第一章 变分法 习题

2 求以下泛函的全增量和变分.

(1) $J[y]=\int_a^b\sqrt{1+y'^2}\mathrm{d}x$. 答案：$\delta J=\int_a^b\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}\delta y'\mathrm{d}x$

(2) $J[y]=\int_{x_0}^{x_1}(x^2y+y^2+yy')\mathrm{d}x$.

答案：全增量$\Delta J=\int_{x_0}^{x_1}[(x^2+2y+y')\delta y+y\delta y']\mathrm{d}x+\int_{x_0}^{x_1}[\delta y\delta y'+(\delta y)^2]\mathrm{d}x$

变分 $\delta J=\int_{x_0}^{x_1}[(x^2+2y+y')\delta y+y\delta y']\mathrm{d}x$

(3) $J[y]=\int_0^1 y^3y'^2\mathrm{d}x$,条件是$y(0)=1$，(提示：在变分表达式中，把$\delta y'$消去).

答案：

$$\delta J=2y^3(1)y'(1)\delta y(1)-2y'(0)\delta y(0)+\int_0^1(3y^2y'^2-6y^2y'^2-2y^3y'')\delta y\mathrm{d}x$$

3 设两端点固定，求下列泛函的极值曲线：

(1) $J=\int_{x_0}^{x_1}\sqrt{y(1+y')^2}\mathrm{d}x$. 答案：$y=\frac{1}{2C_2}(x+C_0)^2+C_2$

(2) $J=\int_{x_0}^{x_1}\frac{1+y^2}{y'^2}\mathrm{d}x$. 答案：$y=\sinh(C_3x+C_1)$

4 求以下泛函的带端点条件的极值曲线，并通过考察全增量判断所得曲线使泛函J取极小值.

(1) $J[y]=\int_0^2(xy'+y'^2)\mathrm{d}x$，$y(0)=1,y(2)=0$.

答案：极值曲线为：$y=-\frac{1}{4}x^2+1$.

考察泛函的增量，$\Delta J=\delta J+\int_0^2(\delta y'^2)\mathrm{d}x$，由于$\int_0^2(\delta y'^2)\mathrm{d}x\geq 0$，所以$\Delta J\geq 0$，曲线使泛函数取极小值。

(2) $J[y]=\int_0^1(12xy+yy'+y'^2)\mathrm{d}x, y(0)=1, y(1)=4.$

答案：极值曲线为：$y=x^3+2x+1$.

$\Delta J=\delta J+\int_0^1(\delta y\delta y'+\delta y'^2)\mathrm{d}x$，可得：$\int_0^1(\delta y\delta y')\mathrm{d}x=\frac{1}{2}(\delta y^2)_0^1\geq 0$.

因此$\int_0^1(\delta y\delta y'+\delta y'^2)\mathrm{d}x\ge 0$，所以$\Delta J\ge 0$，曲线使泛函数取极小值。

6 求下列泛函的极值曲线所应满足的微分方程.

(1) $J[y]=\int_{x_0}^{x_1}(16y^2-y''^2+x^2)\mathrm{d}x$.

(2) $J[y]=\int_{x_0}^{x_1}(y'''+2xy)\mathrm{d}x$.

答案：欧拉方程是：$F_y-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'}+\frac{\mathrm{d}^2F_{y''}}{\mathrm{d}x^2}-\frac{\mathrm{d}^3F_{y'''}}{\mathrm{d}x^3}=0$.

一般地，对于被积函数是$F(x,y,y',y'',\cdots,y^{(n)})$，得到欧拉方程是

$$F_y-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(F_{y'})+\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}(F_{y''})-\cdots(-1)^n\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(F_{y^{(n)}})=0.$$

(1) 答案：$y=C_1\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x}+C_2\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}+C_3\mathrm{e}^{-2x}+C_4\mathrm{e}^{2x}$。

(2) 答案 $y=\frac{1}{7!}x^7+\frac{1}{5!}C_1x^5+\frac{1}{4!}C_2x^4+\frac{1}{6}C_3x^3+\frac{1}{2}C_4x^2+C_5x+C_6$

7 求下列泛函的极值曲线.

(1) $J[y,z]=\int_{x_0}^{x_1}(2yz-2y^2+y'^2-z'^2)\mathrm{d}x$.

答案：$y=(C_1x+C_2)\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}+(C_3x+C_4)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}$，$z=2y+y''$

(2) $J[y,z]=\int_{x_0}^{x_1}(y'^2+z'^2+y'z')\mathrm{d}x$. 答案： $y=C_1x+C_2, z=C_3x+C_4$

8 写出下列泛函的奥氏方程：

(1) $J[z(x,y)]=\iint\limits_D\left[\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2-\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$. 答案：$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$

(2) $J[u(x,y,z)]=\iiint\limits_V\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2+2uf(x,y,z)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.

答案：$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=f(x,y,z)$

10 求下列等周问题的极值曲线.

(1)泛函 $J[y]=\int_0^1(y'^2+x^2)\mathrm{d}x, y(0)=0, y(1)=0$，等周条件：$\int_0^1 y^2\mathrm{d}x=2$.

答案：$y=\pm 2\sin k\pi x$。把这两个解代入泛函的表达式，发现结果是一样的.

(3) $J[y,z]=\int_0^1 (y'^2+z'^2-4xz'-4z)\mathrm{d}x$， $y(0)=z(0)=0; y(1)=z(1)=1$.

$\int_0^1 (y'^2-xy'-z'^2)\mathrm{d}x=2$. 答案：$\lambda=-\dfrac{10}{11}$， $y=-\dfrac{5}{2}x^2+\dfrac{7}{2}x$， $z=x$.

11 求圆柱面 $r=R$ 上的短程线. (提示：用柱面坐标 r,φ,z 求解较便利.)

答案： $z=a\varphi+b$

短程线为螺旋线。可将圆柱面展平，在起始两端之间画一条直线，这就是最短程线。然后再将平面卷回圆柱面，直线就成为螺旋线。

12 写出在条件 $\int_0^{x_1} r(x)y^2\mathrm{d}x=1; y(0)=0, y(x_1)=0$ 下，泛函 $J[y]=\int_0^{x_1}[p(x)y'^2+q(x)y^2]\mathrm{d}x$ 的极值曲线所应满足的微分方程.其中 $r(x),p(x),q(x)$ 是三个固定的已知函数.

答案： $p(x)y''+p'(x)y'-(q(x)+\lambda r(x))y=0; y(0)=0, y(x_1)=0$

13 设函数 $y(x)$ 的左端固定在原点，即 $y(0)=0$，另一边界点在直线 $x=\pi/4$ 上滑动.试求泛函 $J[y]=\int_0^{\pi/4}(y^2-y'^2)\mathrm{d}x$ 的极值曲线.

答案： $y=0$.

15 给定空间某点坐标 (x_0,y_0)，例如 $(0,1)$，画出通过该点的各中参量数值的悬链线，这些线都相切于一根包络线.

答案： $y=C_1\cosh(\dfrac{x-x_0}{C_1}+\cosh^{-1}\dfrac{y_0}{C_1})$.

这就是通过定点 (x_0,y_0) 的单参数悬链线族方程。

16 求泛函 $J[y]=\int_0^1 (y'^2-yy'+y^2)\mathrm{d}x$ 满足下列边界条件的极值曲线.

(1) $y(x)$ 过点 $P_1(0,1)$，在 $x=1$ 处满足自然边界条件.

(2) $y(x)$ 过点 $P_2(1,2)$，在 $x=0$ 处满足自然边界条件.

(3) $y(x)$ 在 $x=0$ 和 $x=1$ 都满足自然边界条件.

答案： $F_{y'}=2y'-y=2(C_1e^x-C_2e^{-x})-(C_1e^x+C_2e^{-x})=C_1e^x-3C_2e^{-x}$.

(1) $y=\frac{3}{3+e^2}e^x+\frac{e^2}{3+e^2}e^{-x}$. (2) $y=\frac{6e}{3e^2+1}e^x+\frac{2e}{3e^2+1}e^{-x}$. (3) $y=0$.

17 证明： (1.7.5)式的拉格朗日量可用电磁场来表达，即写成(1.7.8)式.

原题的仔细表述：证明：$L=-\frac{1}{2\mu}\sum_{ij}F_{ij}F_{ij}+\sum_i J_iA_i$ 可写为：$L=\varepsilon\boldsymbol{E}^2-\frac{\mu}{2}\boldsymbol{B}^2)+\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{A}-\rho\varphi$

证明

利用 $F_{ij}=\frac{\partial A_j}{\partial x_i}-\frac{\partial A_i}{\partial x_j}$

$$
\begin{aligned}
L&=-\frac{1}{2\mu}\sum_{ij}F_{ij}F_{ij}+\sum_i J_iA_i\\
&=-\frac{1}{2\mu}[2(\frac{\partial A_1}{\partial x_2}-\frac{\partial A_2}{\partial x_1})^2+2(\frac{\partial A_1}{\partial x_3}-\frac{\partial A_3}{\partial x_1})^2+2(\frac{\partial A_1}{\partial x_4}-\frac{\partial A_4}{\partial x_1})^2+2(\frac{\partial A_2}{\partial x_3}-\frac{\partial A_3}{\partial x_2})^2\\
&+2(\frac{\partial A_2}{\partial x_4}-\frac{\partial A_4}{\partial x_2})^2+2(\frac{\partial A_3}{\partial x_4}-\frac{\partial A_4}{\partial x_3})^2]+\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{A}-\rho\varphi\\
&=-\frac{1}{\mu}[(\frac{\partial A_1}{\partial x_2}-\frac{\partial A_2}{\partial x_1})^2+(\frac{\partial A_1}{\partial x_3}-\frac{\partial A_3}{\partial x_1})^2+(\frac{\partial A_2}{\partial x_3}-\frac{\partial A_3}{\partial x_2})^2\\
&+(\frac{\partial A_1}{\partial(\mathrm{i}ct)}-\frac{\partial \mathrm{i}\varphi}{c\partial x_1})^2+(\frac{\partial A_2}{\partial(\mathrm{i}ct)}-\frac{\partial \mathrm{i}\varphi}{c\partial x_2})^2+(\frac{\partial A_3}{\partial(\mathrm{i}ct)}-\frac{\partial \mathrm{i}\varphi}{c\partial x_3})^2]+\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{A}-\rho\varphi\\
&=-\frac{1}{\mu}[\boldsymbol{B}^2-\frac{1}{c^2}(\frac{\partial A_1}{\partial t}+\frac{\partial\varphi}{\partial x_1})^2-(\frac{\partial A_2}{\partial t}+\frac{\partial\varphi}{\partial x_2})^2-(\frac{\partial A_3}{\partial t}+\frac{\partial\varphi}{\partial x_3})^2]+\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{A}-\rho\varphi\\
&=\varepsilon\boldsymbol{E}^2-\frac{1}{\mu}\boldsymbol{B}^2+\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{A}-\rho\varphi
\end{aligned}
$$

证毕。

18 从(1.7.32)式的拉格朗日量，得到粒子的运动方程(1.7.32)式.

原题的仔细的表述：从电子在电磁场中做相对论性运动的拉格朗日量

$$L=-mc^2\sqrt{1-v^2/c^2}-e(\varphi-\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{A})$$

得到粒子的运动方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{p}=e(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})$$

解：$L=-mc^2\sqrt{1-v^2/c^2}-e(\varphi-\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{A})$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial v_x}&=\frac{\partial}{\partial v_x}(-mc\sqrt{c^2-v_x^2-v_y^2-v_z^2}-e(\varphi-\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{A}))\\
&=mc\frac{v_x}{\sqrt{c^2-v^2}}+eA_x
\end{aligned}
$$

$$\frac{\partial}{\partial x}L-\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial v_x}L=-e(\frac{\partial}{\partial x}\varphi-\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{A})-mc\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{v_x}{\sqrt{c^2-v^2}}-e\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}A_x=0$$

其中

$$\boldsymbol{v}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{A}-v_x\frac{\partial}{\partial t}A_x=v_x\frac{\partial}{\partial x}A_x+v_y\frac{\partial}{\partial x}A_y+v_z\frac{\partial}{\partial x}A_z-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}A_x$$

$$=(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)A_x-v_x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}A_x-v_y\frac{\partial}{\partial y}A_x-v_z\frac{\partial}{\partial z}A_x+v_y\frac{\partial}{\partial x}A_y+v_z\frac{\partial}{\partial x}A_z$$

$$=-\frac{\partial}{\partial t}A_x+v_y(\frac{\partial}{\partial x}A_y-\frac{\partial}{\partial y}A_x)-v_z(\frac{\partial}{\partial z}A_x-\frac{\partial}{\partial x}A_z)$$

$$=-\frac{\partial}{\partial t}A_x+v_yB_z-v_zB_y=-\frac{\partial}{\partial t}A_x+(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})_x$$

因此

$$-e\frac{\partial}{\partial x}\varphi-mc\frac{d}{dt}\frac{v_x}{\sqrt{c^2-v^2}}-e\frac{\partial}{\partial t}A_x+e(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})_x=0$$

同理写出另外两个分量满足的方程，三式相加，有

$$-e\nabla\varphi-mc\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\boldsymbol{v}}{\sqrt{c^2-v^2}}-e\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{A}+e\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}=0$$

得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{p}=e(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})$$

其中

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{p}=\frac{\boldsymbol{v}}{\sqrt{c^2-v^2}},\boldsymbol{E}=-e\nabla\varphi-\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{A}$$

19 证明：如果取ψ和ψ^*作为独立的场变量，且场的实拉格朗日密度为

$$L=\frac{\hbar^2}{2m}\nabla\psi\cdot\nabla\psi^*+U(r,t)\psi\psi^*-\frac{i\hbar}{2}(\dot{\psi}\psi^*-\psi\dot{\psi}^*)$$

其中∇为梯度算符，$\dot{\psi}$上的一点表示对时间求偏导，$\dot{\psi}=\frac{\partial\psi}{\partial t}$.将这个拉格朗日密度代入欧拉-拉格朗日方程之后，导致一个什么方程?

答案：

$$-i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi^*=-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi^*+U(r,t)\psi^*$$

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi=-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi+U(r,t)\psi$$

这是薛定谔方程及其复共轭方程。

第二章习题

10 由例 10 知设 $X=C[0,2\pi]$，则 $A=\{1,\sin x,\sin 2x,\cdots,\sin nx\}$ 是一线性无关组.定义该空间中两个连续函数 $f_1(x),f_2(x)$ 的内积为 $(f_1,f_2)=\int_0^{2\pi} f_1^*(x)f_2(x)\mathrm{d}x$.证明这组基是正交但不规一的.正交规一基组应该写成什么形式？

答案：正交归一的基组应为 $A'=\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\frac{\sin x}{\sqrt{\pi}},\frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}},\cdots,\frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}\right\}$。

11 在六次多项式空间 $X=P_6[-1,1]$，则 $A=\{1,x,x^2,x^3,x^4,x^5,x^6\}$ 是一线性无关组.定义该空间中两个六次多项式 $f_1(x),f_2(x)$ 的内积为 $(f_1,f_2)=\int_{-1}^{1} f_1^*(x)f_2(x)\mathrm{d}x$.证明这组基非正交规一的.请构造正交规一基组.

答案：构造正交规一基组如下。

$e_1=\frac{1}{\sqrt{2}}$， $e_2=\sqrt{\frac{3}{2}}x$， $e_3=\sqrt{\frac{45}{8}}(x^2-\frac{1}{3})$， $e_4=\sqrt{\frac{175}{8}}(x^3-\frac{3}{5}x)$， $e_5=\frac{105}{8\sqrt{2}}(x^4-\frac{6}{7}x^2+\frac{3}{35})$，

$e_6=\frac{63}{8}\sqrt{\frac{11}{2}}(x^5-\frac{10}{9}x^3+\frac{5}{21}x)$， $e_7=\frac{231}{16}\sqrt{\frac{13}{2}}(x^6-\frac{15}{11}x^4+\frac{5}{11}x^2-\frac{5}{231})$

这组基是前七个勒让德多项式的归一化之后的形式。

15 一个微分算子以及它所作用的函数满足的边界条件如下.

$$Lu(x)=(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}+1)u(x),0<x<1;u(0)-\alpha u(1)=0$$

求其伴随算子及其所作用的函数满足的边界条件.

答案： $L^{\dagger}v(x)=(-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}+1)v(x),0<x<1;v(1)-\alpha v(0)=0$

18 微分方程 $u''(x)=f(x),0<x<1$ 只有一个边界条件 $u(0)=\gamma$.请证明其伴随方程有三个边界条件.

答案：需要知道如下三个边界条件：

$c_2^*v'(1)-c_1^*v(1)=0,v'(1)-\gamma^*v'(0)=0,v'(1)-v(1)+v(0)=0$

19 三阶微分算子的一般形式是

$$L = r_3(x)\frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}x^3} + r_2(x)\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + r_1(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + r_0(x)$$

写出其形式伴随算子和结函数.若要求此算子是自伴的，条件是什么？

答案： $r_3 = -r_3^*, r_2 = (r_2 - 3r_3')^*, r_1 = (-3r_3'' + 2r_2' - r_1)^*, r_0 = (-r_3''' + r_2'' - r_1' + r_0)^*$

习题 39 提示

$|T_n'(x)| = |n\frac{\sin n\theta}{\sin\theta}|$. **然后证明：** $|\frac{\sin n\theta}{\sin\theta}| \le n$ **，例如，可用数学归纳法证明.**