第五章 狄拉克δ函数 习题参考答案

7 利用上题的结果计算以下积分.

(1) $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\delta(x^2-5x+6)(3x^2-7x+2)$

(2) $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\delta(x^2-\pi^2)\cos x$

(3) $\int_{1/2}^{\infty} \mathrm{d}x\delta(\sin \pi x)(\frac{2}{3})^x$

(4) $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\delta(\mathrm{e}^{-x^2})\ln x$

答案：上题得到的公式是， $\delta[g(x)]=\sum_n \frac{1}{|g'(x_n)|}\delta(x-x_n)$

(1) $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\delta(x^2-5x+6)(3x^2-7x+2)=8$

(2) $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\delta(x^2-\pi^2)\cos x=-\frac{1}{\pi}$

(3) $\int_{1/2}^{\infty} \mathrm{d}x\delta(\sin \pi x)(\frac{2}{3})^x=\frac{2}{\pi}$

(4) $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\delta(\mathrm{e}^{-x^2})\ln x=0$ $g(x)=\mathrm{e}^{-x^2}$ 此函数在积分范围内无零点，所以积分为零。

8 求 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\theta(x^2-1)$ 答案： $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\theta(x^2-1)=\delta(x-1)-\delta(x+1)$

9. (1) 证明：如果空间有一个电偶极子，那么其电荷密度的分布$\rho(r)$是用δ函数的导数来表示的；(2) $\rho(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x^2}\delta(x^2-1)$代表一个什么样的电荷分布？

答案： $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x^2}\delta(x^2-1)=\frac{1}{4}[\delta'(x+1)-\delta'(x-1)]$

表示在$\delta'(x+1)$处的两个符号相反的电偶极子，大小为 1/4.这可以看做是一个电四极子.

10. 提示：按如下积分。$\int_{-\infty}^{\infty} \quad = \int_{-\infty}^{0} \quad + \int_{0}^{\infty}$

11 计算以下拉普拉斯变换： $L[\delta(x-y)]$， $L[\delta^{(n)}(x)]$.

解答：

$L[\delta(x-y)]=\mathrm{e}^{py}$， $L[\delta^{(n)}(x)]=p^n$

$L^{-1}[u;u\to v]=\delta^{(1)}(v)$

$L^{-1}[u^m;u\to v]=\delta^{(m)}(v)$

18 计算积分 $\int_0^\infty \cos ax\cos bx\mathrm{d}x$

答案：$\int_0^\infty \cos ax\cos bx\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}[\delta(a+b)+\delta(a-b)]$

19 计算下列积分.

(1) $I=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{at}\sin bt\delta^{(n)}(t)\mathrm{d}t$，分别为 0，1 和 2.

(2) $\int_{-\infty}^{\infty}(\cos t+\sin t)\delta^{(n)}(t^3+t^2+t)\mathrm{d}t$，分别为 0 和 1.

解答

(1) $I=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{at}\sin bt\delta^{(n)}(t)\mathrm{d}t=(-1)^n\int_{-\infty}^{\infty}(\mathrm{e}^{at}\sin bt)^{(n)}\delta(t)\mathrm{d}t$

$I=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{at}\sin bt\delta(t)\mathrm{d}t=0$

$I=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{at}\sin bt\delta'(t)\mathrm{d}t=-b$

$I=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{at}\sin bt\delta''(t)\mathrm{d}t=2ab$

(2) $g(t)=t^3+t^2+t$ 时，

$$t_{1,2}=\frac{-1\pm\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}(\cos t+\sin t)\delta(t^3+t^2+t)\mathrm{d}t$$

$$=1-\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{3}}(t_2(\cos t_1+\sin t_1)-t_1(\cos t_2+\sin t_2))$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}(\cos t+\sin t)\delta'(t^3+t^2+t)\mathrm{d}t$$

$$=-1-\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{3}}(t_2(\sin t_1-\cos t_1)-t_1(\sin t_2-\cos t_2))$$

23 在球坐标系 $\boldsymbol{r}=(r,\theta,\varphi)$ 中，设单位源强的点源位于 $\boldsymbol{r}_0=(r_0,0,0)$ 处.试作出 $\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)$ 的运算表示式.(提示：先把单位源强均匀分布在圆周 $r=r_0,\theta=\theta_0\neq 0$ 上.)

答案

$$\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)=\frac{1}{2\pi r^2\sin\theta}\delta(r-r_0)\delta(\theta-\theta_0)=\frac{1}{2\pi r^2\sin\theta}\delta(r-r_0)\delta(\theta)$$

24 在柱坐标系 $\boldsymbol{r}=(r,\varphi,z)$ 中，设单位源强的点源位于(1) $\boldsymbol{r}_0=(0,z_0,0)$ 处，(2) $\boldsymbol{r}_0=(0,0,0)$ 处，试分别作出 $\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)$ 的运算表示式.

答案：

(1) $\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)=\dfrac{1}{2\pi r}\delta(r)\delta(z-z_0)$

(2) 当 $z_0=0$ 时，$\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)=\dfrac{1}{2\pi r}\delta(r)\delta(z)$

25 证明 $f(x)=\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}\delta(x-2n\pi)$ 是个周期为 2π 的函数.求这个函数的傅里叶变换.

并在弱收敛的意义下，验证所得级数的和确实是 $\delta(x)$.

（提示：利用公式 $1+2\cos x+2\cos 2x+\cdots+2\cos nx=\dfrac{\sin[(n+1/2)x]}{\sin(x/2)}$）

答案：$\delta(x)=\dfrac{1}{2\pi}+\dfrac{1}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\cos nx$

27 求函数 $\varphi(t)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n!}\delta'(t-n)$ 的傅里叶变换.

答案： $\varphi(x)=\mathrm{i}x(\mathrm{e}^{\cos x-\mathrm{i}\sin x}-1)$

第六章 格林函数 习题参考答案

3 求满足如下边值问题的格林函数

$$(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}+k^2)G(x,x')=\delta(x-x'),0<x,x'<\infty$$

$$G(x=0)=1,G(x\to\infty)\sim\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$$

这是半无限长导线上的电压(或电流)满足的一维亥姆霍兹方程的格林函数.

答案：$G(x,x')=\begin{cases}(1-\dfrac{\sin kx'}{k})\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx},\ 0\le x'<x<\infty\\ -\dfrac{\sin kx}{k}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx'}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx},\ 0\le x<x'<\infty\end{cases}$

4 求满足以下边值问题的格林函数.

(1) $(\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}+\lambda^2)G(x,x')=\delta(x-x'),0<x,x'<\pi$,

$$[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}G(x,x')]_{x=0}=0,[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}G(x,x')]_{x=\pi}=0$$

答案:
分段表示法

$$G(x,x')=\frac{\cos\lambda x\cos\lambda(\pi-x')}{\lambda\sin\lambda\pi}\theta(x'-x)+\frac{\cos\lambda x'\cos\lambda(\pi-x)}{\lambda\sin\lambda\pi}\theta(x-x')$$
$$=\frac{\cos\lambda(\pi-x')}{\lambda\sin\lambda\pi}\cos\lambda x+\frac{\sin\lambda(x-x')}{\lambda}\theta(x-x')$$

特征函数法
1) 当$\lambda\neq n$

$$G(x,x';\lambda)=\frac{1}{\lambda^2\pi}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1,n\neq m}^{\infty}\frac{\cos nx'\cos nx}{\lambda^2-n^2}$$

2) 当$\lambda=m$

$$G(x,x';m)=\frac{2}{\pi}\cos mx'\cos mx+\frac{1}{m^2\pi}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1,n\neq m}^{\infty}\frac{\cos nx'\cos nx}{m^2-n^2}$$
$$G(x,x';0)=\frac{1}{\pi}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx'\cos nx}{m^2-n^2}$$

(2) $\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}G(x,x')=\delta(x-x'),0<x,x'<1$

$$G(0,x')+G(1,x')=0,[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}G(x,x')]_{x=0}+[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}G(x,x')]_{x=1}=0$$

答案
分段表示法

$$G(x,x')=[-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}(x'-x)]\theta(x'-x)+[-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}(x-x')]\theta(x-x')$$

特征函数法

$$G(x,x';0)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(A\sin\lambda_n x'+B\cos\lambda_n \pi x')(A\sin\lambda_n \pi x+B\cos\lambda_n x)}{(2n+1)^2},$$

$$\lambda_n=(2n+1)\pi,\frac{1}{2}(A^2+B^2)=1$$

(3) $(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}+1)G(x,x')=\delta(x-x'),0<x,x'<1$,

$$G(0,x')=G(1,x'),[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}G(x,x')]_{x=0}=[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}G(x,x')]_{x=1}$$

答案

分段表示法

解法一

$$\begin{aligned}&G(x,x')\\&=\frac{1}{\Delta}\{[-\cos x'+\cos(1-x')]\sin x+\frac{1}{\Delta}[\sin x'+\sin(1-x')]\cos x\}\theta(x'-x)\\&+\frac{1}{\Delta}\{[\cos x'+\cos(1+x')]\sin x+[-\sin x'+\sin(1+x')]\cos x\}\theta(x-x')\\&\Delta=2(1-\cos 1)\end{aligned}$$

解法二

$$\begin{aligned}G(x,x')&=\frac{\mathrm{i}}{2(\mathrm{e}^{\mathrm{i}}-1)}[(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x'}\mathrm{e}^{\mathrm{i}}\sin x+\mathrm{e}^{\mathrm{i}x'}\cos x)\theta(x'-x)\\&+(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x'}\sin x+\mathrm{e}^{\mathrm{i}x'}\mathrm{e}^{\mathrm{i}}\cos x)\theta(x-x')]\end{aligned}$$

特征函数法

$$G(x,x';0)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(A\sin 2n\pi x'+B\cos 2n\pi x')(A\sin 2n\pi x+B\cos 2n\pi x)}{1-4n^2}$$

(4) $(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}-k^2)G(x,x')=\delta(x-x'),0<x,x'<1$

$$G(0,x')=[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}G(x,x')]_{x=0},G(1,x')=[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}G(x,x')]_{x=1}$$

答案

分段表示法

$$\begin{aligned}G(x,x')&=-\frac{1}{2k(k-1)}[(k\mathrm{e}^{-kx'}\mathrm{e}^{kx}-\mathrm{e}^{kx'}\mathrm{e}^{-kx})\theta(x'-x)\\&+(k\mathrm{e}^{-kx'}\mathrm{e}^{kx}+\mathrm{e}^{kx'}\mathrm{e}^{-kx})\theta(x-x')]\end{aligned}$$

特征函数法

1) $k^2 \neq k_n^2$

$$G(x,x';k^2)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varphi_n(x')\varphi_n(x)}{k^2-k_n^2}$$

2) $k^2 = k_m^2$

$$G(x,x';k^2)=\varphi_m(x')\varphi_m(x)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varphi_n(x')\varphi_n(x)}{k_m^2-k_n^2}$$

$$\varphi_n(x)=A\mathrm{e}^{k_n x}+B\mathrm{e}^{-k_n x},k_0=\pm 1,k_n=\mathrm{i}n\pi,n=1,2,\cdots,|A|^2+|B|^2=1$$

(5) $\dfrac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}x^3}G(x,x')=\delta(x-x'),0<x,x'<1$

$$G(0,x')=G(1,x')=0,[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}G(x,x')]_{x=0}=[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}G(x,x')]_{x=1}$$

答案

$$G(x,x')=(\frac{x'-x'^2}{2}x-\frac{1+x'}{2}x^2)\theta(x'-x)+(\frac{x'^2}{2}+\frac{x'-x'^2}{2}x-\frac{x'}{2}x^2)\theta(x-x')$$
$$=\frac{x'-x'^2}{2}x-\frac{1+x'}{2}x^2+(\frac{x'^2}{2}+\frac{1}{2}x^2)\theta(x-x')$$

5 求以下边值问题的格林函数

(1) $(\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}-1)G(x,x')=\delta(x-x')$，$|x|\to\infty$时，格林函数的值有限.

(2) $(\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}-1)G(x,x')=\delta(x-x'),G(-a,x')=G(a,x')=0$.当$a\to\infty$时，解应趋于(1)的结果.

答案：

(1) $G(x,x')=-\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-x'}\mathrm{e}^{x}\theta(x'-x)-\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{x'}\mathrm{e}^{-x}\theta(x-x')=-\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-|x-x'|}$

(2)
$$G(x,x')=-\frac{1}{2(\mathrm{e}^{2a}-\mathrm{e}^{-2a})}\{[(\mathrm{e}^{2a}\mathrm{e}^{-x'}-\mathrm{e}^{x'})\mathrm{e}^{x}+(\mathrm{e}^{-2a}\mathrm{e}^{x'}-\mathrm{e}^{-x'})\mathrm{e}^{-x}]\theta(x'-x)$$
$$-[(\mathrm{e}^{x'}-\mathrm{e}^{-2a}\mathrm{e}^{-x'})\mathrm{e}^{x}+(\mathrm{e}^{-x'}-\mathrm{e}^{2a}\mathrm{e}^{x'})\mathrm{e}^{-x}]\theta(x-x')\}$$

9 由(6.1.14)式，格林函数在特征值处似乎一定是一级极点。其实并不尽然.情况以下二阶微分方程的边值：

$$(\frac{d^2}{dx^2}+\lambda^2)y(x)=0, y(0)=0, y'(0)+y'(\pi)=0$$

求出其特征函数和特征值。求出满足同样边值问题的格林函数。此题的格林函数在特征值处是二级极点。不过本章只考虑格林函数在特征值处是一级极点的情况。

答案

$$G(x,x';\lambda)=\frac{\sin\lambda x\cos\lambda(\pi-x')}{2\lambda\cos^2(\lambda\pi/2)}+\frac{\sin\lambda(x'-x)}{\lambda}\ \theta(x-x')$$

特征值：$\lambda=2k+1$.在特征值处，格林函数有二级极点。

10 我们在 6.2 节中用特征函数法求出了拉普拉斯算子格林函数的基本解.请用分段表示法求拉普拉斯算子格林函数的基本解.用球坐标系，可得到一、二、三维空间的统一的径向方程，得到格林函数的统一的表达式.并依此方法，求出四维空间中的基本解.

答案：$G(R)=-\frac{\Gamma(2)}{2\pi^2 2R^2}=-\frac{1}{4\pi^2|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^2}$

见书上第十章.

16 对于边值问题(6.5.30)，是否可以在角向上进行分段求解？若行，试求解之.
答案：

得到角向格林函数应满足的方程：

$$(\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial^2\theta}+k^2-k_{m,n}^2+\frac{m^2}{r^2})g(\theta,\theta')=\delta(\theta-\theta')$$

可是，方程中含有径向坐标 r。若刚好有 $k^2=k_{m,n}^2$，那么，当 $\theta\neq\theta'$，解为 $\mathrm{e}^{\pm im\theta}$，而这正是特征函数。结论，不能在角向使用分段表示法。

18 用分段表示法求球内亥姆霍兹方程的格林函数

$$\nabla^2 G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'); r, r<a$$

$$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')|_{r=0}<\infty,\quad G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')|_{r=a}=0$$

$$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\sin\theta Y_l^{m*}(\theta',\varphi')Y_l^m(\theta,\varphi)\frac{k^2}{j_l(ka)}$$

答案：$$\times\{[j_l(kr')y_l(ka)-y_l(kr')j_l(ka)]j_l(kr)\theta(r'-r)$$
$$+[y_l(ka)j_l(kr)-j_l(ka)y_l(kr)]j_l(kr')\theta(r-r')\}$$

19 二维长方形内如下边值问题.

$$(\nabla^2+k^2)G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'),(0\le x,x'\le a;0\le y,y'\le b)$$

$$[\frac{\partial}{\partial x}G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')]|_{x=0}=[\frac{\partial}{\partial x}G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')]|_{x=a}=0,[\frac{\partial}{\partial y}G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')]|_{y=0}=[\frac{\partial}{\partial y}G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')]|_{y=b}=0$$

答案：$$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=\sum_{n,m=1}^{\infty}\frac{\varphi_{n,m}(\boldsymbol{r}')\varphi_{n,m}(\boldsymbol{r})}{k^2-k_{n,m}^2}=\frac{4}{ab}\sum_{n,m=1}^{\infty}\frac{\cos k_x x'\cos k_y y'\cos k_x x\cos k_y y}{k^2-(k_x^2+k_y^2)}$$

20 求解环形区域的格林函数.

$$\nabla^2G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}');a<r,r<b$$

$$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')|_{r=a}=G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')|_{r=b}=0$$

答案：

(i) 特征函数表示法，

(A) 参量 k 不等于特征值

则格林函数为

$$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{\varphi_{m,n}^{*}(\boldsymbol{r}')\varphi_{m,n}(\boldsymbol{r})}{k^2-k_{n,m}^2}$$
$$=\frac{1}{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{[AJ_m(k_{m,n}r')+BY_m(k_{m,n}r')][AJ_m(k_{m,n}r)+BY_m(k_{m,n}r)]}{(k^2-k_{n,m}^2)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}m(\theta-\theta')}$$

(B) 参量 k 等于某一特征值

若 $k^2=k_{m1,n1}^2$，则用广义格林函数

$$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=\frac{1}{2\pi}[AJ_m(k_{m,n}r')+BY_m(k_{m,n}r')][AJ_m(k_{m,n}r)+BY_m(k_{m,n}r)]\mathrm{e}^{\mathrm{i}m(\theta-\theta')}$$
$$+\frac{1}{2\pi}\sum_{n=1,n\ne n_1}^{\infty}\sum_{m=-\infty,m\ne m_1}^{\infty}\frac{[AJ_m(k_{m,n}r')+BY_m(k_{m,n}r')][AJ_m(k_{m,n}r)+BY_m(k_{m,n}r)]}{k_{n1,m1}^2-k_{n,m}^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}m(\theta-\theta')}$$

(ii) 分段表示法

(A) 参量 k 不等于特征值

$$g_m(r,r')=\frac{\pi}{2}[\frac{U_m(k;a,r')}{U_m(k;a,b)}U_m(k;b,r')-U_m(k;r,r')\theta(r'-r)]$$

其中$U_m(k;x,y)=J_m(kx)Y_m(ky)-J_m(ky)Y_m(kx)$。

若参数正好是特征值，则还要求解广义格林函数。

21 我们已经计算了理想导体劈的散射(6.5.67)，其中的边界条件是，在劈尖表面上格林函数的值为零.这实际上是振动方向与平面垂直的电场受劈尖散射的分布.现在将边界条件修改如下.

$$(\nabla^2+k^2)G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}');\alpha<\theta<2\pi-\alpha$$

$$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')|_{r=0}<\infty\text{，}\ [\frac{\partial}{\partial\theta}G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')]_{\theta=\alpha,2\pi-\alpha}=0$$

这实际上是振动方向与平面垂直的电场受劈尖散射的分布.请求解这一格林函数.

答案：$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=\dfrac{\mathrm{i}\pi k}{2(\pi-\alpha)}\sum_{v}^{\infty}\cos\dfrac{n\pi(\theta'-\alpha)}{2(\pi-\alpha)}\cos\dfrac{n\pi(\theta-\alpha)}{2(\pi-\alpha)}\begin{cases}H_v^{(2)}(kr')J_v(kr),r'<r\\J_v(kr')H_v^{(2)}(kr),r>r'\end{cases}$

25 求解单位球内边值问题，$\nabla^2\psi(\boldsymbol{r})=0;r<1;\psi(\boldsymbol{r})|_{r=1}=1+3\cos 2\theta$.

答案：$\psi(\boldsymbol{r})=(1+3\cos 2\theta)r^2$

26 求解边值问题，$\nabla^2\psi(\boldsymbol{r})=(4r^2-6)\mathrm{e}^{-r^2};\lim\limits_{r\to\infty}\psi(\boldsymbol{r})=0$.解答：$\psi(\boldsymbol{r})=\mathrm{e}^{-r^2}$

28 *RC* 电路中，电动势是 *E*，*C* 两端的电压是 *u*，电路中的电流是 *i*.*E*、电阻 *R* 和电容 *C* 是常量.电压 *u* 电流 *i* 和电容极板上的电荷量 *q* 是随时间而变化的.在此回路中有关系式，$-E+iR+u=0$；电流就是电容极板上电量的变化率，$i=\dfrac{dq}{dt}$；电容上的电压与电量的关系为，$u=\dfrac{q}{C}$；由以上三式得到

$$R\frac{dq}{dt}+\frac{q}{C}-E=0$$

设初始条件：当$t=0$时，$q=0$.用 6.7 节的方法求解之.

答案：$q(t)=EC(1-\mathrm{e}^{-t/RC})$