核**.常记：$k^*(y,x) = k^+(x,y)$.若核是实的，上式就简化为 $k(x,y) = k(y,x)$，称之为**对称核**.

定义 7 若核 $k(x,y)$ 可写成以下形式

$$k(x,y) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x)\chi_i^*(y) \tag{8.1.14}$$

则称 $k(x,y)$ 为**退化核**，或者**可分离核**，式(8.1.14)中的 n 称为核 $k(x,y)$ 的**秩**.因而此时的核也称为有限秩核.当 $n=1$ 时，上式简化为

$$k(x,y) = \varphi(x)\chi^*(y) \tag{8.1.15}$$

本章以下把式(8.1.14)的 $n \ne 1$ 的情况称为**有限秩核**，把最简单的情况式(8.1.15)称为**可分核**，两者总称为**退化核**.

定义 8 若核具有形式

$$k(x,y) = k(x-y)$$

则称相应的积分方程为**卷积型积分方程**.

当求解区域[a,b]是整个实轴或者特殊的区域时，可以用积分变换法来求解卷积型积分方程.

8.1.2 积分方程与微分方程的关系

不少求解微分方程的问题可以化为求解积分方程的问题.有的积分方程的问题则可以化为求解微分方程的问题.

1. 微分方程初值问题与积分方程的关系

考虑如下二阶微分方程的初值问题.

$$\begin{cases} y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \\ \quad y(a) = \alpha, y'(a) = \beta \end{cases} \tag{8.1.16}$$

其中 $p(x), q(x), f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的连续函数，并且 $p(x)$ 在 $[a,b]$ 上有连续导数.

对这一微分方程从 a 到 x 积分，

$$\int_a^x \mathrm{d}t y''(t) + \int_a^x \mathrm{d}t p(t)y'(t) + \int_a^x \mathrm{d}t q(t)y(t) = \int_a^x \mathrm{d}t f(t)$$

利用初值条件，有

$$y'(x) - \beta = -\int_a^x p(t)y'(t)\mathrm{d}t - \int_a^x q(t)y(t)\mathrm{d}t + \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$$

$$= -p(x)y(x) + p(a)\alpha - \int_a^x [q(t) - p'(t)]y(t)\mathrm{d}t + \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$$

其中对 y' 的项做了分部积分.将此式再积分一次，

$$y(x) - \alpha = \int_a^x \mathrm{d}t[\beta - p(t)y(t) + p(a)\alpha] - \int_a^x \mathrm{d}u \int_a^u \{[q(t) - p'(t)]y(t) - f(t)\}\mathrm{d}t$$

利用如下的分部积分

$$\int_a^x \mathrm{d}u \int_a^u f(t)\mathrm{d}t = \left[u\int_a^u f(t)\mathrm{d}t\right]_a^x - \int_a^x u\mathrm{d}u \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\int_a^u f(t)\mathrm{d}t$$

$$= x\int_a^x f(t)\mathrm{d}t - \int_a^x u f(u)\mathrm{d}u = \int_a^x (x-t)f(t)\mathrm{d}t$$

就得到：

$$y(x) = [p(a)\alpha + \beta](x-a) + \alpha - \int_a^x \mathrm{d}t p(t)y(t)$$

$$-\int_a^x \mathrm{d}t(x-t)\{[q(t) - p'(t)]y(t) - f(t)\}$$

$$= [p(a)\alpha + \beta](x-a) + \alpha + \int_a^x \mathrm{d}t(x-t)f(t)$$

$$+\int_a^x \mathrm{d}t\{(t-x)[q(t) - p'(t)] - p(t)\}y(t)$$

$$y(x) = g(x) + \int_a^x k(x,t)y(t)\mathrm{d}t \tag{8.1.17}$$

其中

$$k(x,t) = (t-x)[q(t) - p'(t)] - p(t) \tag{8.1.18a}$$

$$g(x) = \int_a^x (x-t)f(t)\mathrm{d}t + [p(a)\alpha + \beta](x-a) + \alpha \tag{8.1.18b}$$

式(8.1.17)与(8.1.10)的形式相同.反之，将(8.1.17)式微分两次，即可得到(8.1.16).因此，初值问题(8.1.16)与第二类沃尔泰拉积分方程(8.1.10)等价.

2. 微分方程边值问题与积分方程的关系

考虑如下二阶微分方程的两点边值问题.

$$\begin{cases} y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \\ \quad y(a) = \alpha, y(b) = \beta \end{cases} \tag{8.1.19}$$

在一定的条件下，边值问题(8.1.19)可等价于一个第二类弗雷德霍姆积分方程.

例 2 对于下列二阶微分方程的边值问题

$$\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}+\lambda f=0 \tag{8.1.20a}$$

$$f(0)=0,\ f(1)=0 \tag{8.1.20b}$$

其中λ是参数.这一微分方程可以转化为以下积分方程.

$$f(x)=\lambda\int_0^1 k(x,u)f(u)\mathrm{d}u \tag{8.1.21a}$$

$$k(x,u)=u(1-x)\theta(x-u)+x(1-u)\theta(u-x),0\le x,u\le 1 \tag{8.1.21b}$$

积分方程(8.1.21)和微分方程的边值问题(8.1.20)是完全等价的.我们可以来进行验证.这只要将核函数$k(x,u)$对x求导两次.

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}k(x,u)=-2\delta(x-u)-(x-u)\delta'(x-u)$$

利用$\delta(x)$函数的性质：$\delta(x)$函数是偶函数，$\delta'(x)$是奇函数，$\delta'(x)\ f(x)=-\delta(x)\ f'(x)$.$(x-u)\ \delta'(x-u)=-\delta(x-u)$.因此

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}k(x,u)=-2\delta(x-u)+\delta(x-u)=-\delta(x-u) \tag{8.1.22}$$

代入(8.1.21a)可知满足(8.1.20a)式.并且，本例中的$k(x,y)$实际上就是满足方程(8.1.22)的格林函数.可比较(8.1.21b)与(6.3.24).

式(8.1.21b)的核属于可分核，且是对称核，也是平方可积核.

本例中的(8.1.20a)式无非齐次项，所以转变为(8.1.21a)是第一类弗雷德霍姆积分方程.若(8.1.20a)式加上非齐次项，就转变为第二类弗雷德霍姆积分方程.

二阶微分方程(8.1.20a)的特点是不出现y的一阶导数项.更一般地，形如

$$\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}=\varphi(x,f(x)),\quad a\le x\le b \tag{8.1.23}$$

的二阶微分方程等价于如下的沃尔泰拉积分方程

$$f(x)=A+Bx+\int_a^x (x-u)\varphi(u,f(u))\mathrm{d}u \tag{8.1.24}$$

其中系数A和B由边界条件或者初值条件所决定.见习题.

3. 沃尔泰拉型积分方程化成微分方程

对于沃尔泰拉型积分方程(8.1.9)-(8.1.12)，两边对x求导，可以把积分方程变成微分方程.在原方程中令$x=a$可得到一初始条件.当核是一些比较特殊的形式时，这样的求解是比较简单的.

例 3 求解非线性积分方程

$$f(x)=\lambda\int_0^x [1+f^2(y)]\mathrm{d}y$$

解 两边对x求导，得到： $f'(x)=\lambda[1+f^2(x)]$

初始条件是： $f(0)=0$.解得： $f(x)=\tan(\lambda x)$

8.1.3 关于齐次积分方程的理论

与微分方程类似，可以先想办法找到齐次方程的解.然后来找相应的非齐次方程的解就比较容易一些了.

1. 雷德霍姆齐次积分方程

对于第二类弗雷德霍姆齐次积分方程，已经总结出下面一些结论.特别是对于厄米核，已经有比较清晰的理论.

定义 9 对于第二类弗雷德霍姆齐次积分方程

$$f(x)=\lambda\int_a^b \mathrm{d}y k(x,y)f(y)\rho(y)=\lambda(k^*,f). \tag{8.1.25}$$

若 $\lambda=\lambda_0$ 时，方程具有不恒等于零的解，则称 λ_0 为**方程的特征值**，也称之为**属于核** $k(x,y)$ **的特征值**.而方程对于

$$f(x)=\lambda_0\int_a^b \mathrm{d}y k(x,y)f(y)\rho(y)=\lambda_0(k^*,f)$$

的一切不恒等于零的解都称为属于λ_0的**特征函数**.

以下提到的特征值，都是相对于(8.1.25)式这样的齐次方程而言的，也就是属于核 $k(x,y)$ 的.

以下，我们提到的核函数、特征值、特征函数，都是指非零的.提到核函数与其它函数的变量，都是在 $[a,b]$ 区间内.例如， $k(x,y)$ 中的变量是 $a\le x,y\le b$.

定义 10 若 $\lambda=\lambda_i$ 是 $k(x,y)$ 的一个特征值，属于 λ_i 的线性无关的特征函数有 $f_{i,1}(x), f_{i,2}(x),\cdots, f_{i,m}(x)$，则称 λ_i 是 ***m* 重简并**的，m 称为特征值 λ_i 的**秩，**也称为 λ_i 的**简并度**.

定理 1 在λ平面的任意有限区域内，核 $k(x,y)$ 只存在有限个特征值.

定理 2 每一个特征值至少有一个属于它的特征函数，属于一个特征值的且是线性无关的特征函数的个数是有限的.

证明 设 λ_i 是 $k(x,y)$ 的一个特征值，属于 λ_i 的线性无关的归一化特征函数有 $f_{i,1}(x)$，$f_{i,2}(x)$，…， $f_{i,m}(x)$.对于其中第 j 个特征函数的特征方程是

$$f_{i,j}(x)=\lambda_i\int_a^b \mathrm{d}y k(x,y)f_{i,j}(y)\rho(y)=\lambda_i(k^*,f_{i,j})$$

改写成

$$\frac{f_{i,j}(x)}{\lambda_i}=a_j(x)=\int_a^b \mathrm{d}y k(x,y)f_{i,j}(y)\rho(y)$$

对于此式的理解是：把 x 固定后， $k(x,y)$ 看作是 y 的函数，将它用 λ_i 的特征函数 $f_{i,j}(x)$ 展开，

$$k(x,y)=\sum_j a_j(x) f_{i,j}(y)$$

那么展开系数就是 a_j.现在利用贝塞尔不等式(2.1.15)，应有

$$\sum_{j=1}^{m}\left|\frac{f_{i,j}(x)}{\lambda_i}\right|^2 \le \int_a^b \mathrm{d}y\left|k(x,y)\right|^2 \rho(y)\,. \tag{8.1.26}$$

已设特征函数是归一化的. 两边再对 x 积分，得到：

$$\frac{m}{|\lambda_i|^2} \le \int_a^b \mathrm{d}x\rho(x)\int_a^b \mathrm{d}y\left|k(x,y)\right|^2 \rho(y)\,. \tag{8.1.27}$$

因已知 $k(x,y)$ 是个 L_2 核，右边的积分有限.因此秩 m 有限.**证明完毕**.

定理 3 若 λ_0 是 $k(x,y)$ 的特征值，那么，λ_0 的复共轭 λ_0^* 就是属于 $k^*(y,x)$ 的特征值，即 λ_0^* 满足方程

$$f(x)=\lambda_0^*\int_a^b \mathrm{d}y k^*(y,x) f(y)\rho(x)=\lambda_0^*(k,f)$$

并且，属于 λ_0^* 的线性无关的特征函数的个数，与属于 λ_0 的线性无关的特征函数的个数是相同的.

以上三个定理都是弗雷德霍姆给出的，也称为弗雷德霍姆第一、第二、第三定理.这三个定理中，$k(x,y)$ 都是 L_2 核.

以下的定理是与厄米核有关的.

定理 4 若核 $k(x,y)$ 是 L_2 核且是厄米的，那么该核至少存在一特征值.

若核不是厄米的，则无此定理.

定理 5 若方程(8.1.25)的核是厄米的，那么

(i) 特征值是实数，

(ii) 属于不同特征值的特征函数是正交的.

证明

(i) 设 λ_i 是特征值，$f_i(x)$ 是属于 λ_i 的特征函数.那么，可写出特征值方程，

$$f_i(x)=\lambda_i\int_a^b \mathrm{d}y k(x,y) f_i(y)\rho(y)=\lambda_i(k^*,f_i)\,. \tag{8.1.28}$$

两边乘以 $f_i^*(x)\rho(x)$ 并积分.

$$\int_a^b |f_i(x)|^2\rho(x)\mathrm{d}x=\lambda_i\int_a^b \mathrm{d}x\int_a^b \mathrm{d}y k(x,y) f_i(y)\rho(y) f_i^*(x)\rho(x)$$

两边取复共轭，注意核是厄米的.

$$\int_a^b |f_i(x)|^2\rho(x)\mathrm{d}x=\lambda_i^*\int_a^b \mathrm{d}x\int_a^b \mathrm{d}y k^*(x,y) f_i^*(y)\rho(y) f_i(x)\rho(x)$$
$$=\lambda_i^*\int_a^b \mathrm{d}x\int_a^b \mathrm{d}y k(x,y) f_i^*(x)\rho(x) f_i(y)\rho(y)$$

后一步是将被积函数中的 x 和 y 交换.这两式相减得

$$(\lambda_i-\lambda_i^*)\int_a^b \mathrm{d}x\int_a^b \mathrm{d}y k(x,y) f_i^*(x) f_i(y)\rho(x)\rho(y)=0$$

肯定非0，可以证明

由于积分不恒等于零，因此，

$$\lambda_i - \lambda_i^* = 0$$

结论：特征值是实数.

(ii) 设特征函数 $f_i(x)$ 的特征方程如(8.1.28).另一特征值 λ_j 的特征方程是

$$f_j = \lambda_j(k^*, f_j) \tag{8.1.29}$$

从(8.1.28)得到

$$(f_i, f_j) = \lambda_i((k^*, f_i), f_j) \Rightarrow \lambda_j(f_i, f_j) = \lambda_i\lambda_j((k^*, f_i), f_j)$$

从(8.1.29)得到

$$(f_i, f_j) = \lambda_j(f_i,(k^*, f_j)) \Rightarrow . \lambda_i(f_i, f_j) = \lambda_i\lambda_j(f_i,(k^*, f_j))$$

注意两式的右边其实是相同的。可验证：

$$((k^*, f_i), f_j) = \int_a^b \mathrm{d}x f_j(x)\rho(x)[\int_a^b \mathrm{d}y k(x,y) f_i(y)\rho(y)]^*$$

$$= \int_a^b \mathrm{d}y f_i^*(y)\rho(y)\int_a^b \mathrm{d}x k(y,x) f_j(x)\rho(x) = (f_i,(k^*, f_j)),$$

此式相当于：$(Lf_i, f_j) = (f_i, L^+ f_j) = (f_i, Lf_j)$

其中已用到核函数是厄米的性质。两式相减

$$(\lambda_i - \lambda_j)(f_i, f_j) = 0 .$$

由于 $\lambda_i \neq \lambda_j$，故，

$$(f_i, f_j) = 0$$

结论：属于不同特征值的特征函数是相互正交的.**证明完毕**.

这一定理实际上是第二章 2.2 节定理 7 的推论在积分算子形式下的具体化.

不同的特征值可以有不同的秩.每一个特征值的秩到底是多少，与核的具体形式有关.每个对应于 λ_0 的特征函数都可以表示成 $f_1(x), f_2(x),\cdots, f_m(x)$ 的线性组合.这 m 个特征函数可以相互正交化.

对于一个核 $k(x,y)$ 的一切特征值，可以按照它们的绝对值不减次序排列成如下次序.

$$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_k,\cdots \quad (|\lambda_1| \le |\lambda_2| \le \cdots |\lambda_k| \le \cdots) \tag{8.1.30}$$

简记为序列 $\{\lambda_i\}$.任何特征值在序列 $\{\lambda_i\}$ 中出现的次数等于它的秩.一切特征函数可以按相应的次序排成序列

$$\{f_i(x)\}, i = 1,2,\cdots \tag{8.1.31}$$

假定所有特征函数都已经归一化.并假定属于同一个特征值的线性无关函数都已经相互正交化.

定义 11 式(8.1.30)的序列 $\{\lambda_i\}$ 和式(8.1.31)的特征函数序列 $\{f_i(x)\}$ 分别称为核 $k(x,y)$ 的**特**

征值序列和**特征函数系**，简称$\{\lambda_i\}$和$\{f_i(x)\}$为$k(x,y)$的**特征系**.

定理 6(核的特征函数系展开) 若核$k(x,y)$是L_2核且是厄米的，$\{\lambda_i\}$和$\{\psi_i(x)\}$分别是核的特征值和特征函数系，那么，核可以做下述展开.

$$k(x,y)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_i}\psi_i(x)\psi_i^*(y) \tag{8.1.34}$$

展开式平均收敛于$k(x,y)$.此式可与(6.1.14)式对照.

证明 如果λ_i和$\psi_i(x)$是$k(x,y)$的一个特征值及对应的特征函数，那么有(8.1.28)式.现在我们把$k(x,y)$用它的特征函数系展开.

$$k(x,y)=\sum_{i=1}^{\infty}c_i(x)\psi_i^*(y)$$

展开系数应该是

$$c_i(x)=\int_a^b k(x,y)\psi_i(y)\rho(y)\mathrm{d}y=\frac{\psi_i(x)}{\lambda_i}$$

因此，核就写成了(8.1.34)的形式.**证明完毕**.

从(8.1.34)式也可看出，若核是厄米的，则特征值一定是实数.

2. 沃尔泰拉齐次积分方程

第二和第三类沃尔泰拉齐次积分方程可以写成如下形式.

$$f(x)=\lambda\int_a^x k(x,y)f(y)\rho(y)\mathrm{d}y \tag{8.1.36}$$

方程(8.1.36)对于任何λ值都没有非零解，因此沃尔泰拉齐次积分方程没有特征值.这一结论我们将在 8.2.2 小节末尾自然而然地得到.

§8.2 线性积分方程的迭代技术

8.2.1 第二类弗雷德霍姆线性积分方程

1. 用算子表示第二类弗雷德霍姆积分方程

我们把(8.1.5)式改写为算子形式：

$$f=g+\lambda Kf \tag{8.2.1}$$

此处定义了一个算子K.当K作用在一个函数f上时，是以下的运算：

$$Kf\equiv\int_a^b k(x,y)f(y)\rho(y)\mathrm{d}y\equiv(k^*,f) \tag{8.2.2}$$

我们已在 7.4.1 小节的例 1 中知它是一个线性算子.若核$k(x,y)$是厄米的，则算子K就是厄米的.在式(8.2.2)中，我们把算子的作用效果写成了带权内积的形式.其中权函数可以看成是从上

一节中的核函数中分出来的一个因子.本节以下写的内积，都具有式(8.2.2)的含义. 并且总是设权函数在积分区间上不为负.

当写成算子形式之后，原来我们说的核$k(x,y)$的特征值λ_0，现在就可直接说成是算子 K 的特征值.这样特征值的角色就更加明显了.

我们把(8.2.1)式改写为

$$(I-\lambda K)f=g \tag{8.2.3}$$

其中 I 也是一个算子，它的作用效果为

$$If=(k_I,f) \tag{8.2.4}$$

它实质上并没有改变函数 $f(y)$.在这个意义上，I 可称为是单位算子. 其中的核函数应该是 $k_I(x,y)=\delta(x-y)/\rho(y)$.

如果能够计算$(I-\lambda K)^{-1}$，则

$$f=(I-\lambda K)^{-1}g \tag{8.2.5}$$

这时，我们就得到了解.

2. 诺依曼级数及其收敛条件

注意，(8.2.5)是形式上的写法.但是，形式上的写法也会带来某种好处.在上一章中，我们可以用定义算子的范数来刻画算子的大小.如果λK 是某种意义下的“小”的算子，则

$$(I-\lambda K)^{-1}=I+\lambda K+\lambda^2K^2+\cdots \tag{8.2.6}$$

我们已经要求当 K 作用在 V 中的任何元素上时产生 V 中的另一个元素，并且满足

$$K^2=KK, K^3=KK^2 \tag{8.2.7}$$

于是，当级数

$$f=g+\lambda Kg+\lambda^2K^2g+\lambda^3K^3g+\cdots \tag{8.2.8}$$

收敛时，它就是(8.2.1)式的解.按照算子 K 的定义式(8.2.2)可上式把明确写成如下形式

$$f(x)=g(x)+\lambda(k^*,g)+\lambda^2(k^*,(k^*,g))+\cdots \tag{8.2.9}$$

或者写成

$$f(x)=g_0(x)+\lambda g_1(x)+\lambda^2g_2(x)+\lambda^3g_3(x)+\cdots \tag{8.2.10}$$

其中

$$g_0(x)=g(x), \tag{8.2.11}$$

且

$$g_n(x)=(k^*,g_{n-1})=Kg_{n-1} \tag{8.2.12}$$

级数(8.2.8)看上去似乎从(8.2.6)的算子展开得到的，其实是从(8.2.1)通过反复迭代得到的。所以这一方法称为迭代法.下面我们集中讨论这个级数的收敛性问题.

$$
(k^*,(k^*,g))=\int_a^b \mathrm{d}x_2 k(x,x_1)\int_a^b \mathrm{d}x_2 k(x_1,x_2)g(x_2)
$$

$$
=\int_a^b \mathrm{d}x_2\int_a^b \mathrm{d}x_2 k(x,x_1)k(x_1,x_2)g(x_2)=(\int_a^b \mathrm{d}x_2 k^*(x,x_1)k^*(x_1,x_2),g)
$$

$$
=((k,k^*),g)=(k_2^*,g)
$$

定义 1 令 $k_1(x,x_1)=k(x,x_1)$

$$
k_n(x,x_1)=(k^*,k_{n-1}),(n=2,3,\cdots), \tag{8.2.13}
$$

称由此定义的各核函数为**叠核**，$k_n(x,x_1)$ 称为 $k(x,x_1)$ 的 ***n* 次叠核**.相应地，$k(x,x_1)$ 称为**基本核**.

若 $k(x,y)$ 是厄米的，则它的 n 次叠核 $k_n(x,y)$ 也是厄米的.利用叠核，可将式(8.2.12)表示为

$$
g_n(x)=(k_n^*,g) \tag{8.2.14}
$$

记

$$
R(x,y;\lambda)=\sum_{n=0}^{\infty}k_{n+1}(x,y)\lambda^n \tag{8.2.15}
$$

则方程(8.1.5)可写成

$$
f(x)=g(x)+\lambda(R,g) \tag{8.2.16}
$$

λ求

定义 2 级数 $\sum_{n=0}^{\infty}k_{n+1}(x,y)\lambda^n$ 称为**诺伊曼级数**，其和函数 $R(x,y;\lambda)$ 称为积分方程(8.1.5)的**预解核**.

由(8.2.15)出发，利用(8.2.13)，可得

$$
\lambda\int_a^b \mathrm{d}x_1 k(x,x_1)R(x_1,y;\lambda)\rho(x_1)=\lambda\int_a^b \mathrm{d}x_1 k(x,x_1)\sum_{n=0}^{\infty}k_{n+1}(x_1,y)\lambda^n\rho(x_1)
$$

$$
=\sum_{n=1}^{\infty}k_{n+1}(x,y)\lambda^n+k(x,y)-k(x,y)=\sum_{n=0}^{\infty}k_{n+1}(x,y)\lambda^n-k(x,y)
$$

$$
=R(x,y;\lambda)-k(x,y)
$$

$$
\lambda\int_a^b \mathrm{d}x_1 k(x_1,y)R(x,x_1;\lambda)\rho(x_1)=\lambda\int_a^b \mathrm{d}x_1\sum_{n=0}^{\infty}k_{n+1}(x,x_1)k(x_1,y)\lambda^n\rho(x_1)
$$

$$
=\sum_{n=1}^{\infty}k_{n+1}(x,y)\lambda^n+k(x,y)-k(x,y)=\sum_{n=0}^{\infty}k_{n+1}(x,y)\lambda^n-k(x,y)
$$

$$
=R(x,y;\lambda)-k(x,y)
$$

可见，预解核满足下面两个积分方程.

$$
R(x,y;\lambda)=k(x,y)+\lambda\int_a^b \mathrm{d}x_1 k(x,x_1)R(x_1,y;\lambda)\rho(x_1) \tag{8.2.17a}
$$

$$
R(x,y;\lambda)=k(x,y)+\lambda\int_a^b \mathrm{d}x_1 k(x_1,y)R(x,x_1;\lambda)\rho(x_1) \tag{8.2.17b}
$$

当预解核存在时，方程(8.1.5)的解就由(8.2.16)式给出.

诺伊曼级数是由数学家给出的名称，物理学家则称为**玻恩级数**，后一称呼是因为玻恩在研究量子力学的高能粒子受势场散射时得到了这一展开级数.

显然，有解的条件是，级数(8.2.8)必须是收敛的.下面研究级数(8.2.8)的收敛性.

我们设定如下两个条件.要求当 x 和 y 在 $[a,b]$ 中时 $|k(x,y)|$ 是有界的

$$\max_{x,y\in[a,b]}|k(x,y)|\rho(y)=M \tag{8.2.18}$$

并且积分

$$\int_a^b |g(x)|\mathrm{d}x=C \tag{8.2.19}$$

存在.

如果关于 $k(x,y)$ 和 $g(x)$ 的条件(8.2.18)和(8.2.19)成立，那么就可证明：加上下面的式(8.2.24)的条件之后，$\lim\limits_{N\to\infty}\sum\limits_{n=0}^{N}g_n(x)\lambda^n$ 是一致收敛于函数 $f(x)$ 的.下面先用归纳法证明，$\{g_n(x)\lambda^n\}$ 各项绝对值之和小于一个等比级数.即当 $n\geq 1$ 时，有

$$|g_n(x)|\leq CM[M(b-a)]^{n-1} \tag{8.2.20}$$

证明：当 $n=1$ 时，

$$\begin{aligned}|g_1(x)|&\leq\int_a^b|k(x,y)g(y)|\rho(y)\mathrm{d}y\\&\leq\int_a^b|k(x,y)|\cdot|g(y)|\rho(y)\mathrm{d}y\leq M\int_a^b|g(y)|\mathrm{d}y\leq MC\end{aligned} \tag{8.2.21}$$

假设当 $n=m-1$ 时式(8.2.20)成立，那么对于 $n=m$，

$$\begin{aligned}|g_m(x)|&\leq\int_a^b|k(x,y)g_{m-1}(y)|\rho(y)\mathrm{d}y\\&\leq MC[M(b-a)]^{m-2}\int_a^b|k(x,y)|\rho(y)\mathrm{d}y\leq MC[M(b-a)]^{m-1}\end{aligned} \tag{8.2.22}$$

于是(8.2.20)式得证.由此得到

$$\begin{aligned}&\left|f(x)-\sum_{n=0}^{N}g_n(x)\lambda^n\right|\leq|g_{N+1}(x)\lambda^{N+1}|+|g_{N+2}(x)\lambda^{N+2}|+\cdots\\&\leq MC\lambda\sum_{m=N}^{\infty}[M(b-a)]^m|\lambda|^m\leq MC[|\lambda|M(b-a)]^N\sum_{m=0}^{\infty}[|\lambda|M(b-a)]^m\end{aligned} \tag{8.2.23}$$

假如

$$|\lambda|M(b-a)<1 \tag{8.2.24}$$

则

$$\left|f(x)-\sum_{n=0}^{N}g_n(x)\lambda^n\right|\leq\frac{MC[|\lambda|M(b-a)]^N}{1-|\lambda|M(b-a)} \tag{8.2.25}$$

因此，当 N 趋于无穷时，$\sum\limits_{n=0}^{N}g_n(x)\lambda^n$ 是一致收敛于函数 $f(x)$. 收敛的速度与 $\lambda M(b-a)$ 的数值大小有关.还可以看到，条件(8.2.19)得到的 C 的数值，只是保证了式(8.2.25)右边是一个有限项，对于收敛的速度没有影响.

假如对于所有 y，$k(x,y)$ 对于 x 是连续的，且 $g(x)$ 是连续的，那么每一项由(8.2.12)式决

定的 $g_n(x)$ 都是连续的，则它的一致收敛和式也是连续的.于是可以得到

$$\begin{aligned}(I-\lambda K)f &= f-\lambda Kf=\sum_{n=0}^{\infty}g_n(x)\lambda^n-\lambda K\sum_{n=0}^{\infty}g_n(x)\lambda^n \\ &=g_0+\lambda g_1+\lambda^2 g_2+\cdots-\lambda K(g_0+\lambda g_1+\lambda^2 g_2+\cdots)\end{aligned} \tag{8.2.26}$$

结合(8.2.8)-(8.2.11)式，得到

$$(I-\lambda K)f=g_0=g \tag{8.2.27}$$

于是诺伊曼级数给出了问题的解.由于级数 $\sum_{n=0}^{N}g_n(x)\lambda^n$ 是随着 N 的不断增大逐步逼近解函数 $f(x)$ 的，上述迭代解法也称为**逐次逼近法**.

以上可以看出，要使诺伊曼级数收敛于方程的解，前提是有三个条件(8.2.18)，(8.2.19)和(8.2.24)时.但是最后一个条件(8.2.24)式的 $|\lambda|M<(b-a)^{-1}$ 并不是任何情况下都是必须的.有些情况下可以取消这个限制，诺伊曼级数仍可以收敛于方程的解.例如，假定核函数恰好有 $k(x,y)=\xi(x)\eta(y)$ 的形式，并且 $\int_a^b\xi(x)\eta(x)\rho(x)\mathrm{d}x=0$.将此条件代入(8.2.9)式可知

$$\begin{aligned}f(x)&=g(x)+\lambda\int_a^b\mathrm{d}x'\xi(x)\eta(x')g(x')\rho(x')\\&+\lambda^2\int_a^b\mathrm{d}x'\int_a^b\mathrm{d}x''\xi(x)\eta(x')\xi(x')\rho(x')\eta(x'')g(x'')\rho(x'')+\cdots\\&=g(x)+\lambda\int_a^b\xi(x)\eta(x')g(x')\rho(x')\mathrm{d}x'\end{aligned}$$

其中 $g_2(x)=0$，因而对于 $\lambda M(b-a)$ 的任何数值，级数总是绝对收敛的.

3. 有界线性变换下方程的解

现在我们用估计算子范数的办法对上述结论做更严格的证明.

考虑巴拿赫空间的 V 上的算子方程

$$f=g+\lambda Kf\,,\qquad g\in V \tag{8.2.28}$$

其中 K 是有界线性变换.此处的算子 K 也可以是一个一般的有界线性变换，不限于积分算子.由第七章可知，可以用范数来刻画一个算子的大小.如果方程(8.2.28)中算子 K 的范数满足如下条件

$$\|\lambda K\|<1. \tag{8.2.29}$$

我们就可以通过迭代构造序列

$$f_n=\sum_{m=0}^{n}\lambda^m K^m g \tag{8.2.30}$$

按式(8.2.8)来求解.

定理 1 方程(8.2.28)在条件(8.2.29)下有解 $f=\lim_{n\to\infty}\sum_{m=0}^{n}\lambda^m K^m g$，且这是唯一的解.

证明 第一步，证明$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{m=0}^{n}\lambda^m K^m g$是解.为此，先证明由(8.2.30)构造的序列$\{f_n\}$是一个柯西序列.因为$\nu>\mu$时，

$$\begin{aligned}\|f_\nu-f_\mu\|&=\left\|\sum_{m=\mu+1}^{\nu}\lambda^m K^m g\right\|\le\sum_{m=\mu+1}^{\nu}\|\lambda^m K^m\|\|g\|\le\|g\|\|\lambda K\|^{\mu+1}\sum_{m=0}^{\nu-\mu-1}\|\lambda K\|^m\\&\le\|g\|\|\lambda K\|^{\mu+1}\sum_{m=0}^{\infty}\|\lambda K\|^m=\|g\|\|\lambda K\|^{\mu+1}\left(1-\|\lambda K\|\right)^{-1}\end{aligned}\tag{8.2.31}$$

由于$(1-\|\lambda K\|)^{-1}$是有限数，所以把μ选得足够大，则$\|f_\nu-f_\mu\|$可以小于任何预先给定的数.因此$\{f_n\}$是一个柯西序列.

又因空间V是完备的，所以$f_n\to f$，由有界线性算子的连续性，$Kf_n\to Kf$.但是

$$\lambda Kf_n=\lambda K\sum_{m=0}^{n}\lambda^m K^m g=\sum_{m=1}^{n+1}\lambda^m K^m g=\sum_{m=0}^{n+1}\lambda^m K^m g-g=f_{n+1}-g$$

因此$(f_{n+1}-g)\to\lambda Kf$.其柯西序列的极限就是$f-g=\lambda Kf$.由此证明了f是原方程式(8.2.28)的解.

第二步，证明解的唯一性.假设有两个不同的解f_1和f_2，

$f_1=g+\lambda Kf_1$，$f_2=g+\lambda Kf_2$

可得

$\|f_1-f_2\|=\|\lambda K(f_1-f_2)\|\le\|\lambda K\|\cdot\|f_1-f_2\|$

因为$\|\lambda K\|<1$，所以$\|f_1-f_2\|=0$.由(8.2.30)式知，f_1和f_2是恒等的.因此，解是唯一的.**证明完毕**.

这一定理只是说明当$\|\lambda K\|<1$时级数(8.2.30)是收敛的.没有说$\|\lambda K\|>1$时级数(8.2.30)一定发散.因此$\|\lambda K\|<1$是充分条件而不是必要条件.

实际计算时，如果$\|\lambda K\|$足够小，只要取级数(8.2.30)的前面很少几项即可满足解的精度要求.

我们将以上的结论应用于一个特别重要的情形：平方可积空间.核$k(x,y)$是一个L_2核.

$$\int\rho(x)\mathrm{d}x\int\rho(y)\mathrm{d}y\left|k(x,y)\right|^2<\infty\tag{8.2.32}$$

设函数f属于平方可积空间L_2，$f\in L_2$.即

$$\int\left|f(y)\right|^2\rho(y)\mathrm{d}y<\infty\tag{8.2.33}$$

现在证明，由(8.2.2)式定义的积分算子K是把L_2中的任何一个元映射到L_2中的一个元的变换，只要条件(8.2.32)和(8.2.33)满足.由施瓦兹不等式(2.1.8)可知，

$$|(k,f)|^2 \le (k,k)(f,f)$$

所以

$$|Kf|^2 = |(k,f)|^2 \le (k,k)(f,f) \le \int |k(x,y)|^2 \rho(y)\mathrm{d}y \int |f(y)|^2 \rho(y)\mathrm{d}y$$

两边乘以 $\rho(x)$，再对 x 积分.

$$\int |Kf|^2 \rho(x)\mathrm{d}x \le \iint |k(x,y)|^2 \rho(y)\mathrm{d}y \rho(x)\mathrm{d}x \int |f(y)|^2 \rho(y)\mathrm{d}y < \infty \qquad (8.2.34)$$

其中用到条件(8.2.32)和(8.2.33).可见，函数 Kf 也是平方可积的，即 $Kf \in L_2$.

算子 K 的范数可如下来定义.一个函数 f 的范数的定义按照(7.2.3)式的赫尔德范数进行.并且我们取 2-范数：

$$\| f \| = \left(\int |f(y)|^2 \rho(y)\mathrm{d}y \right)^{1/2}$$

由此范数的定义，Kf 的范数就应该是：

$$\begin{aligned} \|Kf\|^2 &= \int \mathrm{d}x |Kf|^2 \rho(x) \\ &\le \int \rho(x)\mathrm{d}x \int \rho(y)\mathrm{d}y |k(x,y)|^2 \int \rho(y)\mathrm{d}y |f(y)|^2 \qquad (8.2.35) \\ &= \int \rho(x)\mathrm{d}x \int \rho(y)\mathrm{d}y |k(x,y)|^2 \|f\|^2 \end{aligned}$$

其中用了(8.2.34)式.由算子范数的定义式(7.4.6)，可知式(8.2.35)给出了 K 的范数的上限.

$$\|K\| \le \left[\int \rho(x)\mathrm{d}x \int \rho(y)\mathrm{d}y |k(x,y)|^2 \right]^{1/2} \qquad (8.2.36)$$

如果要求满足(8.2.29)式，就要求

$$|\lambda|^2 \int \rho(x)\mathrm{d}x \int \rho(y)\mathrm{d}y |k(x,y)|^2 < 1 \qquad (8.2.37)$$

满足此式，诺依曼级数就是收敛的，就可以运用级数展开法求积分方程的解.

4. 微观粒子受到有心势散射的问题

现在我们针对一个具体的例子，来讨论如何正确地估计积分算子的范数，以便寻找积分方程的解.

在量子力学中，一个微观粒子的波函数满足以下薛定谔方程.

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla_{\boldsymbol{r}}^2 \psi(\boldsymbol{r}) + V(\boldsymbol{r})\psi(\boldsymbol{r}) = E\psi(\boldsymbol{r}) \qquad (8.2.38a)$$

上式可改写成如下的形式.

$$(\nabla_{\boldsymbol{r}}^2 + \frac{2m}{\hbar^2}E)\psi(\boldsymbol{r}) = \frac{2m}{\hbar^2}V(\boldsymbol{r})\psi(\boldsymbol{r}) \qquad (8.2.38b)$$

相应的齐次方程为

$$(\nabla_{\boldsymbol{r}}^2 + \frac{2m}{\hbar^2}E)\varphi(\boldsymbol{r}) = 0 \qquad (8.2.38c)$$

如果一个格林函数满足的方程是

$$(\nabla_{\boldsymbol{r}}^2 + \frac{2m}{\hbar^2}E)G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = \delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') \qquad (8.2.38d)$$

那么原方程(8.2.38b)的解就可以写成如下形式

$$\psi(\boldsymbol{r})=\varphi(\boldsymbol{r})+\int G_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',E)V(\boldsymbol{r}')\psi(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\boldsymbol{r}' \tag{8.2.38e}$$

积分方程(8.2.38e)与微分方程(8.2.38b)完全等价，都是描述了三维空间中一个粒子在势场 $V(\boldsymbol{r})$ 中运动的情况.式(8.2.38d)的格林函数的解已知为

$$G_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',E)=-\frac{m}{2\pi\hbar^2}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}q|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} \tag{8.2.39}$$

其中定义了

$$q=\sqrt{2mE/\hbar^2} \tag{8.2.40}$$

式(8.2.38c)的解 $\varphi(\boldsymbol{r})$ 表示粒子在无势场的自由空间中的运动.对于束缚态($E<0$)，$\varphi(\boldsymbol{r})\equiv 0$，这时(8.2.40)的 q 取正虚部；而对于散射情形($E\geq 0$)，

$$\varphi(\boldsymbol{r})=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r}}$$

式(8.2.38e)明确写成

$$\psi(\boldsymbol{r})=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r}}-\int\frac{m}{2\pi\hbar^2}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}q|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}V(\boldsymbol{r}')\psi(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\boldsymbol{r}' \tag{8.2.41}$$

此时的 $\mathrm{Im}\,q=0$.方程(8.2.41)称为**李普曼-许温格方程**，它表示一个自由的粒子从无穷远处向势场附近运动，并且受到势场散射的情况.

积分方程(8.2.41)是个第二类弗雷德霍姆积分方程，其中的积分核为

$$k(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',E)=G_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',E)V(\boldsymbol{r}') \tag{8.2.42}$$

现在算子 K 的定义是

$$K\psi(\boldsymbol{r})=\int G_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',E)V(\boldsymbol{r}')\psi(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\boldsymbol{r}' \tag{8.2.43}$$

我们现在要估计这个算子的范数的上限，以确定在什么情况下积分方程(8.2.38e)是可以用级数展开法来求解的.

根据(8.2.36)式，算子 K 的范数的上限应该是

$$\|K\|^2\leq\int\mathrm{d}\boldsymbol{r}\int\mathrm{d}\boldsymbol{r}'\left|k(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',E)\right|^2=\int\mathrm{d}\boldsymbol{r}\int\mathrm{d}\boldsymbol{r}'\left|G_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',E)V(\boldsymbol{r}')\right|^2 \tag{8.2.44}$$

把(8.2.39)式代入.先把 q 的实部和虚部分开来， $q=\mathrm{Re}\,q+\mathrm{i}\,\mathrm{Im}\,q$.

$$\|K\|^2\leq\left(\frac{m}{2\pi\hbar^2}\right)^2\int\mathrm{d}\boldsymbol{r}\int\mathrm{d}\boldsymbol{r}'\frac{\mathrm{e}^{-2\,\mathrm{Im}\,q|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^2}\left|V(\boldsymbol{r}')\right|^2 \tag{8.2.45}$$

积分的体积元是 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}\equiv r^2\sin\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$.令 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{\rho}+\boldsymbol{r}'$，积分成为

$$\int\mathrm{d}\boldsymbol{\rho}\int\mathrm{d}\boldsymbol{r}'\frac{\mathrm{e}^{-2\rho\,\mathrm{Im}\,q}}{\rho^2}\left|V(\boldsymbol{r}')\right|^2=4\pi\int_0^\infty\mathrm{d}\rho\frac{\rho^2\mathrm{e}^{-2\rho\,\mathrm{Im}\,q}}{\rho^2}\int\mathrm{d}\boldsymbol{r}\left|V(\boldsymbol{r})\right|^2=4\pi\frac{1}{2\,\mathrm{Im}\,q}\int\mathrm{d}\boldsymbol{r}\left|V(\boldsymbol{r})\right|^2$$

因此

$$\|K\|^2 \le \frac{m^2}{2\pi\hbar^4 \operatorname{Im} q}\int |V(\boldsymbol{r})|^2 \, \mathrm{d}\boldsymbol{r} \tag{8.2.46}$$

对于 $\operatorname{Im} q \ne 0$，它是有限的.这对应于 E<0 的情形.也就是说，对于束缚态的问题，是完全可以求解薛定谔积分方程(8.2.38e)的.或者说，对于 $\operatorname{Im} q \ne 0$ 这个积分方程总是可以求解的.如果其中的一些参量，比如 m，q 等，选择得合适，就可以采用前面介绍的迭代解法.

式(8.2.46)表示，当 $\operatorname{Im} q = 0$，即能量 E>0 的散射问题时，算子 K 的范数没有上限，因而原积分方程无法求解.然而，我们已经知道，散射问题其实是可以求解的.而且散射问题是非常有意义的课题.对于散射问题，至少在某些条件下，用迭代法求解原积分方程是可以的，而不是像(8.2.46)显示的那样不能求解.

那么为什么会出现(8.2.46)的结果呢？我们来回顾积分算子的定义式(8.2.2)，其中有一个权函数 $\rho(x)$.当积分算子(8.2.43)中的核函数定义为式(8.2.42)时，我们已经选择了权函数 $\rho(x)=1$.实际上，权函数的选择可以有一定的任意性.选择不同的权函数，得到的范数值会不同.在以上的计算中，权函数为 1.这样做的时候，我们把 K 的范数的上限估计地过分了.

解决的办法是，在刚才的积分核中选择一个因子作为权函数.这相当于重新定义积分核.用新的积分核估算出来的范数的上限就没有(8.2.46)式这么大了.

现在我们重新来定义积分核

$$k_\rho(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',E) = G_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',E) \tag{8.2.47}$$

相应地，选择权函数如下，

$$\rho(\boldsymbol{r}) \equiv V(\boldsymbol{r}) \tag{8.2.48}$$

要求，在整个空间内 $V(r)$可以为零，但不能改变符号.这样一来，(8.2.43)式就写成如下的形式，

$$K\psi(\boldsymbol{r}) = \int G_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',E)\psi(\boldsymbol{r}')\rho(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\boldsymbol{r}' \tag{8.2.49}$$

由此式，算子并没有变化，但是核函数有了变化.积分算子是按照核函数来计算范数的.我们来估计这个新算子的范数的上限.按照式(8.2.36)，

$$\begin{aligned}\|K\|^2 &\le \int \mathrm{d}\boldsymbol{r}\,\rho(\boldsymbol{r})\int \mathrm{d}\boldsymbol{r}'\rho(\boldsymbol{r}')\left|G_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',E)\right|^2 \\ &= \left(\frac{m}{2\pi\hbar^2}\right)^2\int \mathrm{d}\boldsymbol{r}\int \mathrm{d}\boldsymbol{r}' V(\boldsymbol{r})V(\boldsymbol{r}')\frac{\mathrm{e}^{-2\operatorname{Im} q|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^2}\end{aligned} \tag{8.2.50}$$

如果是有心势，那么 $V(\boldsymbol{r}) = V(r)$ 做具体的计算时，可做如下的积分变换.令 $s = r + r', t = r - r', u = |\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|$，以及 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}\mathrm{d}\boldsymbol{r}' = \pi^2(s^2 - t^2)u\mathrm{d}s\mathrm{d}t\mathrm{d}u$，可得

$$\|K\|^2 \le \left(\frac{m}{2\hbar^2}\right)^2\int_0^\infty \mathrm{d}s\int_0^s \mathrm{d}u\int_{-u}^u \mathrm{d}t(s^2-t^2)\frac{e^{-2u\operatorname{Im} q}}{u}V(r)V(r') \tag{8.2.51}$$

举例来说，对于汤川势 $V(r) = g^2\mathrm{e}^{-\mu r}/r$，

$$V(r)V(r') = g^4\frac{\mathrm{e}^{-\mu(r+r')}}{rr'} = 4g^4\frac{\mathrm{e}^{-\mu s}}{s^2-t^2}$$

可以计算得

$$\|K\|^2 \le (\frac{m}{2\hbar^2})^2\int_0^\infty \mathrm{d}s\int_0^s \mathrm{d}u\int_{-u}^u \mathrm{d}t(s^2-t^2)\frac{\mathrm{e}^{-2u\,\mathrm{Im}\,q}}{u}4g^4\frac{\mathrm{e}^{-\mu s}}{s^2-t^2}$$
$$=(\frac{g^2m}{\hbar^2})^2\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\mu s}\mathrm{d}s\int_0^s\frac{\mathrm{e}^{-2u\,\mathrm{Im}\,q}}{u}\mathrm{d}u\int_{-u}^u\mathrm{d}t$$
$$=2(\frac{g^2m}{\hbar^2})^2\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\mu s}\mathrm{d}s\int_0^s \mathrm{e}^{-2u\,\mathrm{Im}\,q}\mathrm{d}u=(\frac{g^2m}{\hbar^2})^2\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\mu s}\mathrm{d}s\frac{1-\mathrm{e}^{-2s\,\mathrm{Im}\,q}}{\mathrm{Im}\,q}$$
$$=(\frac{g^2m}{\hbar^2})^2\frac{1}{\mathrm{Im}\,q}(\frac{1}{\mu}-\frac{1}{\mu+2\,\mathrm{Im}\,q})=(\frac{g^2m}{\hbar^2})^2\frac{1}{\mathrm{Im}\,q}\frac{1}{\mu}\frac{2\,\mathrm{Im}\,q}{\mu+2\,\mathrm{Im}\,q}$$
$$=(\frac{g^2m}{\hbar^2})^2\frac{1}{\mu^2}\frac{2}{1+2\,\mathrm{Im}\,q/\mu}$$

$$\|K\|\le\left[\frac{2}{1+2\,\mathrm{Im}(q/\mu)}\right]^{1/2}\frac{mg^2}{\mu\hbar^2} \tag{8.2.52}$$

当 $E>0$ 时，$\|K\|\le\sqrt{2}\frac{mg^2}{\mu\hbar^2}$.当 g 足够小时，使得 $\|K\|<1$，就可以进行原积分方程(8.2.38e)式的迭代求解.

积分(8.2.50)的结果与(8.2.45)是不同的.这是改变积分核之后的结果.因此，同一个积分，可以选择不同的积分核.本例的要点是将(8.2.45)的积分换成了(8.2.50)的积分.这种重新定义积分核，或者说，重新定义权函数的方法，称为**权函数方法**.

8.2.2 第二类沃尔泰拉线性积分方程

我们来看沃尔泰拉型积分方程(8.1.10)式.此时算子 K 的作用与(8.2.2)式稍有不同.应该是

$$Kf=\int_a^x k(x,y)f(y)\rho(y)\mathrm{d}y$$

这一算子仍然满足线性性质.它的核 $k(x,y)$ 在满足条件(8.2.18)之后，任何情况下都不需要 $\lambda M<(b-a)^{-1}$ 的限制了.如果

$$f(x)=\tilde{g}_0(x)+\lambda\tilde{g}_1(x)+\lambda^2\tilde{g}_2(x)+\cdots \tag{8.2.53}$$

其中

$$\tilde{g}_0(x)\equiv g(x) \tag{8.2.54}$$

且

$$\tilde{g}_n(x)=\int_a^x k(x,y)\tilde{g}_{n-1}(y)\rho(y)dy \quad a\le x\le b \tag{8.2.55}$$

当 $n=1$ 时，

$$|\tilde{g}_1(x)|\le\int_a^x|k(x,y)\tilde{g}_0(y)|\rho(y)\mathrm{d}y\le\int_a^x|k(x,y)|\rho(y)|\tilde{g}_0(y)|\mathrm{d}y\le M\int_a^b|\tilde{g}_0(y)|\mathrm{d}y=MC$$

此处我们把积分上限扩展至 b，并用到(8.2.18)和(8.2.19)式.从 $n=2$ 开始，就不需要扩展积分上限了.

$$\left|\tilde{g}_2(x)\right| \le \int_a^x \left|k(x,y)\right| \rho(y) \left|\tilde{g}_1(y)\right| \mathrm{d}y \le M \int_a^x \left|\tilde{g}_1(y)\right| \mathrm{d}y \le M \int_a^x MC\mathrm{d}y = MC[M(x-a)]$$

容易证明，当 $n \ge 2$ 时，

$$\begin{aligned} \left|\tilde{g}_n(x)\right| &\le \int_a^x \left|k(x,y)\right| \rho(y) \left|\tilde{g}_{n-1}(y)\right| \mathrm{d}y \le M \int_a^x \left|\tilde{g}_{n-1}(y)\right| \mathrm{d}y \\ &\le M \int_a^x MC \frac{[M(y-a)]^{n-2}}{(n-2)!} \mathrm{d}y = MC \frac{[M(x-a)]^{n-1}}{(n-1)!} \end{aligned} \tag{8.2.56}$$

因此，当 $\lambda M(b-a)$ 取任何值时，诺伊曼级数都是收敛的，即诺伊曼级数总是给出沃尔泰拉方程的解.

只要将是(8.2.13)中的积分上限 b 改成 x，就得到沃尔泰拉积分方程的叠核.预解核的形式仍然是(8.2.15)式.将(8.2.17)中的积分上限 b 改成 x，就得到用预解核表示的沃尔泰拉积分方程.

式(8.2.56)表明，积分方程(8.1.10)的诺伊曼级数总是收敛的，即诺伊曼级数总是给出沃尔泰拉方程的解.而这个级数是从(8.2.54)式开始迭代的.当 $g(x)=0$ 时，这个级数只能是零.因而，相应的齐次方程

$$f(x) = \lambda \int_a^x k(x,y) f(y) \rho(y) \mathrm{d}y$$

没有非零解.这就是我们在 8.1.3 小节末尾已经给出的结论：沃尔泰拉齐次积分方程没有特征值.

本小节的推证过程归结为以下定理.

定理 2 第二类沃尔泰拉非齐次积分方程在式(8.2.18)和(8.2.19)的条件下，对于一切 λ 值，形如(8.2.53)式的近似解序列是一致收敛的，它的极限函数就是方程的解，并且解是唯一的.

对于解的唯一性，很容易证明.设 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$ 都是方程的解，那么 $f_1(x)-f_2(x)$ 满足第二类沃尔泰拉齐次积分方程，这个方程只有零解.

§8.3 非线性方程的迭代技术

本节我们来考虑非线性的沃尔泰拉积分方程(8.1.12)

$$f(x) = g(x) + \int_a^x h(x,y,f(y))\mathrm{d}y \tag{8.3.1}$$

的求解问题.在一定的条件下，可以有类似于前面处理线性问题的迭代方法.

8.3.1 迭代步骤

设

$$f_0(x) = g(x) \tag{8.3.2}$$

逐次迭代得

$$f_n(x) = g(x) + \int_a^x h(x,y,f_{n-1}(y))\mathrm{d}y \tag{8.3.3}$$

若是线性方程的特例，$h(x,y,f(y)) = k(x,y)f(y)$，式(8.3.3)简化为

$$f_n = \sum_{m=0}^{n} K^m g$$

这是(8.2.30)的形式.

对于一般的非线性方程，如果我们希望用(8.3.3)的方式进行迭代求解，就要看在什么条件下这样的迭代是收敛的.

我们的基本条件是：对于任意函数 $f(x)$，当

$$\left| f(y)-g(y)\right| \le \Delta, y\in[a,b] , \tag{8.3.4}$$

则在方形区域

$$a\le x\le b, a\le y\le b \tag{8.3.5}$$

中，有

$$\left|h(x,y,f(y))\right|\le M \tag{8.3.6}$$

现在进行一次迭代.从(8.3.2)式出发，可得

$$f_1(x)=g(x)+\int_a^x h(x,y,f_0(y))\mathrm{d}y=g(x)+\int_a^x h(x,y,g(y))\mathrm{d}y$$

因为

$$\left| f_0(y)-g(y)\right| =0<\Delta , \tag{8.3.7}$$

所以可以推得

$$\left| f_1(x)-g(x)\right| =\left| f_1(x)-f_0(x)\right| \le \int_a^x \left| h(x,y,f_0(y))\right| \mathrm{d}y\le M(x-a) \tag{8.3.8}$$

下一步，需要考虑

$$\left| f_1(y)-g(y)\right| \le \Delta, y\in[a,b] \tag{8.3.9}$$

是否成立.由(8.3.8)知，当 $\Delta=M(y-a)$，或者当 $y=\Delta/M+a$ 时，(8.3.9)是成立的.事实上，因为 y 的积分上限是 x，$a\le y\le x$，当 $x\le\Delta/M+a$ 时，(8.3.9)也都成立：

$$\begin{aligned}&\left| f_1(x)-f_0(x)\right| \le \int_a^{\Delta/M+a} \left| h(x,y,f_0(y))\right| \mathrm{d}y\\ &\le \int_a^{\Delta/M+a} M\mathrm{d}y=M(\Delta/M+a-a)=\Delta\end{aligned} \tag{8.3.10}$$

因此，$y\le\Delta/M+a$ 时，(8.3.9)也都成立.

我们限制变量范围，使得

$$a\le x\le(\Delta/M)+a, a\le y\le(\Delta/M)+a \tag{8.3.11}$$

在这个区域内，(8.3.10)是总是成立的.如果 $\Delta/M+a\ge b$，(8.3.11)式与(8.3.5)是没有矛盾，也就没有必要设(8.3.11)的限制.

在满足(8.3.9)的条件下，考虑

$$f_2(x)\equiv g(x)+\int_a^x h(x,y,f_1(y))\mathrm{d}y$$

既然在 $a\le x\le(\Delta/M)+a$ 时，有 $\left| f_1(x)-g(x)\right| \le\Delta$，那么，

$$\left| f_2(x)-g(x)\right| =\int_a^x h(x,y,f_1(y))\mathrm{d}y\le M(x-a)\le\Delta \tag{8.3.12}$$

对于第 n 步迭代(8.3.3)式，由于(8.3.6)式满足，我们总有

$$\left|f_n(x)-g(x)\right| \le \int_a^x |h(x,y,f_{n-1}(y))|\,\mathrm{d}y \le M(x-a) \le \Delta . \tag{8.3.13}$$

也就是说，第 n 次迭代的结果与 $g(x)$ 的差是在一个确定的范围内.

要得到方程的解，还要看这样迭代的结果是否收敛.这要求，当 n 足够大时， f_n 和 f_{n-1} 要非常接近.

8.3.2 李普希兹条件

现在我们加上一个条件：存在某个有限数 N，使每当

$$\left|\phi(y)-g(y)\right| \le \Delta, \quad \left|\psi(y)-g(y)\right| \le \Delta \tag{8.3.14}$$

时，

$$\left|h(x,y,\phi(y))-h(x,y,\psi(y))\right| \le N\left|\phi(y)-\psi(y)\right| \tag{8.3.15}$$

这个要求称为**李普希兹条件**.

对于目前的情况，把李普希兹条件写成如下更为明确的形式.就是，每当

$$\left|f_n(y)-g(y)\right| \le \Delta, \quad \left|f_{n-1}(y)-g(y)\right| \le \Delta \tag{8.3.16}$$

时，应有

$$\left|h(x,y,f_n(y))-h(x,y,f_{n-1}(y))\right| \le N\left|f_n(y)-f_{n-1}(y)\right| \tag{8.3.17}$$

因为有(8.3.9)和(8.3.7)，$\left|f_1(y)-g(y)\right| \le \Delta$ 和 $\left|f_0(y)-g(y)\right| = 0 < \Delta$.由李普希兹条件得到

$$\left|f_2(x)-f_1(x)\right| \le N\int_a^x \left|f_1(y)-f_0(y)\right|\mathrm{d}y$$

但是 $\left|f_1(y)-f_0(y)\right| = \left|f_1(y)-g_0(y)\right| \le \Delta$ ，所以

$$\left|f_2(x)-f_1(x)\right| \le N\Delta(x-a)$$

又因为(8.3.13)式，$\left|f_2(x)-g(x)\right| \le \Delta$ ，所以

$$\left|f_3(x)-f_2(x)\right| \le N\int_a^x \left|f_2(y)-f_1(y)\right|\mathrm{d}y \le N\int_a^x N\Delta(y-a)\mathrm{d}y = \frac{1}{2!}\Delta N^2(x-a)^2$$

如此进行下去.在第 n 步时，因为 $\left|f_n(x)-g(x)\right| \le \Delta$ ，可得

$$\left|f_n(x)-f_{n-1}(x)\right| \le N\int_a^x \left|f_{n-1}(y)-f_{n-2}(y)\right|\mathrm{d}y$$

$$\le N\int_a^x \frac{\Delta N^{n-2}(y-a)^{n-2}}{(n-2)!}\mathrm{d}y = \frac{\Delta N^{n-1}(x-a)^{n-1}}{(n-1)!}$$

此式可改写成

$$\left|f_n(x)-f_{n-1}(x)\right| \le \frac{\Delta}{(n-1)!}\left(\frac{\Delta N}{M}\right)^{n-1} \tag{8.3.18}$$

因此对于所有 $x \in [a,(\Delta/M)+a]$，当 $n \to \infty$ 时，$\left|f_n(x)-f_{n-1}(x)\right|$ 一致趋于零.

最后证明 $f_n(x)$ 趋于方程(8.3.1)的解.令

$$f_\nu(x)=f_0(x)+\sum_{n=1}^{\nu}[f_n(x)-f_{n-1}(x)]$$

当 $x\in[a,(\Delta/M)+a]$ 时，和式中的每一项由(8.3.18)式控制.因此当 $\nu\to\infty$ 时，$f_\nu(x)$ 收敛于一个函数 $f_\infty(x)$，

$$\lim_{\nu\to\infty} f_\nu(x)=f_\infty(x) \tag{8.3.19}$$

这个函数 $f_\infty(x)$ 就是方程(8.3.1)的解.证明如下.

$$\begin{aligned}f_\nu(x)&=g(x)+\int_a^x h(x,y,f_{\nu-1}(y))\mathrm{d}y\\&=g(x)+\int_a^x h(x,y,f(y))\mathrm{d}y+\int_a^x[h(x,y,f_{\nu-1}(y))-h(x,y,f(y))]\mathrm{d}y\end{aligned}$$

当 $\nu\to\infty$ 时，左边取极限就是(8.3.19)式.

$$f_\infty(x)=g(x)+\int_a^x h(x,y,f(y))\mathrm{d}y+\lim_{\nu\to\infty}R_\nu$$

其中

$$R_\nu=\int_a^x[h(x,y,f_{\nu-1}(y))-h(x,y,f(y))]\mathrm{d}y$$

运用李普希兹条件得到

$$\begin{aligned}&|R_\nu|\le N\int_a^x|f_{\nu-1}(y)-f(y)|\mathrm{d}y=N\int_a^x\left|\sum_{n=\nu}^{\infty}[f_n(y)-f_{n-1}(y)\right|]\mathrm{d}y\\&\le N\Delta\sum_{n=\nu}^{\infty}\frac{N^{n-1}}{(n-1)!}\int_a^x(y-a)^{n-1}\mathrm{d}y\\&\le\Delta\sum_{n=\nu}^{\infty}\frac{N^n(x-a)^n}{n!}\le\Delta\sum_{n=\nu}^{\infty}\left(\frac{N\Delta}{M}\right)^n\frac{1}{n!}\end{aligned}$$

当 $\nu\to\infty$ 时，它一致趋于零.因此

$$f_\infty(x)=g(x)+\int_a^x h(x,y,f(y))\mathrm{d}y$$

即(8.3.19)式得到的函数的确是方程的解，$f_\infty(x)=f(x)$.

从上面的求解过程可以看出，问题的关键在于求出满足假设的条件：①迭代条件(8.3.4)-(8.3.6)式.即，每当 $|f(y)-g(y)|\le\Delta$，有 $|h(x,y,f(y))|\le M$.②收敛条件即李普希兹条件：每当 $|\phi(y)-g(y)|\le\Delta$，以及 $|\psi(y)-g(y)|\le\Delta$ 时，$|h(x,y,\phi(y))-h(x,y,\psi(y))\le N|\phi(y)-\psi(y)|$.要预先给定Δ、$M$ 与 N，其中收敛区域由 Δ/M 控制，收敛速度与 Δ/M 和李普希兹条件中的常数 N 有关.由(8.3.18)知，Δ/M 和 N 的数值越小，则收敛速度越快.

8.3.3 利用收缩的概念

利用第二章 2.2.1 小节中定理 1 和收缩的概念来叙述本节以上的内容，会显得相当简洁.将(8.3.1)式右边看成是一个算子 T 作用在 f 上的结果：

$$Tf(x)=g(x)+\int_a^x h(x,y,f(y))\mathrm{d}y \tag{8.3.20}$$

那么，(8.3.1)式就是

$$f(x)=Tf(x)$$

正是(2.2.3)的形式.容易得到

$$|Tf-Tp|=|\int_a^x h\ (x,y,f(y))\ \mathrm{d}y-\int_a^x h\ (x,y,p(y))\ \mathrm{d}y|$$

$$\le\int_a^x \mathrm{d}y\,|h(x,y,f(y))-h(x,y,p(y))|$$

运用李普希兹条件(8.3.15)式，

$$|Tf-Tp|\le\int_a^x \mathrm{d}y\,N|f-p|\le N(x-a)\max_{a\le x,y\le b}|f-p|$$

在 $x\in[a,b]$ 上此不等式都成立.定义距离 $\rho(f,p)=\max\limits_{a\le x,y\le b}|f-p|$，那么

$$\rho(Tf,Tp)\le N(x-a)\rho(f,p)$$

当 $N(x-a)\le N(b-a)<1$ 时，由(8.3.20)式定义的算子 T 就是一个收缩.即使此条件不满足，我们可以将算子再作用一次，并利用李普希兹条件，得到

$$\rho(T^2f,T^2p)\le\int_a^x \mathrm{d}yN|Tf-Tp|\le N\int_a^x \mathrm{d}yN(y-a)\le N^2\frac{(x-a)^2}{2}\rho(f,p)$$

不断如此进行，可得到

$$\rho(T^mf,\ T^mp)\le N^m\frac{(x-a)^m}{m!}\rho(f,p)\le N^m\frac{(b-a)^m}{m!}\rho(f,p)$$

可见，只要选择 m 足够大，总可以使

$$N^m\frac{(b-a)^m}{m!}<1$$

从而算子 $T^m=S$ 是一个收缩: $\rho(Sf,Sp)\le N^m\dfrac{(b-a)^m}{m!}\rho(f,p)$.可见，只要李普希兹条件(8.3.15)式得到满足，非线性的沃尔泰拉积分方程总是可以利用迭代法求得收敛解.

8.3.4 弹簧的非谐振动

例 1 非简谐的弹簧所约束的质点.势能是

$$V(x)=\frac{1}{2}kx^2+\frac{1}{3}ax^3$$

其中 a 是一个小的正常数.

$$f=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}V(x)=-kx-ax^2$$

运动方程$m\ddot{x}+kx+ax^2=0$，或者

$$\ddot{x}+\omega_0^2 x=-\varepsilon x^2$$

其中：$\omega_0^2=k/m$，$\varepsilon=a/m>0$

算子$\mathrm{d}^2/\mathrm{d}t^2+\omega_0^2$在单点边界条件下的格林函数见(6.3.15)式，

$$G(t,t')=\frac{1}{\omega_0}\sin[\omega_0(t-t')]\theta(t-t')$$

初始时刻$t=0$时的边界条件

$$x(0)=x_0>0,\quad \dot{x}(0)=0$$

没有非线性项时的解为$x_0\cos\omega_0 t$.可得有非线性项时的解

$$x(t)=x_0\cos\omega_0 t-\int_0^t\frac{1}{\omega_0}\sin\omega_0(t-t')\varepsilon x^2(t')\mathrm{d}t'$$

可参看式(6.3.12)或者式(6.1.4).

现在设$\varDelta=x_0$.迭代条件要求

$$|x(t)-x_0\cos\omega_0 t|<x_0 \tag{8.3.21}$$

对于此题，我们有

$$h(t,t',x(t'))=-\frac{\varepsilon}{\omega_0}\sin\omega_0(t-t')x^2(t')$$

显然

$$|h(t,t',x(t'))|\le\frac{\varepsilon}{\omega_0}x^2(t') \tag{8.3.22}$$

对照(8.3.6)式，$M=4\varepsilon x_0^2/\omega_0$.将(8.3.22)式改写成如下形式，

$$\begin{aligned}\left|h(t,t',x(t'))\right|&\le(\varepsilon/\omega_0)[x(t')-x_0\cos\omega_0 t'+x_0\cos\omega_0 t']^2\\&\le(\varepsilon/\omega_0)[|x(t')-x_0\cos\omega_0 t'|+x_0|\cos\omega_0 t'|]^2\end{aligned}$$

对于满足(8.3.21)式的所有时间变量，有

$$\left|h(t,t',x(t'))\right|<4\varepsilon x_0^2/\omega_0$$

利用(8.3.22)式得到

$$\left|h(t,t',x(t'))-h(t,t',\xi(t'))\right|\le(\varepsilon/\omega_0)|x(t')+\xi(t')|\cdot|x(t')-\xi(t')|$$

此式改写成如下形式

$$\begin{aligned}&\left|h(t,t',x(t'))-h(t,t',\xi(t'))\right|\\&\le(\varepsilon/\omega_0)\left|x(t')-x_0\cos\omega_0 t'+\xi(t')-x_0\cos\omega_0 t'+2x_0\cos\omega_0 t'\right|\cdot\left|x(t')-\xi(t')\right|\end{aligned}$$

对于满足$\left|x(t')-x_0\cos\omega_0 t'\right|\le x_0$和$\left|\xi(t')-x_0\cos\omega_0 t'\right|\le x_0$的所有 t 和 t'，有

$$\left|h(t,t',x(t'))-h(t,t',\xi(t'))\right|\le(4\varepsilon x_0/\omega_0)\left|x(t')-\xi(t')\right|$$

对照李普希兹条件(8.3.15)式， $N=4\varepsilon x_0/\omega_0$.因此我们得到了迭代求解收敛的三个控制参量

$$\Delta=x_0,\quad M=4\varepsilon x_0^2/\omega_0,\quad N=4\varepsilon x_0/\omega_0.$$

令 $\delta=\varepsilon x_0/\omega_0^2$.下面进行迭代，令 $x_0(t)=x_0\cos\omega_0 t$ 可得

$$x_1(t)=x_0\cos\omega_0 t-\frac{\varepsilon}{\omega_0}\int_0^t\sin\omega_0(t-t')x_0^2(t')\mathrm{d}t' \tag{8.3.23a}$$

其中的积分为

$$\begin{aligned}
&\int_0^t\sin\omega_0(t-t')\cos^2\omega_0 t'\mathrm{d}t'\\
&=\int_0^t(\sin\omega_0 t\cos\omega_0 t'-\cos\omega_0 t\sin\omega_0 t')\cos^2\omega_0 t'\mathrm{d}t'\\
&=\sin\omega_0 t\int_0^t\cos\omega_0 t'(1-\sin^2\omega_0 t')\mathrm{d}t'-\cos\omega_0 t\int_0^t\sin\omega_0 t'\cos^2\omega_0 t'\mathrm{d}t'\\
&=\sin\omega_0 t\left(\frac{\sin\omega_0 t'}{\omega_0}-\frac{\sin^3\omega_0 t'}{3\omega_0}\right)_0^t+\cos\omega_0 t\left(\frac{\cos^3\omega_0 t'}{3\omega_0}\right)_0^t\\
&=\sin\omega_0 t\left(\frac{\sin\omega_0 t}{\omega_0}-\frac{\sin^3\omega_0 t}{3\omega_0}\right)+\cos\omega_0 t\left(\frac{\cos^3\omega_0 t}{3\omega_0}-\frac{1}{3\omega_0}\right)\\
&=\frac{\sin^2\omega_0 t}{\omega_0}-\frac{\cos\omega_0 t}{3\omega_0}-\frac{(\sin^2\omega_0 t+\cos^2\omega_0 t)(\sin^2\omega_0 t-\cos^2\omega_0 t)}{3\omega_0}\\
&=\frac{1-\cos 2\omega_0 t}{2\omega_0}+\frac{\cos 2\omega_0 t-\cos\omega_0 t}{3\omega_0}=\frac{1}{\omega_0}\left(-\frac{1}{6}\cos 2\omega_0 t-\frac{1}{3}\cos\omega_0 t+\frac{1}{2}\right)\\
&=\frac{1}{3\omega_0}(\sin^2\omega_0 t-\cos\omega_0 t+1)
\end{aligned}$$

得到

$$\begin{aligned}
x_1(t)&=x_0[\cos\omega_0 t+\delta(\frac{1}{6}\cos 2\omega_0 t+\frac{1}{3}\cos\omega_0 t-\frac{1}{2})]\\
&=x_0[\cos\omega_0 t+\frac{\delta}{3}(-\sin^2\omega_0 t+\cos\omega_0 t-1)\\
&=(1+\frac{\delta}{3})x_0(t)-\frac{\delta x_0}{3}(1+\sin^2\omega_0 t)
\end{aligned} \tag{8.3.23b}$$

再计算下一级.

$$x_2(t)=x_0\cos\omega_0 t-\frac{\varepsilon}{\omega_0}\int_0^t\sin\omega_0(t-t')x_1^2(t')\mathrm{d}t'$$

$$\begin{aligned}
x_1^2(t)&=[(1+\frac{\delta}{3})x_0(t)-\frac{\delta x_0}{3}(1+\sin^2\omega_0 t)]^2\\
&=(1+\frac{\delta}{3})^2x_0^2(t)-\frac{\delta x_0}{3}(1+\frac{\delta}{3})x_0(t)(1+\sin^2\omega_0 t)+\frac{\delta^2x_0^2}{9}(1+2\sin^2\omega_0 t+\sin^4\omega_0 t)\\
&=(1+\frac{2\delta}{3}-\frac{\delta^2}{9})x_0^2(t)-\frac{\delta x_0}{3}(1+\frac{\delta}{3})x_0(t)(1+\sin^2\omega_0 t)+\frac{\delta^2x_0^2}{9}(3+\sin^4\omega_0 t)
\end{aligned}$$

$$\int_0^t \sin\omega_0(t-t')x_1^2(t')\mathrm{d}t' = \int_0^t \sin\omega_0(t-t')[(1+\frac{2\delta}{3}-\frac{\delta^2}{9})x_0'^2(t)$$

$$-\frac{\delta x_0^2}{3}(1+\frac{\delta}{3})(\cos\omega_0 t'+\cos\omega_0 t'\sin^2\omega_0 t')+\frac{\delta^2 x_0^2}{9}(3+\sin^4\omega_0 t')]\mathrm{d}t'$$

逐个积分.

$$\int_0^t \sin\omega_0(t-t')\mathrm{d}t' = (\frac{\cos\omega_0(t-t')}{\omega_0})_0^t = \frac{1}{\omega_0}(1-\cos\omega_0 t)$$

$$\int_0^t \sin\omega_0(t-t')\cos\omega_0 t'\mathrm{d}t'$$

$$= \int_0^t (\sin\omega_0 t\cos\omega_0 t' - \cos\omega_0 t\sin\omega_0 t')\cos\omega_0 t'\mathrm{d}t'$$

$$= \frac{1}{2}\sin\omega_0 t\int_0^t (1+\cos 2\omega_0 t')\mathrm{d}t' - \frac{1}{2\omega_0}\cos\omega_0 t(\sin^2\omega_0 t')_0^t$$

$$= \frac{1}{2}\sin\omega_0 t[t+\frac{1}{2\omega_0}(\sin 2\omega_0 t')_0^t] - \frac{1}{2\omega_0}\cos\omega_0 t\sin^2\omega_0 t$$

$$= \frac{1}{2}\sin\omega_0 t(t+\frac{1}{2\omega_0}\sin 2\omega_0 t) - \frac{1}{2\omega_0}\cos\omega_0 t\sin^2\omega_0 t$$

$$\int_0^t \sin\omega_0(t-t')\cos\omega_0 t'\sin^2\omega_0 t'\mathrm{d}t'$$

$$= \int_0^t (\sin\omega_0 t\cos\omega_0 t' - \cos\omega_0 t\sin\omega_0 t')\cos\omega_0 t'\sin^2\omega_0 t'\mathrm{d}t'$$

$$= \sin\omega_0 t\int_0^t \sin\omega_0 t'\cos\omega_0 t'(1-\cos^2\omega_0 t')\mathrm{d}t' - \cos\omega_0 t\,\frac{1}{4\omega_0}(\sin^4\omega_0 t')_0^t$$

$$= \frac{1}{\omega_0}\sin\omega_0 t(-\frac{1}{2}\cos^2\omega_0 t'+\frac{1}{4}\cos^4\omega_0 t')_0^t - \frac{\cos\omega_0 t}{4\omega_0}\sin^4\omega_0 t$$

$$= \frac{1}{2\omega_0}\sin\omega_0 t(-\cos^2\omega_0 t+1+\frac{1}{2}\cos^4\omega_0 t-\frac{1}{2}) - \frac{\cos\omega_0 t}{4\omega_0}\sin^4\omega_0 t$$

$$= \frac{1}{2\omega_0}\sin\omega_0 t(-\cos^2\omega_0 t+\frac{1}{2}\cos^4\omega_0 t+\frac{1}{2}) - \frac{\cos\omega_0 t}{4\omega_0}\sin^4\omega_0 t$$

$$\int_0^t \sin\omega_0(t-t')\sin^4\omega_0 t'\mathrm{d}t'$$

$$= \int_0^t (\sin\omega_0 t\cos\omega_0 t' - \cos\omega_0 t\sin\omega_0 t')\sin^4\omega_0 t'\mathrm{d}t'$$

$$= \sin\omega_0 t\,\frac{1}{5\omega_0}(\sin^5\omega_0 t')_0^t - \cos\omega_0 t\int_0^t \sin\omega_0 t'(1-2\cos^2\omega_0 t'+\cos^4\omega_0 t')\mathrm{d}t'$$

$$= \frac{1}{5\omega_0}\sin^6\omega_0 t - \frac{1}{\omega_0}\cos\omega_0 t(\cos\omega_0 t' - \frac{2}{3}\cos^3\omega_0 t'+\frac{1}{5}\cos^5\omega_0 t')_0^t$$

$$= \frac{1}{5\omega_0}\sin^6\omega_0 t - \frac{1}{\omega_0}\cos\omega_0 t(\cos\omega_0 t-1-\frac{2}{3}\cos^3\omega_0 t+\frac{2}{3}+\frac{1}{5}\cos^5\omega_0 t-\frac{1}{5})$$

$$= \frac{1}{5\omega_0}\sin^6\omega_0 t - \frac{1}{\omega_0}\cos\omega_0 t(\cos\omega_0 t-\frac{2}{3}\cos^3\omega_0 t+\frac{1}{5}\cos^5\omega_0 t-\frac{8}{15})$$

最后可得

$$x_2(t)=x_0\left[\cos\omega_0 t+\delta\left(\frac{1}{6}\cos 2\omega_0 t+\frac{1}{3}\cos\omega_0 t-\frac{1}{2}\right)\right]$$
$$+x_0\left[\delta^2 A(t)+\delta^3 B(t)+\omega_0 t\left(\frac{5}{12}\delta^2\sin\omega_0 t+\frac{5}{36}\delta^3\sin\omega_0 t\right)\right] \tag{8.3.23c}$$

其中

$$A(t)=\frac{1}{48}\cos 3\omega_0 t+\frac{1}{9}\cos 2\omega_0 t+\frac{29}{144}\cos\omega_0 t-\frac{1}{3}$$
$$B(t)=\frac{1}{1080}\cos 4\omega_0 t+\frac{1}{144}\cos 3\omega_0 t-\frac{1}{27}\cos 2\omega_0 t+\frac{753}{2160}\cos\omega_0 t-\frac{23}{72}.$$

§8.4 退化核的弗雷德霍姆线性积分方程

本节讨论退化核的第二类弗雷德霍姆积分方程的求解.

8.4.1 可分核

可分核的形式已由(8.1.15)式定义.重写如下.

$$k(x,y)=\lambda\phi(x)\psi^*(y) \tag{8.4.1}$$

为简单起见，假设ϕ和ψ是希尔伯特空间中的函数，并且$k(x,y)$是L_2核.

$$\int\left|k_s(x,y)\right|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y<1 \tag{8.4.2}$$

此条件就是(8.2.37)式，因此满足(8.2.29) $\|K\|\le 1$.则诺伊曼级数是收敛的.

1. 非齐次方程的解

方程

$$f(x)=g(x)+\int k(x,y)f(y)\mathrm{d}y=g(x)+\lambda\int\phi(x)\psi^*(y)f(y)\mathrm{d}y \tag{8.4.3}$$

的迭代解是

$$f(x)=g(x)+\int\mathrm{d}y_1 k(x,y_1)g(y_1)+\int\mathrm{d}y_1\int\mathrm{d}y_2 k(x,y_1)k(y_1,y_2)g(y_2)+\cdots$$

由于(8.4.2)，$k(x,y)$作为一个两变量的函数是平方可积的，因此ϕ和ψ这两个单变量的函数也是平方可积的.

$$f(x)=g(x)+\lambda\int\mathrm{d}y_1\phi(x)\psi^*(y_1)g(y_1)+\lambda^2\int\mathrm{d}y_1\int\mathrm{d}y_2\phi(x)\psi^*(y_1)\phi(y_1)\psi^*(y_2)g(y_2)+\cdots$$

令

$$(\psi,\phi)=\int\mathrm{d}y\psi^*(y)\phi(y)$$

那么

$$f(x)=g(x)+\lambda\phi(x)(\psi,g)+\lambda^2\phi(x)(\psi,\phi)(\psi,g)+\lambda^3\phi(x)(\psi,\phi)^2(\psi,g)+\cdots$$
$$=g(x)+\lambda\phi(x)(\psi,g)\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n(\psi,\phi)^n \tag{8.4.4}$$

只要

$$|\lambda(\psi,\phi)|<1 \tag{8.4.5}$$

式(8.4.4)中的级数就是收敛的.

实际上，由于有(8.4.2)式，(8.4.5)已经满足.证明如下.式(8.4.2)表明

$$|\lambda|^2\int|\phi(x)|^2\,\mathrm{d}x\int|\psi(y)|^2\,\mathrm{d}y<1$$

由施瓦兹不等式，

$$|(\psi,\phi)|\le[(\phi,\phi)(\psi,\psi)]^{1/2}$$

把以上两式结合起来，有

$$|\lambda(\psi,\phi)|\le[|\lambda|^2(\phi,\phi)(\psi,\psi)]^{1/2}=[|\lambda|^2\int\phi(x)|^2\,\mathrm{d}x\int|\psi(y)|^2\,\mathrm{d}y]^{1/2}<1$$

既然满足收敛条件(8.4.5)，(8.4.4)就可以求和，且结果为

$$f(x)=g(x)+\lambda\frac{(\psi,g)}{1-\lambda(\psi,\phi)}\phi(x) \tag{8.4.6}$$

这是一个封闭形式的解.此式是在(8.4.5)的条件下得到的.其实这个条件可以放宽.一般地.我们可以把原方程写成如下形式：

$$f(x)=g(x)+\lambda\int\phi(x)\psi^*(y)f(y)\mathrm{d}y=g(x)+\lambda\phi(x)(\psi,f) \tag{8.4.7}$$

然后两边用ψ做内积.

$$(\psi,f)=(\psi,g)+\lambda(\psi,\phi)(\psi,f) \tag{8.4.8}$$

当

$$\lambda(\psi,\phi)\ne1 \tag{8.4.9}$$

时，可解得

$$(\psi,f)=\frac{(\psi,g)}{1-\lambda(\psi,\phi)} \tag{8.4.10}$$

将它代回(8.4.7)式，即(8.4.6)式.因此得到此解的条件是仅要求(8.4.9)成立.

当$\lambda(\psi,\phi)=1$时，也不是一定没有解.从(8.4.6)式知，如果此时

$$(\psi,g)=0 \tag{8.4.11}$$

那么(8.4.6)右边有一个零比零型，可以得到一个有限的数.因此解为

$$f(x)=g(x)+B\phi(x) \tag{8.4.12}$$

其中 B 为任意常数.容易证明，在(8.4.11)的条件下，(8.4.12)确实满足(8.4.8)式.

2. 齐次方程的解

解式(8.4.6)不适用于齐次方程.如果$g(x)=0$，那么看上去(8.4.6)的解恒为零了.但是作为一

个齐次方程，实际上还是有可能有解的.由(8.4.8)式知，在$g(x)=0$时，应该有

$$(\psi,f)=\lambda(\psi,\phi)(\psi,f) \tag{8.4.13}$$

此时，当：$\lambda(\psi,\phi)=1$ (8.4.14)

时，(ψ,f)可以有非零解，并且可以为任何常数.此式方程(8.4.7)的解为

$$f(x)=A\phi(x) \tag{8.4.15}$$

其中A可以是任意常数.

我们看到一个有趣的事实，齐次方程特征解存在的条件(8.4.15)恰恰就是使非齐次方程解不存在的条件.这一事实暗示，诺依曼级数的发散是与齐次方程的解的出现有着某种联系的.

式(8.4.12)和(8.4.15)都是在$\lambda(\psi,\phi)=1$的条件下得到的，式(8.4.15)是式(8. 4.12)在$g(x)=0$式的特例.当$\lambda(\psi,\phi)\neq 1$且$g(x)=0$时，由式(8.4.6)或者(8.4.13)知，没有非零解.

总而言之，可分核总是使积分方程有极简单的封闭形式的解.如(8.4.6)，(8.4.12)，(8.4.15)式.我们把这些结果归于五种类型，列于表 8.1.

表 8.1 在可分核$k(x,y)=\lambda\phi(x)\psi^*(y)$时第二类弗雷德霍姆积分方程有解的条件及相应的解的表达式.其中A和B是任意常数.

	类型	条件	解 $f(x)$的表达式
非齐次方程	I	$\lambda(\psi,\phi)\neq 1$	$g(x)+\lambda\dfrac{(\psi,g)\phi(x)}{1-\lambda(\psi,\phi)}$
	II	$\lambda(\psi,\phi)=1,(\psi,g)\neq 0$	无解
	III	$\lambda(\psi,\phi)=1,(\psi,g)=0$	$g(x)+B\phi(x)$
齐次方程	IV	$\lambda(\psi,\phi)\neq 1$	0
	V	$\lambda(\psi,\phi)=1$	$A\phi(x)$

3. 微观粒子受到非定域势散射的问题

我们把以上可分核的讨论应用与非定域势薛定谔方程的问题.对于单粒子问题，粒子受到的是定域势，相应的薛定谔方程的形式是(8.2.38a)式.对于多体问题，微观粒子一般受到非定域势的作用，相应的薛定谔方程的形式是

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi+\int U(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\psi(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\boldsymbol{r}'=E\psi(\boldsymbol{r}) \tag{8.4.17}$$

第一章中提到的多电子系统的哈特利-福克自洽方程组就是如此，例如见(1.7.54)式.

可以完全仿照(8.2.38)各式的步骤，将方程(8.4.17)的解写成如下形式

$$\psi(\boldsymbol{r})=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}-\frac{m}{2\pi\hbar^2}\iint\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}q|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}U(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r}'')\psi(\boldsymbol{r}'')\mathrm{d}\boldsymbol{r}'\mathrm{d}\boldsymbol{r}'' \tag{8.4.18}$$

这是一个积分方程.而(8.4.17)则是一个积分微分方程，这两个方程完全是等价的.此式与(8.2.41)式实质上是相同的，就是关于散射的李普曼-许温格方程.注意其中两项中波矢$\boldsymbol{k}$与$\boldsymbol{q}$是有区别

的。它们分别是齐次方程(8.2.38c)和格林函数的方程(8.2.38d)的左边得到的，所以数值是一样的，k=q.

$$|\boldsymbol{k}|=|\boldsymbol{q}|=\left(\frac{2mE}{\hbar^2}\right)^{1/2} \tag{8.4.28}$$

但是方向可能不同.

我们现在来做傅里叶变换，看看动量空间中的李普曼-许温格是什么样子的方程. 先把(8.4.18)式第二项被积函数中的各个因子都写成傅里叶变换的形式.

首先，非局域势的傅里叶变换为

$$U(\boldsymbol{p}',\boldsymbol{p}'')=\iint \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{p}'\cdot\boldsymbol{r}'}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{p}''\cdot\boldsymbol{r}''}U(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r}'')\mathrm{d}\boldsymbol{r}'\mathrm{d}\boldsymbol{r}'' \tag{8.4.19}$$

那么，

$$\begin{aligned}\int U(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r}'')\psi(\boldsymbol{r}'')\mathrm{d}\boldsymbol{r}''&=\int\frac{1}{(2\pi)^6}\iint \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{p}'\cdot\boldsymbol{r}'}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{p}''\cdot\boldsymbol{r}''}U(\boldsymbol{p}',\boldsymbol{p}'')\mathrm{d}\boldsymbol{p}'\mathrm{d}\boldsymbol{p}''\psi(\boldsymbol{r}'')\mathrm{d}\boldsymbol{r}''\\&=\frac{1}{(2\pi)^6}\iint \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{p}'\cdot\boldsymbol{r}'}U(\boldsymbol{p}',\boldsymbol{p}'')\mathrm{d}\boldsymbol{p}'\mathrm{d}\boldsymbol{p}''\psi(-\boldsymbol{p}'')\end{aligned} \tag{8.4.20}$$

然后，用格林函数的傅里叶变换(6.2.31)式，则(8.4.18)的第二项成为

$$\begin{aligned}&-\frac{m}{2\pi\hbar^2}\iint\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}q|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}U(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r}'')\psi(\boldsymbol{r}'')\mathrm{d}\boldsymbol{r}'\mathrm{d}\boldsymbol{r}''\\&=-\frac{2m}{\hbar^2}\frac{1}{(2\pi)^3}\int\mathrm{d}\boldsymbol{r}'\int\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{q}_1\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}\mathrm{d}\boldsymbol{q}_1}{q_1^{\,2}-q^2+\mathrm{i}\varepsilon}\frac{1}{(2\pi)^6}\iint \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{p}'\cdot\boldsymbol{r}'}U(\boldsymbol{p}',\boldsymbol{p}'')\mathrm{d}\boldsymbol{p}'\mathrm{d}\boldsymbol{p}''\psi(-\boldsymbol{p}'')\\&=-\frac{2m}{\hbar^2}\frac{1}{(2\pi)^6}\iint\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{q}_1\cdot\boldsymbol{r}}\mathrm{d}\boldsymbol{q}_1}{q_1^{\,2}-q^2+\mathrm{i}\varepsilon}U(\boldsymbol{q}_1,-\boldsymbol{p}'')\mathrm{d}\boldsymbol{p}''\psi(\boldsymbol{p}'')\end{aligned}$$

这样，对坐标的积分变成了对动量的积分.由此，(8.4.18)的傅里叶变换为

$$\begin{aligned}\psi(\boldsymbol{p})&=\int\mathrm{d}\boldsymbol{r}\psi(\boldsymbol{r})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}}\\&=\int\mathrm{d}\boldsymbol{r}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{p})\cdot\boldsymbol{r}}}{(2\pi)^{3/2}}+\frac{2m}{\hbar^2}\int\mathrm{d}\boldsymbol{r}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}}\frac{1}{(2\pi)^6}\iint\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{q}_1\cdot\boldsymbol{r}}\mathrm{d}\boldsymbol{q}_1}{q_1^{\,2}-q^2+\mathrm{i}\varepsilon}U(\boldsymbol{q}_1,-\boldsymbol{p}'')\mathrm{d}\boldsymbol{p}''\psi(\boldsymbol{p}'')\\&=\frac{\delta(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{p})}{(2\pi)^{3/2}}+\frac{2m}{\hbar^2}\frac{1}{(2\pi)^6}\iint\frac{\delta(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}_1)\mathrm{d}\boldsymbol{q}_1}{q_1^{\,2}-q^2+\mathrm{i}\varepsilon}U(\boldsymbol{q}_1,-\boldsymbol{p}'')\mathrm{d}\boldsymbol{p}''\psi(\boldsymbol{p}'')\end{aligned}$$

就得到

$$\psi(\boldsymbol{p})=\frac{\delta(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{p})}{(2\pi)^{3/2}}+\frac{2m}{\hbar^2}\frac{1}{(2\pi)^3}\int\frac{U(\boldsymbol{p},-\boldsymbol{p}_1)}{p^2-q^2+\mathrm{i}\varepsilon}\psi(\boldsymbol{p}_1)\mathrm{d}\boldsymbol{p}_1 \tag{8.4.21}$$

这就是动量空间中的李普曼-许温格方程.

现在我们考虑这样一个物理过程：粒子以波矢 $\boldsymbol{k}$ 从无穷远处入射，受到势场散射之后运动到远处.入射的粒子是平面波，这正是(8.4.18)式的第一项.向无穷远处的运动，应该呈现球面波的行为.也就是说，从 $\boldsymbol{p}$ 方向的很远处看，散射波，也就是(8.4.18)的第二项，应该具有 $\frac{\mathrm{e}^{ipr}}{r}$ 的行为.总的波函数是入射波和散射波的叠加.此时，可以将(8.4.18)写成

$$\psi(\boldsymbol{r})=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}+f(\boldsymbol{k},\boldsymbol{q})\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}qr}}{r} \tag{8.4.22}$$

的形式.其中散射波前的因子称为散射振幅，它是与入射波矢和散射波矢有关的.它的平方是散射几率，这是一个实验上可测量的量，因此是一个重要的物理量.我们希望能够求解出散射振幅.

以上是根据物理考虑来写出(8.4.22)式的.此式实际上也可以从(8.4.18)推导出来.现在我们

考虑散射到很远处，在那儿势能已经不起作用的情况.就是说(8.4.18)中的 r 远大于对 $\boldsymbol{r}'$ 积分不为零的区域.这时，可做如下近似：

$$|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|=\sqrt{r^2-2\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}'+r'^2}=r\left[1-\frac{2\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}'}{r^2}+\frac{r'^2}{r^2}\right]^{1/2}$$

由于 $r\gg r'$，第二项开始都是小量.在格林函数的分母中，只保留到第一项.而在指数中，保留至第二项：

$$|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|\approx r-\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}'$$

其中 $\boldsymbol{n}$ 是 $\boldsymbol{r}$ 方向上的单位向量.由此近似，(8.4.18)式可写成如下形式，

$$\psi(\boldsymbol{r})=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}}{(2\pi)^{3/2}}-\frac{m}{2\pi\hbar^2}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}qr}}{r}\int\int\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r}'}U(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r}'')\psi(\boldsymbol{r}'')\mathrm{d}\boldsymbol{r}'\mathrm{d}\boldsymbol{r}'' \tag{8.4.23}$$

其中在指数上已令 $q\boldsymbol{n}=\boldsymbol{q}$.这是从位矢为 $\boldsymbol{r}$ 的观察点看到的散射波矢.这个波矢的方向随观察点而不同.这就是为什么在(8.4.18)式中两项指数上的波矢要写成不同的符号.定义

$$f(\boldsymbol{k},\boldsymbol{q})=-\frac{m}{2\pi\hbar^2}\int\int\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r}'}U(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r}'')\psi(\boldsymbol{r}'')\mathrm{d}\boldsymbol{r}'\mathrm{d}\boldsymbol{r}'' \tag{8.4.24}$$

那么，(8.4.23) 就是 (8.4.22) 的形式 . 式 (8.4.24) 表明，散射振幅 $f(\boldsymbol{k},\boldsymbol{q})$ 是函数 $-\frac{m}{2\pi\hbar^2}\int U(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r}'')\,\psi(\boldsymbol{r}'')\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}''$ 的傅里叶变换.

为了求出散射振幅，就必须写出它所满足的方程.为此，先利用前面的傅里叶变换，将散射振幅完全写成动量空间中的形式。将(8.4.19)代入(8.4.24)，并利用(8.4.20)式，

$$\begin{aligned}f(\boldsymbol{k},\boldsymbol{q})&=-\frac{m}{2\pi\hbar^2}\int\frac{1}{(2\pi)^6}\int\int\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r}'}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{p}'\cdot\boldsymbol{r}'}U(\boldsymbol{p}',-\boldsymbol{p}'')\mathrm{d}\boldsymbol{p}'\mathrm{d}\boldsymbol{p}''\psi(\boldsymbol{p}'')\mathrm{d}\boldsymbol{r}'\\&=-\frac{m}{2\pi\hbar^2}\frac{1}{(2\pi)^6}\int\int U(\boldsymbol{p}',-\boldsymbol{p}'')\mathrm{d}\boldsymbol{p}'\mathrm{d}\boldsymbol{p}''\psi(\boldsymbol{p}'')\delta(\boldsymbol{p}'-\boldsymbol{q})\\&=-\frac{m}{2\pi\hbar^2}\frac{1}{(2\pi)^3}\int U(\boldsymbol{q},-\boldsymbol{p}'')\psi(\boldsymbol{p}'')\mathrm{d}\boldsymbol{p}''\end{aligned} \tag{8.4.25}$$

由此表达式，动量空间中的李普曼-许温格方程(8.4.21)式简化成

$$\psi(\boldsymbol{p})=\frac{\delta(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{p})}{(2\pi)^{3/2}}+4\pi\frac{f(\boldsymbol{k},\boldsymbol{p})}{p^2-k^2+\mathrm{i}\varepsilon} \tag{8.4.26}$$

此处已经把 q 写成 k，因为前面提到，这两者的数值大小是相等的.在式(8.4.26)两边乘以 $-\frac{m}{2\pi\hbar^2}\frac{1}{(2\pi)^3}U(\boldsymbol{q},-\boldsymbol{p})$ 并对 $\boldsymbol{p}$ 积分，得到，

$$\begin{aligned}-\frac{m}{2\pi\hbar^2}\frac{1}{(2\pi)^3}\int\mathrm{d}\boldsymbol{p}U(\boldsymbol{q},-\boldsymbol{p})\psi(\boldsymbol{p})&=-\frac{m}{2\pi\hbar^2}\frac{1}{(2\pi)^3}\int\mathrm{d}\boldsymbol{p}U(\boldsymbol{q},-\boldsymbol{p})\frac{\delta(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{p})}{(2\pi)^{3/2}}\\&+\frac{m}{2\pi\hbar^2}\frac{1}{(2\pi)^3}\int\mathrm{d}\boldsymbol{p}U(\boldsymbol{q},-\boldsymbol{p})4\pi\frac{f(\boldsymbol{k},\boldsymbol{p})}{p^2-k^2+\mathrm{i}\varepsilon}\end{aligned}$$

$$f(\boldsymbol{k},\boldsymbol{q})=-\frac{m}{2\pi\hbar^2}\frac{U(\boldsymbol{q},-\boldsymbol{k})}{(2\pi)^{3/2}}-\frac{2m}{\hbar^2}\frac{1}{(2\pi)^3}\int\mathrm{d}\boldsymbol{p}\frac{U(\boldsymbol{q},-\boldsymbol{p})}{p^2-k^2+\mathrm{i}\varepsilon}f(\boldsymbol{k},\boldsymbol{p}) \tag{8.4.27}$$

对于一般的非定域势，(8.4.27)式是不容易求解的.现在我们只考虑一种简单的情况，非定

域势是可分的.

$$U(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=-g^2v(\boldsymbol{r})v(\boldsymbol{r}') \tag{8.4.29}$$

则其傅里叶变换也是可分的形式

$$U(\boldsymbol{k},\boldsymbol{p})=-g^2v(\boldsymbol{k})v(\boldsymbol{p})\,)= \tag{8.4.30}$$

这时(8.4.27)式成为

$$f(\boldsymbol{k},\boldsymbol{q})=\frac{mg^2}{2\pi\hbar^2}\frac{v(\boldsymbol{q})v(-\boldsymbol{k})}{(2\pi)^{3/2}}+\frac{2mg^2}{\hbar^2}\frac{1}{(2\pi)^3}\int v(\boldsymbol{q})\frac{v(-\boldsymbol{p})}{p^2-k^2+\mathrm{i}\varepsilon}f(\boldsymbol{k},\boldsymbol{p})\mathrm{d}\boldsymbol{p} \tag{8.4.31}$$

现在我们看到，当势场如(8.4.29)式这样可分的时候，积分方程(8.4.18)并不是可分核类型的.但是其傅里叶变换后的积分方程(8.4.31)是可分核的形式.

现在做下述对应，

$$x\to\boldsymbol{q},y\to\boldsymbol{p}，\quad f(x)\to f(\boldsymbol{k},\boldsymbol{q}),g(x)\to\frac{mg^2}{2\pi\hbar^2}\frac{v(\boldsymbol{q})v(-\boldsymbol{k})}{(2\pi)^{3/2}}$$

$$\phi(x)\to v(\boldsymbol{q})，\ \psi\to\frac{v(-\boldsymbol{p})}{p^2-k^2+\mathrm{i}\varepsilon}$$

做这样的对应之后，可以利用(8.4.6)式.再令 $\tau=\dfrac{4\pi mg^2}{\hbar^2},\lambda=\dfrac{2mg^2}{\hbar^2}=\dfrac{\tau}{2\pi}$，那么，(8.4.31)就与(8.4.3)的形式，或者与(8.4.7)的形式一样了. 注意其中的内积是含有权 $1/(2\pi)^3$ 的积分.按照(8.4.6)写出解的表达式：

$$f(\boldsymbol{k},\boldsymbol{q})=\frac{\tau}{8\pi^2(2\pi)^{3/2}}v(\boldsymbol{q})v(-\boldsymbol{k})
+\lambda\frac{\dfrac{1}{(2\pi)^3}\displaystyle\int\frac{v(-\boldsymbol{p})}{p^2-k^2+\mathrm{i}\varepsilon}\frac{\tau}{8\pi^2(2\pi)^{3/2}}v(\boldsymbol{p})v(-\boldsymbol{k})\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{1-\lambda\dfrac{1}{(2\pi)^3}\displaystyle\int\frac{v(-\boldsymbol{p})}{p^2-k^2+\mathrm{i}\varepsilon}v(\boldsymbol{p})\mathrm{d}\boldsymbol{p}}v(\boldsymbol{q}) \tag{8.4.32}$$

定义

$$I=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\frac{v(\boldsymbol{p})v(-\boldsymbol{p})\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{p^2-(k-\mathrm{i}\varepsilon)^2} \tag{8.4.33}$$

之后，(8.4.32)写成

$$f(\boldsymbol{k},\boldsymbol{q})=\frac{\tau}{8\pi^2(2\pi)^{3/2}}v(\boldsymbol{q})v(-\boldsymbol{k})(1+\frac{\lambda I}{1-\lambda I})=\frac{\tau}{8\pi^2(2\pi)^{3/2}}\frac{v(\boldsymbol{q})v(-\boldsymbol{k})}{1-\lambda I} \tag{8.4.34}$$

这就是最后得到散射振幅的解.

例 1 设

$$v(\boldsymbol{r})=\mathrm{e}^{-\mu r}/r \tag{8.4.35}$$

这是核物理中的汤川势，也是金属中电子气的库仑屏蔽势.首先要计算出其傅里叶分量.实际上这个傅里叶分量我们前面已经计算出来了.式(8.4.35)与(6.2.11a)式，即三维空间中的格林函数的形式是一样的.它的傅里叶变换式就是(6.2.31)式.在(6.2.11a)式中令 $\lambda=-\mu^2$，就立即写出

(8.4.35)式的傅里叶变换为

$$v(\boldsymbol{q})=\frac{4\pi}{q^2+\mu^2} \tag{8.4.36}$$

这个形式只与波矢的大小有关，而与波矢的方向无关.预示最后的散射振幅也只与波矢的大小有关而与波矢的方向无关.代入(8.4.33),

$$I=\frac{1}{(2\pi)^3}\int_0^\infty\frac{4\pi q^2\mathrm{d}q}{q^2-(k-\mathrm{i}\varepsilon)^2}(\frac{4\pi}{q^2+\mu^2})^2=4\int_{-\infty}^\infty\frac{q^2\mathrm{d}q}{(q-k+\mathrm{i}\varepsilon)(q+k-\mathrm{i}\varepsilon)}\frac{1}{(q-\mathrm{i}\mu)^2(q+\mathrm{i}\mu)^2}$$

在上半平面补上闭合回路. 其中已将对 q 的积分扩展到整个实轴.现在打算在上半平面补上回路做积分.因此考虑上半平面内的极点.设

$$\frac{q^2}{(q+k-\mathrm{i}\varepsilon)(q-\mathrm{i}\mu)^2}=\frac{a}{q+k-\mathrm{i}\varepsilon}+\frac{bq+ck}{(q-\mathrm{i}\mu)^2}$$

由通分母解出系数如下.

$$a(q-\mathrm{i}\mu)^2+(q+k)(bq+ck)=aq^2-2aq\mathrm{i}\mu-a\mu^2+bq^2+(b+c)kq+ck^2$$

$$a+b=1,-2a\mathrm{i}\mu+(b+c)k=0,-a\mu^2+ck^2=0,$$

$$a(k^2-\mu^2)+(b+c)k^2=k^2$$

$$a(k^2-\mu^2)+2a\mathrm{i}\mu k=a(k+\mathrm{i}\mu)^2=k^2$$

解出 a,b,c 三个系数，

$$a=\frac{k^2}{(k+\mathrm{i}\mu)^2},b=\frac{\mu^2-2\mathrm{i}\mu k}{(k+\mathrm{i}\mu)^2},c=\frac{\mu^2}{(k+\mathrm{i}\mu)^2}$$

原积分就成为

$$\frac{1}{4}I=\int_{-\infty}^\infty\frac{\mathrm{d}q}{(q-k+\mathrm{i}\varepsilon)(q+\mathrm{i}\mu)^2}(\frac{a}{q+k-\mathrm{i}\varepsilon}+\frac{bq+ck}{(q-\mathrm{i}\mu)^2})$$

$$=2\pi\mathrm{i}[\frac{a}{(q-k+\mathrm{i}\varepsilon)(q+\mathrm{i}\mu)^2}]_{q=-k+\mathrm{i}\varepsilon}+2\pi\mathrm{i}[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q}\frac{bq+ck}{q-k}\frac{1}{(q+\mathrm{i}\mu)^2}]_{q=\mathrm{i}\mu}$$

$$=\frac{-2\pi\mathrm{i}a}{2p(-k+\mathrm{i}\mu)^2}+2\pi\mathrm{i}[\frac{b}{q-k}\frac{1}{(q+\mathrm{i}\mu)^2}-\frac{1}{(q-k)^2}\frac{bq+ck}{(q+\mathrm{i}\mu)^2}-\frac{2}{q-k}\frac{bq+ck}{(q+\mathrm{i}\mu)^3})]_{q=\mathrm{i}\mu}$$

$$=\frac{\pi\mathrm{i}a}{k(k-\mathrm{i}\mu)^2}+2\pi\mathrm{i}[\frac{1}{(q-k)(q+\mathrm{i}\mu)^2}\{-\frac{bk+ck}{q-k}-\frac{2(bq+ck)}{q+\mathrm{i}\mu}\}]_{q=\mathrm{i}\mu}$$

$$=\frac{\pi\mathrm{i}a}{k(k-\mathrm{i}\mu)^2}+\frac{2\pi\mathrm{i}}{(\mathrm{i}\mu-k)(2\mathrm{i}\mu)^2}(-\frac{bk+ck}{\mathrm{i}\mu-k}-2\frac{b\mathrm{i}\mu+ck}{2\mathrm{i}\mu})$$

$$=\frac{\pi\mathrm{i}a}{k(k-\mathrm{i}\mu)^2}-\frac{\pi\mathrm{i}}{2(\mathrm{i}\mu-k)^2\mathrm{i}\mu\mu^2}[-(bk+ck)\mathrm{i}\mu-(b\mathrm{i}\mu+ck)(\mathrm{i}\mu-k)]$$

$$=\frac{\pi\mathrm{i}a}{k(k-\mathrm{i}\mu)^2}+\pi\frac{2cp\mathrm{i}\mu+b\mu^2-ck^2}{2(\mathrm{i}\mu-k)^2\mu^3}$$

现在可以把前面的 a,b,c 代入，

$$c(2k\mathrm{i}\mu-k^2)+b\mu^2=\frac{\mu^2}{(k+\mathrm{i}\mu)^2}(2k\mathrm{i}\mu-k^2)+\frac{\mu^2-2\mathrm{i}\mu k}{(k+\mathrm{i}\mu)^2}\mu^2=\frac{\mu^2}{(k+\mathrm{i}\mu)^2}(\mu^2-k^2)$$

$$I=4[\frac{\pi\mathrm{i}a}{k(k-\mathrm{i}\mu)^2}+\pi\frac{c(2k\mathrm{i}\mu-k^2)+b\mu^2}{2(\mathrm{i}\mu-k)^2\mu^3}]$$
$$=\frac{4\pi}{(k+\mathrm{i}\mu)^2}[\frac{\mathrm{i}k}{(k-\mathrm{i}\mu)^2}+\frac{\mu^2-k^2}{2(\mathrm{i}\mu-k)^2\mu}]$$
$$=\frac{4\pi}{2\mu(k+\mathrm{i}\mu)^2(k-\mathrm{i}\mu)^2}(2\mu\mathrm{i}k-k^2+\mu^2)=-\frac{2\pi}{\mu(k+\mathrm{i}\mu)^2}$$
最终计算得到的结果是：

$$I=-\frac{2\pi}{\mu(k+\mathrm{i}\mu)^2}$$

再代入(8.4.34)式，

$$f(\boldsymbol{k},\boldsymbol{q})=\frac{\tau}{8\pi^2(2\pi)^{3/2}}\frac{1}{1+\lambda\dfrac{2\pi}{\mu(k+\mathrm{i}\mu)^2}}\frac{4\pi}{k^2+\mu^2}\frac{4\pi}{q^2+\mu^2}$$
$$=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\frac{2\tau(k+\mathrm{i}\mu)}{(k+\mathrm{i}\mu)^2+2\pi\lambda/\mu}\frac{1}{k-\mathrm{i}\mu}\frac{1}{q^2+\mu^2}$$

注意，这儿的 $\boldsymbol{k}$ 和 $\boldsymbol{q}$ 分别是入射波矢和散射波矢. 此时的 $f(\boldsymbol{k},\boldsymbol{q})$ 值依赖于 k 或者 q 的大小，即现在散射振幅只与入射和出射波矢的大小有关.若是弹性散射，这两个波矢的大小相等，k=q.

$$f(\boldsymbol{k},\boldsymbol{q})=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\frac{2\tau(k+\mathrm{i}\mu)}{(k+\mathrm{i}\mu)^2+2\pi\lambda/\mu}\frac{1}{k-\mathrm{i}\mu}\frac{1}{k^2+\mu^2}$$
$$=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\frac{2\tau}{(k+\mathrm{i}\mu)^2+2\pi\lambda/\mu}\frac{1}{(k-\mathrm{i}\mu)^2}$$
最后写成

$$f(\boldsymbol{k},\boldsymbol{q})=f(E)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\frac{2\tau}{(k^2+\mu^2)^2+\tau(k-\mathrm{i}\mu)^2/\mu}$$

由于散射振幅只依赖于波矢的大小，就干脆写成依赖于能量 $f(E)$ 的形式.

8.4.2 有限秩核

1. 有限秩核的线性方程组

有限秩核已由(8.1.14)式定义.一个有限秩核的积分算子 K_F 作用到巴拿赫空间 V 中任意向量 f 上之后，具有下面的形式，

$$K_F f\equiv\sum_{n=1}^{N}\phi_n(\psi_n,f) \tag{8.4.37}$$

此式表明，算子的作用是把函数 f 投影到有限个基函数上.这样，算子的运算可以化为有限维矩阵的运算.

式(8.4.37)中 (ψ_n,f) 原则上可以不是内积，而是某种普遍的的线性变换.不过我们遇到的情况，一般就是内积.如果 (ψ_n,f) 就是内积，那么(8.4.37)式就成为

$$K_F f = \int \mathrm{d}x \sum_{n=1}^{N} \phi_n \psi_n(x) f(x) \tag{8.4.38}$$

将 V 的对偶空间内的向量记为 $\tilde{f}$. K_F 的伴随算子记为 K_F^+，它是作用在向量 $\tilde{f}$ 上的. K_F^+ 作用在向量 $\tilde{f}$ 上的效果是：

$$K_F^+ \tilde{f} \equiv \sum_{n=1}^{N} \psi_n (\phi_n, \tilde{f}) \tag{8.4.39}$$

考虑方程

$$f - \lambda K_F f = g \tag{8.4.40}$$

定义 1 称方程

$$\tilde{h} - \lambda^* K_F^+ \tilde{h} = 0 \tag{8.4.41}$$

为(8.4.40)的齐次共轭方程，或者齐次伴随方程.其中 f，g 是空间 V 中的向量，而 $\tilde{h}$ 是 V 的对偶空间中的向量.上两式可由(8.4.37)和(8.4.39)式重写成如下形式.

$$f = g + \lambda \sum_{n=1}^{N} \phi_n (\psi_n, f) \tag{8.4.42}$$

$$\tilde{h} - \lambda^* \sum_{n=1}^{N} \psi_n (\phi_n, \tilde{h}) = 0 \tag{8.4.43}$$

以下的做法类似于可分核的情形.仿照(8.4.8)式，在(8.4.42)两边用 ψ_m 构成内积.

$$(\psi_m, f) = (\psi_m, g) + \lambda \sum_{n=1}^{N} (\psi_m, \phi_n)(\psi_n, f) \tag{8.4.44}$$

令

$$\alpha_{mn} \equiv (\psi_m, \phi_n),\ a_n \equiv (\psi_n, f),\ b_m \equiv (\psi_m, g) \tag{8.4.45}$$

就简写为

$$a_m - \lambda \sum_{n=1}^{N} \alpha_{mn} a_n = b_m \tag{8.4.46}$$

同理，对于(8.4.43)式的两边用 ϕ_m 构成内积.得到的方程是

$$\tilde{a}_m - \lambda^* \sum_{n=1}^{N} \alpha_{nm}^* \tilde{a}_n = 0 \tag{8.4.47}$$

其中

$$\tilde{a}_n \equiv (\phi_n, \tilde{h}) \tag{8.4.48}$$

经过这样的手续，原来的方程(8.4.40)和(8.4.41)称为线性代数方程组。

式(8.4.46)和(8.4.47)用矩阵写出来，就是

$$(I-\lambda M)a=b \tag{8.4.49}$$

$$(I-\lambda M)^{+}\tilde{a}=0 \tag{8.4.50}$$

我们把原方程组(8.4.40)和(8.4.41)转化成了求解线性方程组(8.4.49)和(8.4.50)的问题.

式(8.4.49)和(8.4.50)与式(2.2.35)和(2.2.37)的形式完全一样，都是线性代数方程组，因此可以完全套用求解线性代数方程组的择一定理.该定理应用于目前的情况，若λ是矩阵 M 的特征值，当且仅当对于齐次伴随方程的所有解$\tilde{a}$，

$$(b,\tilde{a})=\sum_{n=1}^{N}b_n^{*}\tilde{a}_n=0 \tag{8.4.51}$$

成立时，方程(8.4.47)有解，相应地(8.4.40)也仅在这些条件下有解.

式(8.4.51)要求

$$\sum_{n=1}^{N}(g,\psi_n)(\phi_n,\tilde{h})=\left(g,\sum_{n=1}^{N}\psi_n(\phi_n,\tilde{h})\right)=0 \tag{8.4.52}$$

结合(8.4.39)式，把其中的 f 换写成 h，(8.4.52)式就是指

$$(g,K_F^{+}\tilde{h})=0 \tag{8.4.53}$$

由定理知，假如$\tilde{h}\neq 0$，由(8.4.41)式$\tilde{h}-\lambda^{*}K_F^{+}\tilde{h}=0$可得$\lambda^{*}K_F^{+}\tilde{h}=\tilde{h}$.因此对于满足$\tilde{h}-\lambda^{*}K_F^{+}\tilde{h}=0$的所有$\tilde{h}$，如果有$(g,\tilde{h})=0$，那么方程(8.4.40)式 $f-\lambda K_F f=g$ 的解存在.

注意：如果$(I-\lambda M)^{+}\tilde{a}=0$没有解，那么$(I-\lambda M)^{-1}$存在，则方程$(I-\lambda A)a=b$有唯一解；假如方程$\tilde{h}-\lambda^{*}K_F^{+}\tilde{h}=0$没有解，则方程 $f-\lambda K_F f=g$ 有唯一解.

上述内容总结为如下定理.

定理 1 假如K_F是有限秩线性变换，而$\tilde{h}_i$满足齐次伴随方程$\lambda^{*}K_F^{+}\tilde{h}_i=\tilde{h}_i$，那么，当且仅当对于所有 i，$(g,\tilde{h}_i)=0$时，方程 $f=g+\lambda K_F f$ 才有解.假如齐次伴随方程没有解，那么非齐次方程的解是唯一的.由同样的讨论，对于K_F^{+}也有相似的结论.

推论 1 假如K_F是有限秩算子，那么当且仅当对于齐次方程$\lambda K_F h_i=h_i$的任何解h_i，$(\tilde{g},h_i)=0$ 时，方程$\tilde{f}=\tilde{g}+\lambda^{*}K_F^{+}\tilde{f}$才有解，那么非齐次伴随方程的解是唯一的.

推论 2 方程$\lambda K_F h_i=h_i$和$\lambda^{*}K_F^{+}\tilde{h}_i=\tilde{h}_i$有相同数目的线性无关解.

定理 1 和它的两个推论，常常被称为**弗雷德霍姆择一定理**.称为“择一”是指有选择的余地：或是非齐次方程$(I-\lambda K)f=g$有唯一解，或是齐次伴随方程至少有一个解.需要说明的是，现在的这个定理是在有限秩核的情况下的定理.

下面叙述在有限秩核的情况下如何把解求出来.

3. 求解步骤

现在我们可以写出有限秩核弗雷德霍姆积分方程(8.4.40)的求解过程了.为了清楚起见，我

们把前面有关的方程重写如下.

原方程(8.4.42)式与相应的齐次伴随方程(8.4.43)式如下.

$$f = g + \lambda \sum_{n=1}^{N} \phi_n (\psi_n, f) \tag{8.4.57}$$

$$\tilde{h} - \lambda^* \sum_{n=1}^{N} \psi_n (\phi_n, \tilde{h}) = 0 \tag{8.4.58}$$

记

$$\alpha_{mn} \equiv (\psi_m, \phi_n),\ a_n \equiv (\psi_n, f),\ b_m \equiv (\psi_m, g),\ \tilde{a}_n \equiv (\phi_n, \tilde{h}) \tag{8.4.59}$$

注意其中的α_{mn}和b_m是可以从原方程计算得到的.而a_n和$\tilde{a}_n$包含未知函数f，因此是待求的量.

其中$a_n \equiv (\psi_n, f)$和$\tilde{a}_n \equiv (\phi_n, \tilde{h})$分别可由方程组(8.4.49)和(8.4.50)求出.

$$(I - \lambda M) a = b \tag{8.4.60}$$

$$(I - \lambda M)^+ \tilde{a} = 0 \tag{8.4.61}$$

其中$(M)_{mn} = \alpha_{mn}$.在实数空间中，式(8.4.61)可简单地写成

$$(I - \lambda M) a = 0 \tag{8.4.62}$$

(1) 从原方程计算α_{mn}，b_m，并计算det ($I - \lambda M$)=0 得到特征值$\lambda_i, (i = 1, 2, \cdots, N_\beta \le N)$，其中可能有重根.

此处要说明一点的是，在积分方程中讲的特征值是由方程$\det(I - \lambda M) = 0$计算得到的.这与线性代数中讲的特征值略有区别.在那儿，一个矩阵M的特征值是由方程$\det(\lambda I - M) = 0$计算得到的.两者的特征值互为倒数.

(2) 对于$\lambda \ne \lambda_i, (i = 1, 2, \cdots, N_\beta)$，非齐次方程(8.4.60)有唯一解.而齐次伴随方程(8.4.61)无非零解.

解出a，代入(8.4.57)得到解f.这种情况与表 8.1 中的类型 I 相对应.对于齐次方程$g = 0$，则函数f只能为零，这与表 8.1 中的类型 IV 相对应.

若考虑用级数展开法求解，就要估计$|\lambda|$的上限.前面介绍了两种估计$|\lambda|$上限的方法.

一是条件(8.2.18)和(8.2.24)式：

$$\max_{x, y \in [a, b]} |k(x, y)| \rho(y) = M\text{，}\ |\lambda| < 1 / M(b - a) \tag{8.4.63}$$

二是在平方可积空间内的条件(8.2.37)式：

$$|\lambda|^2 \int \rho(x) \mathrm{d}x \int \rho(y) \mathrm{d}y \left| k(x, y) \right|^2 < 1 \tag{8.4.64}$$

只要(8.4.63)和(8.4.64)条件之一满足，就可以用 8.2.1 小节介绍的诺依曼级数展开来求解.一般说来，由条件(8.4.64)得到的$|\lambda|$的上限比由条件(8.4.63)得到的数值要大.

齐次方程和λ为特征值时的非齐次方程都不能用级数展开法求解.

(3) 当λ就是特征值时，设第 i 个特征值 λ_i 是 k_i 重简并的，即 λ_i 有 k_i 个特征向量，记为 $\varphi_{i,j},(j=1,2,\cdots,k_i)$.对于每一个 λ_i，由(8.4.61)式可求出 k_i 个 $\tilde{a}$.每一个 $\tilde{a}$ 代入(8.4.58)求出 $\tilde{h}$，每一个 $\tilde{h}$ 实际上就是对应于特征值 λ_i 的特征函数 $\varphi_{i,j}$.当 $g=0$，取 $\varphi_{i,j}$ 的转置共轭就是齐次方程 $f-\lambda K_F f=0$ 的解.这与表 8.1 中的类型 V 相对应.

对于 $g\neq 0$ 的非齐次方程，就要运用弗雷德霍姆择一定理中 $(g,\varphi_{i,j})=0$ 的条件.对于特征值 λ_i，我们先计算 $(g,\varphi_{i,j}),(j=1,2,\cdots,k_i)$.分成两种情况：

一是若至少有一个 $\varphi_{i,j}$，$(g,\varphi_{i,j})\neq 0$，那么对应于这个特征值 λ_i 的原方程(8.4.57)无解.这与表 8.1 中的类型 II 相对应.

二是如果对于所有 $\varphi_{i,j}$，有 $(g,\varphi_{i,j})=0,(j=1,2,\cdots,k_i)$，那么，对于特征值$\lambda_i$，存在解 $f(x)=g(x)+\sum_{j=1}^{k_i}A_j\varphi_{i,j}(x)$，其中 $A_j,(j=1,2,\cdots,k_i)$ 是任意常数.这与表 8.1 中的类型 III 相对应.

把表 8.1 再写在这儿

	类型	条件	解 $f(x)$的表达式
非齐次方程	I	$\lambda(\psi,\phi)\neq 1$	$g(x)+\lambda\dfrac{(\psi,g)\phi(x)}{1-\lambda(\psi,\phi)}$
	II	$\lambda(\psi,\phi)=1,(\psi,g)\neq 0$	无解
	III	$\lambda(\psi,\phi)=1,(\psi,g)=0$	$g(x)+B\phi(x)$
齐次方程	IV	$\lambda(\psi,\phi)\neq 1$	0
	V	$\lambda(\psi,\phi)=1$	$A\phi(x)$

例 2 求解积分方程

$$f(x)=x+\lambda\int_0^{\pi}\frac{\sin(x+x')}{\pi}f(x')\mathrm{d}x' \tag{8.4.65}$$

解 我们用上面叙述的标准步骤来求解.将原方程展开成以下形式.

$$f(x)=x+\lambda\frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\pi}\frac{\cos x'}{\sqrt{\pi}}f(x')\mathrm{d}x'+\lambda\frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\pi}\frac{\sin x'}{\sqrt{\pi}}f(x')\mathrm{d}x' \tag{8.4.66a}$$

与(8.4.57)式对照，显然，有 $g(x)=x$，$N=2$，且

$$\{\phi_n\}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\{\sin x,\cos x\},\{\psi_n\}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\{\cos x,\sin x\}.$$

(1) 令

$$a=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(\psi_1,f)\\(\psi_2,f)\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\pi}f(x')\begin{pmatrix}\cos x'\\\sin x'\end{pmatrix}\mathrm{d}x'$$

$$b=\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(\psi_1,g)\\ (\psi_2,g)\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\pi}x\begin{pmatrix}\cos x\\ \sin x\end{pmatrix}\mathrm{d}x=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\begin{pmatrix}(x\sin x+\cos x)_0^{\pi}\\ (-x\cos x+\sin x)_0^{\pi}\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\begin{pmatrix}-2\\ \pi\end{pmatrix}$$

$$M=\begin{pmatrix}(\psi_1,\phi_1) & (\psi_1,\phi_2)\\ (\psi_2,\phi_1) & (\psi_2,\phi_2)\end{pmatrix}=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\mathrm{d}x\begin{pmatrix}\cos x\sin x & \cos^2 x\\ \sin^2 x & \sin x\cos x\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

在这样的系数定义下，(8.4.66a)式写成：

$$f(x)=x+a_1\lambda\frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}+a_2\lambda\frac{\cos x}{\sqrt{\pi}} \tag{8.4.66b}$$

对此式两边分别用ψ_1和ψ_2做内积，就得到

$$a_1=b_1+\frac{\lambda}{2}a_2,a_2=b_2+\frac{\lambda}{2}a_1$$

写成(8.4.60)的矩阵形式，可求得

$$I-\lambda M=\begin{pmatrix}1 & -\lambda/2\\ -\lambda/2 & 1\end{pmatrix}，\ \det(I-\lambda M)=1-\lambda^2/4，\text{特征值}\ \lambda=\pm2$$

(2) 当$\lambda\neq\pm2$时，

①由

$$a=(I-\lambda M)^{-1}b=\frac{1}{1-\lambda^2/4}\begin{pmatrix}1 & \lambda/2\\ \lambda/2 & 1\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\begin{pmatrix}-2\\ \pi\end{pmatrix}$$

解得

$$a_1=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{\pi\lambda-4}{4-\lambda^2}，\quad a_2=\frac{4}{\sqrt{\pi}}\frac{\pi-\lambda}{4-\lambda^2}$$

将它们代入原方程(8.4.66b)，得到解

$$f(x)=x+2\lambda\frac{\pi\lambda-4}{\pi(4-\lambda^2)}\sin x+4\lambda\frac{\pi-\lambda}{\pi(4-\lambda^2)}\cos x \tag{8.4.67}$$

② 级数解法

如果要用诺伊曼级数的方式来求解，就对原方程做反复迭代如下.

$$f(x)=x+\lambda\int_0^{\pi}\mathrm{d}x'k(x,x')x'+\lambda^2\int_0^{\pi}\mathrm{d}x'\int_0^{\pi}\mathrm{d}x''k(x,x')k(x',x'')x''+\cdots \tag{8.4.68}$$

其中核函数是$k(x,x')=\dfrac{1}{\pi}\sin(x+x')$.

收敛性判据：对照(8.4.63)，$|k(x,x')|\leq 1/\pi$，得到，$|\lambda|<1$时可以采用级数展开法.

另一方面，由(8.4.64)，可算得

$$\frac{|\lambda|}{\pi}\left[\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}\sin^2(x+x')\mathrm{d}x\mathrm{d}x'\right]^{1/2}=\frac{|\lambda|}{\sqrt{2}}<1 \tag{8.4.69}$$

即$|\lambda|<\sqrt{2}$时，级数收敛.

由此例可见，由条件(8.4.64)得到的$|\lambda|$的上限比由条件(8.4.63)得到的数值确实要大.

这时可做迭代.

$$f_0(x)=x\,, \tag{8.4.70a}$$

$$f_1(x)=x+\lambda(\cos x-\frac{2}{\pi}\sin x)\,, \tag{8.4.70b}$$

$$f_2(x)=x+\lambda(\cos x-\frac{2}{\pi}\sin x)+\lambda^2(\frac{1}{2}\sin x-\frac{1}{\pi}\cos x)\,, \tag{8.4.70c}$$

……

图 8.1 给出在$\lambda=1$情形下，精确解与迭代解的比较.$\lambda=1$时，$f_2(x)$已是精确解的很好近似.

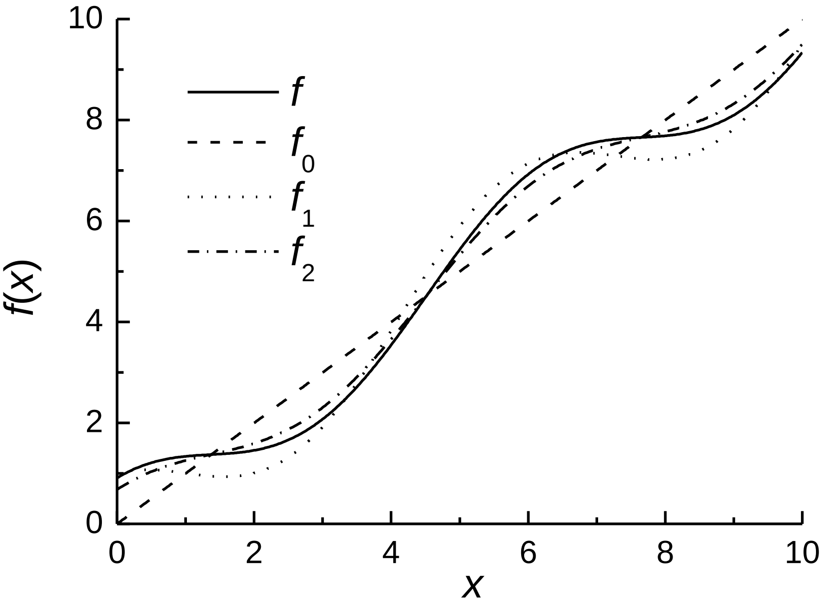

图 8.1 参数$\lambda=1$时函数$f(x)$的精确解与前三个诺伊曼迭代式$f_0(x), f_1(x), f_2(x)$的比较.

应该说明的是，(8.4.67)是对于任何$\lambda\neq\pm 2$成立的精确解，而(8.4.68)或者(8.4.70)只是对$|\lambda|<\sqrt{2}$适用的近似解.

(3) 齐次特征方程

这时(8.4.66b)写成

$$f_i(x)=a_1\lambda_i\frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}+a_2\lambda_i\frac{\cos x}{\sqrt{\pi}} \tag{8.4.71}$$

其中$\lambda=\lambda_i$是矩阵M的特征值.

当$\lambda=\pm 2$时，$\det(I-\lambda M)=0$.这时的特征值方程没有重根，每一个特征值的秩都是 1，即$\lambda=2$和$\lambda=-2$都只有一个特征函数.由齐次线性代数方程组

$$\begin{pmatrix}1 & -\lambda_i/2\\ -\lambda_i/2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{i,1}\\ a_{i,2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$$

求得

$$\lambda_1 = 2, a = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \lambda_2 = -2, a = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

代入(8.4.63)，得到两个特征函数分别是

$$\begin{cases} f_+(x) = A_+(\sin x + \cos x) \\ f_-(x) = A_-(\sin x - \cos x) \end{cases} \tag{8.4.72}$$

归一化的函数是

$$f_+(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(x + \frac{\pi}{4}), \ f_-(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(x - \frac{\pi}{4})$$

齐次方程

$$f(x) = \pm 2 \int_0^{\pi} \frac{\sin(x + x')}{\pi} f(x') \mathrm{d}x' \tag{8.4.73}$$

的解分别是(8.4.72)的两个特征函数.

若本题(8.4.65)式的自由项 $g(x) = x \neq 0$，

$$f(x) = x \pm 2 \int_0^{\pi} \frac{\sin(x + x')}{\pi} f(x') \mathrm{d}x' = x \pm \lambda_i \left(a_1 \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}} + a_2 \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}} \right) \tag{8.4.74}$$

容易计算 $(g, f_+) \neq 0$，$(g, f_-) \neq 0$，因此，当 $\lambda = \pm 2$ 时方程(8.4.74)均无解.

§8.5 卷积型积分方程的求解

8.5.1 弗雷德霍姆卷积型积分方程

对于弗雷德霍姆卷积型积分方程，当求解区域 $[a,b]$ 是整个实轴时，可以用傅里叶变换的方法来求解.

我们先简短回顾傅里叶变换的公式.傅里叶变换和逆变换的公式是

$$Q(q) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}qx} \mathrm{d}q \tag{8.5.1}$$

和

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Q(q) \mathrm{e}^{\mathrm{i}qx} \mathrm{d}q \tag{8.5.2}$$

用一个线性积分算子 F 来表示傅里叶变换，那么

$$Q = F[f], \quad f = F^{-1}[Q] \tag{8.5.3}$$

若函数 $f(x)$ 是以下形式

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x - x_1) f_2(x_1) \mathrm{d}x_1 \tag{8.5.4}$$

简记为 $f = f_1 * f_2$.卷积具有性质 $f_1 * f_2 = f_2 * f_1$.

卷积的傅里叶变换公式是：

$$F[f_1 * f_2] = F[f_1] \cdot F[f_2] \tag{8.5.5}$$

这一公式称为卷积定理.傅里叶变换和逆变换的具体公式有表可查.

1. 第二类弗雷德霍姆卷积型积分方程

此时的卷积方程为

$$\int_{-\infty}^{\infty} k(x-y) f(y)\mathrm{d}y + g(x) = f(x) \tag{8.5.6}$$

对两边做傅里叶变换.记

$$Q = F[f]，G = F[g]，K = F[k] \tag{8.5.7}$$

变换的结果为

$$K(q)\ Q(q) + G(q) = Q(q) \tag{8.5.8}$$

当$1-K(q) \neq 0$时，由此解得

$$Q(q) = \frac{G(q)}{1-K(q)} \tag{8.5.9}$$

然后做傅里叶反变换，得到解函数.

$$f(x) = F^{-1}[Q(k)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{G(k)}{1-K(k)} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\mathrm{d}k \tag{8.5.10}$$

2. 第一类弗雷德霍姆卷积型积分方程

此时的卷积方程为

$$\int_{-\infty}^{\infty} k(x-y) f(y)\mathrm{d}y = g(x) \tag{8.5.11}$$

对两边做傅里叶变换.变换的结果为

$$K(q)\ Q(q) = G(q) \tag{8.5.12}$$

当$K(q) \neq 0$时，由此解得

$$Q(q) = \frac{G(q)}{K(q)} \tag{8.5.13}$$

然后做傅里叶反变换，得到

$$f(x) = F^{-1}[Q(q)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{G(q)}{K(q)} \mathrm{e}^{\mathrm{i}qx}\mathrm{d}q \tag{8.5.14}$$

此外，当核正好是正弦函数或者余弦函数，而求解区域$[a,b]$是正半轴时，可以用傅里叶正弦变换或者是傅里叶余弦变换来求解.具体的公式有表可查.

例 1 当(8.5.11)式中的核函数恰好是费米分布函数

$$k(x) = \frac{1}{\mathrm{e}^x + 1} \tag{8.5.15}$$

时，求函数 $f(x)$的表达式.

解 首先要计算核函数的傅里叶变换.

$$K(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\omega}}{\mathrm{e}^{x}+1}\mathrm{d}x \tag{8.5.16}$$

在上半平面补上回路积分.一级极点在 $x=(2n+1)\pi\mathrm{i}$ 处.因此

$$K(\omega)=2\pi\mathrm{i}\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega(2n+1)\pi\mathrm{i}}=2\pi\mathrm{i}\frac{\mathrm{e}^{-\omega\pi}}{1-\mathrm{e}^{-\omega2\pi}}=\frac{\pi\mathrm{i}}{\sinh\omega\pi} \tag{8.5.17}$$

原方程的解为

$$\begin{aligned}f(x)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{G(\omega)}{K(\omega)}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\omega}\mathrm{d}\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sinh\omega\pi}{\pi\mathrm{i}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\omega}\int_{-\infty}^{\infty}g(x')\mathrm{e}^{\mathrm{i}x'\omega}\mathrm{d}x'\mathrm{d}\omega\\&=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{-\infty}^{\infty}g(x')\mathrm{d}x'\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(x'-x)\omega}\sinh\omega\pi\mathrm{d}\omega\end{aligned} \tag{8.5.18}$$

其中把 $g(x)$的傅里叶变换式 $G(\omega)$代入.最后一步中的积分是双曲正弦函数的傅里叶变换.可由数学手册查得此傅里叶变换：

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(x'-x)\omega}\sinh\omega\pi\mathrm{d}\omega=\delta(x'-x-\mathrm{i}\pi)-\delta(x'-x+\mathrm{i}\pi) \tag{8.5.19}$$

因此，

$$\begin{aligned}f(x)&=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{-\infty}^{\infty}g(x')\mathrm{d}x'[\delta(x'-x-\mathrm{i}\pi)-\delta(x'-x+\mathrm{i}\pi)]\\&=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}[g(x+\mathrm{i}\pi)-g(x-\mathrm{i}\pi)]\end{aligned} \tag{8.5.20}$$

其中利用了(5.1.24)式.最后的表达式可以写成更为简洁的形式，

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}[g(x+\mathrm{i}\pi)-g(x-\mathrm{i}\pi)]=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}[g^{*}(x-\mathrm{i}\pi)-g(x-\mathrm{i}\pi)]=-\frac{1}{\pi}\operatorname{Im}g(x-\mathrm{i}\pi) \tag{8.5.21}$$

对于给定的函数 g，立即可写出待求函数 f.

8.5.2 沃尔泰拉卷积型积分方程

对于沃尔泰拉型积分方程，当积分下限是 $a=0$ 时，可以用拉普拉斯变换来求解.

我们先简短回顾拉普拉斯变换的公式.拉普拉斯变换的公式是

$$Q(p)=\int_{0}^{\infty}f(x)\mathrm{e}^{-px}\mathrm{d}x \tag{8.5.22}$$

用一个线性积分算子 L 来表示拉普拉斯变换，那么

$$Q=L[f] \tag{8.5.23}$$

这是由本函数 f 求出像函数 Q 的变换公式.由像函数求出本函数的逆变换记为

$$f=L^{-1}[Q] \tag{8.5.24}$$

若函数 $f(x)$ 是以下形式

$$f(x)=\int_0^x f_1(x-x_1)f_2(x_1)\mathrm{d}x_1 \tag{8.5.25}$$

简记为 $f=f_1*f_2$.卷积具有性质 $f_1*f_2=f_2*f_1$.

卷积的拉普拉斯变换公式是：

$$L[f_1*f_2]=L[f_1]\cdot L[f_2] \tag{8.5.26}$$

这一公式也称为卷积定理.拉普拉斯变换和逆变换的具体公式有表可查.

(1) 第二类弗沃尔泰拉卷积型积分方程

此时的卷积方程为

$$\int_0^x k(x-y)f(y)\mathrm{d}y+g(x)=f(x) \tag{8.5.27}$$

对两边做拉普拉斯变换.记

$$Q=L[f],\ G=L[g],\ K=L[k] \tag{8.5.28}$$

变换的结果为

$$K(p)\,Q(p)+G(p)=Q(p) \tag{8.5.29}$$

当$1-K(p)\neq 0$时，由此解得

$$Q(p)=\frac{G(p)}{1-K(p)} \tag{8.5.30}$$

然后做拉普拉斯反变换，得到

$$f(x)=L^{-1}[Q(p)] \tag{8.5.31}$$

例 2 求解

$$f(x)=\sin x+2\int_0^x \cos(x-y)f(y)\mathrm{d}y$$

解 按照(8.5.28)式作拉普拉斯变换，有

$$G(p)=L[\sin x]=\frac{1}{p^2+1},K(p)=L[2\cos(x)]=\frac{2p}{p^2+1}$$

套用公式(8.5.30)，得

$$Q(p)=\frac{1/(p^2+1)}{1-2p/(p^2+1)}=\frac{1}{(p-1)^2}$$

再查拉普拉斯逆变换表，有公式

$$L[x^n]=\frac{n!}{p^{n+1}},\quad L^{-1}[\frac{n!}{p^{n+1}}]=x^n,\quad L^{-1}[Q(p-\alpha)]=\mathrm{e}^{\alpha x}L^{-1}[Q(p)] \tag{8.5.32}$$

得到原方程的解，

$$f(x)=L^{-1}[\frac{1}{(p-1)^2}]=x\mathrm{e}^x$$

(2) 第一类沃尔泰拉卷积型积分方程

此时的卷积方程为

$$\int_0^x k(x-y)f(y)\mathrm{d}y=g(x) \tag{8.5.33}$$

对两边做拉普拉斯变换.变换的结果为

$$K(p)\,Q(p)=G(p) \tag{8.5.34}$$

当$K(p)\neq 0$时，由此解得

$$Q(p)=\frac{G(p)}{K(p)} \tag{8.5.35}$$

然后再按(8.5.31)式得到解函数.

例 3 求解

$$x^3=\int_0^x[1-4(x-y)+\frac{3}{2}(x-y)^2]f(y)\mathrm{d}y$$

解 对方程两边做拉普拉斯变换.利用拉普拉斯变换公式(8.5.32)，得到

$$G(p)=\frac{3!}{p^4},K(p)=\frac{1}{p}-\frac{4}{p^2}+\frac{3}{p^3}=\frac{p^2-4p+3}{p^3}$$

代入(8.5.35)式，

$$Q(p)=\frac{6}{p^4}\frac{p^3}{p^2-4p+3}=\frac{6}{p(p-1)(p-3)}=\frac{3}{p}(\frac{1}{p-3}-\frac{1}{p-1})=\frac{1}{p-3}-\frac{3}{p-1}+\frac{2}{p}$$

拉普拉斯逆变换的结果仍参照(8.5.32)式得：

$$f(x)=L^{-1}[\frac{1}{p-3}-\frac{3}{p-1}+\frac{2}{p}]=\mathrm{e}^{3x}-3\mathrm{e}^{x}+2$$

例 4 求解积分方程

$$x^\alpha=\int_0^x(x-y)^\beta f(y)\mathrm{d}y,\alpha\geq 0,\beta>-1$$

解 对方程两边做拉普拉斯变换.

$$L[x^\alpha]=L[x^\beta]Q(p)$$

当α非整数时有如下一对拉普拉斯变换与逆变换.

$$L[x^\alpha]=\frac{\Gamma(\alpha+1)}{p^{\alpha+1}},\quad L^{-1}[\frac{1}{p^\alpha}]=\frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$$

因此

$$\frac{\Gamma(\alpha+1)}{p^{\alpha+1}}=\frac{\Gamma(\beta+1)}{p^{\beta+1}}Q(p)$$

解得

$$Q(p)=\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\beta+1)p^{\alpha-\beta}}$$

由逆变换得到原方程解

$$f(x)=L^{-1}[Q(p)]=\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\beta+1)}\,L^{-1}[\frac{1}{p^{\alpha-\beta}}]=\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\beta+1)\Gamma(\alpha-\beta)}\,x^{\alpha-\beta-1}$$

3. 非线性沃尔泰拉卷积型积分方程

对于下述特殊的卷积方程

$$\lambda\int_0^x f(x-y)f(y)\mathrm{d}y+g(x)=f(x) \tag{8.5.36}$$

也可以用拉普拉斯变换来求解.因为尽管这个方程是非线性的，积分项恰好是卷积的形式.对此式两边做拉普拉斯变换，得到

$$\lambda\,Q(p)\,Q(p)+G(p)=Q(p)$$

于是

$$\lambda\,Q(p)\,Q(p)-Q(p)+G(p)=0 \tag{8.5.37}$$

解得

$$Q(p)=\frac{1}{2\lambda}\left[1\pm\sqrt{1-4\lambda G(p)}\right] \tag{8.5.38}$$

然后做逆变换 $f(x)=L^{-1}[Q(p)]$ 得到原方程的解.

例 5 求解下述积分方程

$$\lambda\int_0^x f(x-y)f(y)\mathrm{d}y=\frac{x^3}{6}$$

解 两边做拉普拉斯变换的结果是

$$\lambda Q^2(p)=\frac{1}{p^4}$$

因此

$$Q(p)=\pm\frac{1}{\sqrt{\lambda}\,p^2}$$

逆变换之后得到解为

$$f(x)=\pm\frac{x}{\sqrt{\lambda}}$$

本章重点

弗雷德霍尔姆线性积分方程的迭代技术及其三个收敛条件(8.2.18),(8.2.19),(8.2.24)。

用权函数法来选择积分算子的权函数。

非线性沃尔泰拉积分方程迭代收敛的三个条件(8.3.6),(8.3.16),(8.3.17)。

可分核弗雷德霍尔姆积分方程的求解。

有限秩核弗雷德霍尔姆积分方程的求解过程。

小贴士

本学期学习高等量子力学课程的同学，在学习理论这部分的内容的时候，可以把本章8.2.1小节的内容，特别是李普曼-许温格方程相应的内容结合起来学习。可以两相对照一下。在高量中，方程主要是以算子作用在态上的形式写出来的。本章 8.2.1 小节中第 4 部分的内容，则都是按照已经坐落在坐标表象中的形式写出来的。

通过本章 8.2.1 小节中第 4 部分的内容，1.体会将微分方程化成积分方程来求解。2.体会在求解积分方程时，运用格林函数。

本章 8.4.2 小节介绍了有限秩核积分方程的弗雷德霍尔姆择一定理，第二章 2.2.2 小节介绍了齐次线性代数方程组有解的择一定理，第三章 3.8 节介绍了微分方程有解条件的择一定理。可将这三个定理做对照，找出它们的共同点。

布置习题：
做以下习题 1,5,6，10，11，13，24，此外，再任选 5 题。

习题

1. 证明(8.1.21)是满足(8.1.20)的边界条件的，对(8.1.21)式求两次导得到(8.1.20).反之，如何从(8.1.20)得到(8.1.21)式？

2. 沃尔泰拉积分方程(8.1.24)与二阶微分方程(8.1.23)是等价的.其中系数 A 和 B 由边界条件或者初始条件决定.请对于下列条件确定各自的系数 A 和 B.

(1) $f(a)=\alpha, f(b)=\beta$

(2) $f(a)=\alpha, f'(a)=\beta$

(3) $f(b)=\alpha, f'(b)=\beta$

3. 证明(8.2.56)式.并证明当 N 趋于无穷时，$\sum_{n=0}^{N}\lambda^n \tilde{g}_n(x)$ 一致收敛于(8.1.10)式的解 $f(x)$.

4. 验证以下沃尔泰拉积分方程的解.

(1) 验证，$f(x)=1-x$ 是积分方程 $\int_0^x \mathrm{d}y \mathrm{e}^{x-y} f(y)=x$ 的解.

(2) 验证，$f(x)=\dfrac{1}{\pi\sqrt{x}}$ 是积分方程 $\int_0^x \dfrac{f(y)}{\sqrt{x-y}}\mathrm{d}y=1$ 的解.

5. 把以下微分方程的定解问题化为对应的积分方程.

(1) $y''+y=\cos x,\ \ y(0)=0, y'(0)=1$

(2) $y''+(1+x^2)y=\cos x,\ \ y(0)=0, y'(0)=2$

(3) $y''+4y=\varphi(x),\ \ 0<x<\pi/2,\qquad y(0)=0, y(\pi/2)=0$

6. 把以下积分方程化为微分方程再求解.

(1) $x-\int_0^x \mathrm{d}y \mathrm{e}^{x-y} f(y)=f(x)$

(2) $\int_0^x \mathrm{d}y \mathrm{e}^{x-y} f(y)=x$

(3) $1+2\int_0^x \frac{2y+1}{(2x+1)^2} f(y)\mathrm{d}y = f(x)$

7. 证明：若$k(x,y)$是厄米的，则它的 n 次叠核$k_n(x,y)$也是厄米的.

8. 用迭代法求解下列积分方程.

(1) $f(x)=1+\lambda\int_0^\infty \mathrm{d}y\mathrm{e}^{-(x+y)} f(y)=1+\lambda\mathrm{e}^{-x}(\mathrm{e}^{-y}, f)$

(2) $f(x)=1+\lambda\int_0^x \mathrm{d}y f(y)$

在什么λ值，迭代法收敛？

9. 用迭代法求解下列积分方程.

(1) $f(x)=\frac{5}{6}x+\frac{1}{2}\int_0^1 \mathrm{d}y f(y)xy$

(2) $f(x)=\mathrm{e}^x-\frac{1}{2}\mathrm{e}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\int_0^1 \mathrm{d}y f(y)$

(3) $f(x)=1+\int_0^x \mathrm{d}y f(y)(y-x)$

(4) $f(x)=x+\int_0^x \mathrm{d}y f(y)(y-x)$

10. 求解如下积分方程.

(1) $f(x)=\sin x-\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}\int_0^{\pi/2} \mathrm{d}y f(y)xy$

(2) $f(x)=1-2x-4x^2+\int_0^x \mathrm{d}y f(y)[3+6(x-y)-4(x-y)^2]$

11. 在(8.2.38e)式两边乘以$[V(\boldsymbol{r})]^{1/2}$，假设$V(\boldsymbol{r})$不为负.证明，如果我们定义

$$\tilde{\psi}(\boldsymbol{r})=[V(\boldsymbol{r})]^{1/2}\psi(\boldsymbol{r}),\tilde{\varphi}(\boldsymbol{r})=[V(\boldsymbol{r})]^{1/2}\varphi(\boldsymbol{r})$$

和$\tilde{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',E)=[V(\boldsymbol{r})]^{1/2}G_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',E)[V(\boldsymbol{r}')]^{1/2}$，那么，

$$\tilde{\psi}(\boldsymbol{r})=\tilde{\varphi}(\boldsymbol{r})+\int \tilde{k}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',E)\tilde{\psi}(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\boldsymbol{r}'$$

把核为$\tilde{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',E)$的线性积分算子称为$\tilde{K}$.证明，$\tilde{K}$的范数和由权函数方法得到的(8.2.38e)的积分算子的范数相同.也证明，假如我们对$\tilde{\psi}(\boldsymbol{r})$的方程进行迭代，$[V(\boldsymbol{r})]^{1/2}$在计算中实际上从未出现，即除了乘一个因子$[V(\boldsymbol{r})]^{1/2}$外，解是$\tilde{\psi}(\boldsymbol{r})$的通常的玻恩级数.

12. 当$V(\boldsymbol{r})=V_0\mathrm{e}^{-\mu r}$时，估计李普曼-许温格方程的核的范数.按照这个估计，V_0在取什么值的时候玻恩级数收敛？

13. 对于具有δ势的一维薛定谔方程，$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\psi(x)-V_0\delta(x)\psi(x)=E\psi(x)$

(1) 当$V_0>0$，证明，不管V_0的值多大，在这个势场中有且仅有一个束缚态，确定这个束缚态的能量和波函数.

(2) 当$V_0<0$，具有正能量E的一个粒子从远处入射时，其中有多大部分穿透势垒？多大部分被粒子反射？

14. 利用权函数方法，证明在一维情形下，只要$\frac{1}{\hbar v}\int_{-\infty}^{\infty}V(x)\mathrm{d}x<1$，其中$V(x)$是势，那么李普曼-许温格方程的迭代式是收敛的.

15. 证明，如果$V(\boldsymbol{r})$随$\boldsymbol{r}$而改变符号，那么在权函数方法中应该把(8.2.48)式改写成$\rho(\boldsymbol{r})=|V(\boldsymbol{r})|$. 利用这个权函数对李普曼-许温格积分算子的范数给出一个估值.

16. (1) 在一维李普曼-许温格方程中，利用定义$\psi(x)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\phi(x)$，证明$\phi(x)$满足积分方程：

$$\phi(x)=1-\frac{\mathrm{i}m}{\hbar^2k}\int_{-\infty}^{x}V(x')\phi(x')\mathrm{d}x'-\frac{\mathrm{i}m}{\hbar^2k}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\int_{-\infty}^{x}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}kx'}V(x')\phi(x')\mathrm{d}x'$$

(2) 说明当k很大时，也就是入射粒子的能量很大时，上式右边最后一项可忽略.

(3) 忽略最后一项而得到的$\phi(x)$称为$\phi_E(x)$，试证明它满足微分方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\phi_E(x)=-\frac{\mathrm{i}m}{\hbar^2k}V(x)\phi_E(x)$$

而边界条件为$\phi_E(-\infty)=1$.由此证明，$\phi_E(x)=\exp\left\{-\frac{\mathrm{i}m}{\hbar^2k}\int_{-\infty}^{x}V(x')\mathrm{d}x'\right\}$.这个近似称为程函近似.在三维情形下它的推广结果在分析某些高能散射问题中被证明是有用的.

(4) 当$V(x)=\begin{cases}V_0, & |x|\le a/2\\ 0, & |x|>a/2\end{cases}$，证明 1)中的方程的最后一项在$k\to\infty$时确实是小的.在积分中由3)给出的$\phi_E(x)$代替$\phi(x)$来进行计算，得到的积分是简单的，证明，这一项的数值小于$\frac{1}{2}\left|\frac{E}{V_0}-\frac{1}{4}\right|^{-1}$，所以当$E\gg V_0$时这一项是小的.

17. 编程计算(8.3.23a) (8.3.23b) (8.3.23c)的$x_0(t),x_1(t),x_2(t)$并画出曲线.

18. 在非线性的沃尔泰拉积分方程中，将积分上限x代之以区间的上限b，就得到非线性的弗雷德霍姆积分方程.我们已经在 8.3.3 小节利用收缩算子的概念叙述了非线性的沃尔泰拉积分方程迭代求解的条件.请用同样的形式，叙述非线性的弗雷德霍姆积分方程迭代求解的条件.

19. 证明在(8.4.11)的条件下，式(8.4.12)就是方程(8.4.3)的解.

20. 考虑阻尼谐振子的方程$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}x(t)+2\gamma\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t)+\omega_0{}^2x(t)=0$，

(1) 证明，假如$x(0)=x_0,\dot{x}(0)=0$，那么$x(t)$满足积分方程

$$x(t)=x_0\cos\omega_0t+\frac{2\gamma}{\omega_0}x_0\sin\omega_0t-2\gamma\int_0^t dt'\cos[\omega_0(t-t')]x(t')$$

(2) 将这个方程迭代几次，证明所得的结果与把精确解展开到相应的阶的结果一致.

21. 对于具有形式为$-g^2v(r)v(r')$，$v(r)=\mathrm{e}^{-\mu r}/r$的可分势的薛定谔方程，求它的唯一束缚态

解.证明，当且仅当 $g^2 > \hbar^2\mu^3/4\pi m$，其中 m 是束缚粒子的质量，束缚态才存在.同时证明束缚态的能量是 $E_B = -\frac{1}{2m}[(\frac{4\pi m g^2}{\mu\hbar^2})^{1/2} - \mu]$.束缚态的波函数是什么？

22. 考虑量 $f^s(E) = \frac{2\tau}{(q_i^2+\mu^2)^2 + (q_i - \mathrm{i}\mu)^2/\mu}$，其中 $\tau = 4\pi m g^2/\hbar^2$，$q_i = \sqrt{2mE/\hbar^2}$.证明，若 E 是复数，那么 $f^s(E)$ 是在沿着正实 E 轴割开的两叶黎曼面上的单值函数.证明，$f^s(E)$ 作为 E 的函数，除了在第一叶上 $E = -\mu^2\hbar^2/2m$ 处有一个二级极点，在第二叶上 $E = -(\sqrt{\tau/\mu}+\mu)^2\hbar^2/2m$ 处有一个一级极点.还有一个束缚态极点，它可以在第一叶或第二叶上.假如 $\sqrt{\tau/\mu} < \mu$，这个束缚态在第二叶上，$E = -(\sqrt{\tau/\mu}-\mu)^2\hbar^2/2m$.假如 $\sqrt{\tau/\mu} > \mu$，这个束缚态在第一叶上，$E = -(\mu - \sqrt{\tau/\mu})^2\hbar^2/2m$.这个 E 值恰好是上题中确定的束缚态的能量.因此我们看到，当 g^2 的值降到产生一个束缚态所需要的临界值以下时，束缚态的效应并不是从散射振幅中不可思议地消失.束缚态相应的极点只是从第一叶(物理叶)移到了第二叶上.

23. 证明(8.4.69)式.

24. 求下列可分核积分方程的解.

(1) $f(x) = 2x - \pi + 4\int_0^{\pi/2} \sin^2 x f(y)\mathrm{d}y$

(2) $f(x) = 1 + \lambda\int_0^1 \cos(q\ln y) f(y)\mathrm{d}y$

(3) $f(x) = \sin x + \lambda\int_0^{\pi/2} \sin x\cos y f(y)\mathrm{d}y$

(4) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \lambda\int_0^1 \cos^{-1} x f(y)\mathrm{d}y$

(5) $f(x) = x + \lambda\int_0^{2\pi} \sin x\,|\pi - y|\, f(y)\mathrm{d}y$

25. 分别取 $\lambda = -3, 1.8$ 按照式(8.4.70)数值计算到 $f_2(x)$，画出曲线.你认为这两个λ值的迭代结果是否收敛？

26. 求解积分方程 $f(x) = \sin x + \cos x + \lambda\int_0^{\pi} \frac{\sin(x+x')}{\pi} f(x')\mathrm{d}x'$.

27. 求解方程

(1) $f(x) = x + \lambda\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-(x+y)} f(y)\mathrm{d}y$

(2) $f(x) = x + \frac{\lambda}{\pi}\int_0^{\pi/2} \mathrm{d}y\cos(x+y) f(y)$

28. 积分方程 $f(x) = x + (\lambda/\pi)\int_0^{\pi} x'\sin(x+x') f(x')\mathrm{d}x', x\in[0,\pi]$

(1) 考虑用级数展开法求解.为此先要估计能够使级数收敛的λ值的上限.

(i) 用 $\max\limits_{x,y\in[a,b]}|k(x,y)|=M$， $\lambda<1/M(b-a)$ 的条件，估计λ值的上限.

(ii) 用估计积分算子的范数的上限的办法，估计λ值的上限.注意选取适当的核函数和积分元，使你得到的λ值的上限尽可能地大.

(iii) 迭代求解至二级项.

(2) 求严格解.λ值是特征值和不是特征值的情况都要考虑到.齐次方程解的情况如何？

29. 考虑积分方程 $f(x)=1+4\int_0^{1/2}\mathrm{d}y\sqrt{1-xy}\,f(y)$.对核分别作以下有限秩近似

(1) $\sqrt{1-xy}\approx 1$，计算得到 $f_1(x)$；

(2) $\sqrt{1-xy}\approx 1-\dfrac{1}{2}xy$，计算得到 $f_2(x)$；

(3) $\sqrt{1-xy}\approx 1-\dfrac{1}{2}xy-\dfrac{1}{8}x^2y^2$，计算得到 $f_3(x)$；

将所得函数 $f_1(x)$， $f_2(x)$， $f_3(x)$ 进行比较.

30. 算子 K_F 和 R_{K_F} 的定义 $K_F f\equiv\sum\limits_{n=1}^{N}\phi_n(\psi_n,f)$

和 $R_{K_F} f\equiv\sum\limits_{n=1}^{N}\sum\limits_{m=1}^{N}[(I-\lambda A)^{-1}]_{nm}\phi_n(\psi_m,f)$

证明： $(1-\lambda K_F)(1+\lambda R_{K_F})=I$

31. 三个算子 $K,\ K_N$ 和 P_N 的定义式如下： $Kf\equiv\int_a^b k(x,y)f(y)\mathrm{d}y$，

$K_N f\equiv\sum\limits_{m,n=1}^{N}(\phi_n,f)(\phi_n\phi_m^*,k)(\phi_m,f)$， $P_N f\equiv\sum\limits_{n=1}^{N}(\phi_n,f)\phi_n$， 证明： $P_NKP_N=K_N$.

32. 证明(8.5.19)式.证明(8.5.21)式.

33. 用拉普拉斯变换求解第二类沃尔泰拉积分方程

(1) $x\mathrm{e}^{2x}-\int_0^x \mathrm{e}^{2(x-y)}f(y)\mathrm{d}y=f(x)$

(2) $1+x+\int_0^x \mathrm{e}^{-n(x-y)}f(y)\mathrm{d}y=f(x)$

(3) $\sin x-\int_0^x \sinh(x-y)f(y)\mathrm{d}y=f(x)$

(4) $1+\int_0^x \sin(x-y)\cos(x-y)f(y)\mathrm{d}y=f(x)$

(5) $1-2x-4x^2+\int_0^x[3+6(x-y)-4(x-y)^2]f(y)\mathrm{d}y=f(x)$

(6) $1+x\cos x-\sin x+\int_0^x(x-y)\sin(x-y)f(y)\mathrm{d}y=f(x)$

(7) $\dfrac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{e}^{-a/4x}+\int_0^x\dfrac{f(y)}{\sqrt{x-y}}\mathrm{d}y=f(x)$

34. 用拉普拉斯变换求解第一类沃尔泰拉积分方程

(1) $\int_0^x e^{-(x-y)} f(y)dy = e^{-x} + x - 1$

(2) $\int_0^x \cos(x-y) f(y)dy = x\sin x$

(3) $\int_0^x (x-y) f(y)dy = \cosh x - 1$

(4) $\int_0^x \sqrt{x-y} f(y)dy = x^2\sqrt{x}$

(5) $\int_0^x (x-y)\sin(x-y) f(y)dy = \sin^2 x$

35. 证明：对任何 $g(x)$，积分方程

$$f(x) = \int_0^x \sin(x-y) f(y)dy + g(x)$$

的解为

$$f(x) = \int_0^x (x-y)g(y)dy + g(x)$$

36. 证明积分方程

$$f(x) = a + bx + \int_0^x dy f(y)[c + d(x-y)]$$

有解 $f(x) = Ae^{\alpha x} + Be^{\beta x}$，其中 A, B, α, β 依赖于 a, b, c, d

37. 求解下列卷积型沃尔泰拉积分方程.

(1) $\int_0^x f(x-y)f(y)dy = A^2 x^\alpha$

(2) $\int_0^x f(x-y)f(y)dy = A^2 e^{\beta x}$

(3) $\int_0^x f(x-y)f(y)dy = A^2 x^\alpha e^{\beta x}$

(4) $\int_0^x f(x-y)f(y)dy = A\sin\alpha x$

(5) $\int_0^x f(x-y)f(y)dy = Ae^{\beta x}\sin\alpha x$

38. 证明非线性积分方程 $2f(x) = \int_0^x f(x-y)f(y)dy + g(x)$ 的解的拉普拉斯变换为 $Q(p) = \dfrac{G(p)}{1+\sqrt{1-G(p)}}$，其中 $Q(p) = [f(x)], G(p) = L[g(x)]$.

(1) 证明，当 $g(x) = \sin x$ 时，原方程的解为 $f(x) = J_1(x)$.

(2) 当 $g(x) = -\sinh x$ 时，原方程的解是什么？