第三章　二阶常微分方程 习题

17 将两个函数 $f_1(x)=\begin{cases}-1 & -1\le x<0\\ +1 & 0<x\le 1\end{cases}$ 和 $f_2(x)=|x|,\quad -1\le x\le 1$ 分别用勒让德多项式展开，求各自的展开系数.

答案：

$$f_1(x)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m(2m)!(4m+3)}{2^{2m+1}(m!)^2(m+1)}P_{2m+1}(x)$$

$$f_2(x)=\frac{1}{2}+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m+1}(2m-2)!(4m+1)}{2^{2m}(m+1)!(m-1)!}P_{2m}(x)$$

18 将函数 $f(x)=\begin{cases}0 & -1\le x<\alpha\\ 1/2 & x=\alpha\\ 1 & \alpha<x\le 1\end{cases}$ 用勒让德多项式展开，求展开系数.

答案：

$$f(x)=\frac{1}{2}(1-\alpha)+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}[P_{n-1}(\alpha)-P_{n+1}(\alpha)]P_n(x)$$

20 已知前几阶勒让德函数的表达式是：

$$P_0(x)=1, P_1(x)=x, P_2(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1), P_3(x)=\frac{1}{2}(5x^3-3x), P_4(x)=\frac{1}{8}(35x^4-30x^2+3)$$

(1) 证明：函数

$$\tanh^{-1}x=\frac{1}{2}\ln(\frac{1+x}{1-x})$$

是零阶勒让德方程的解.这个函数能否利用刘维尔公式得到？

(2) 将 $l=0,1,2$ 代入刘维尔公式，计算得到第二类勒让德函数 $Q_0(x),Q_1(x),Q_2(x)$ 的表达式.

(3) 如果令 $x=\cos\theta$，写出 $Q_0(\cos\theta),Q_1(\cos\theta),Q_2(\cos\theta)$ 以θ为自变量的表达式.

(4) 由公式(3.4.36)和(3.4.37)，写出以下第一和第二类连带勒让德函数的表达式：$P_1^1(x),P_2^1(x),P_2^2(x),P_3^1(x),P_3^2(x),P_3^3(x),Q_1^1(x),Q_2^1(x),Q_2^2(x)$.

答案：

(2) $Q_0(x)=\int\frac{\mathrm{d}x}{1-x^2}=\frac{1}{2}\ln(\frac{1+x}{1-x})$

$$Q_1(x)=x\int\frac{\mathrm{d}t}{t^2(1-t^2)}=x\int\mathrm{d}t(\frac{1}{t^2}+\frac{1}{1-t^2})=-1+\frac{x}{2}\ln(\frac{1+x}{1-x})$$

$$Q_2(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1)\ln(\frac{1+x}{1-x})-\frac{3}{2}x$$

(3) $Q_0(\cos\theta)=\ln\cot\frac{\theta}{2}$,

$Q_1(\cos\theta)=\cos\theta\ln\cot\frac{\theta}{2}-1$,

$$Q_2(\cos\theta)=\frac{1}{2}(3\cos^2\theta-1)\ln\cot\frac{\theta}{2}-\frac{3}{2}\cos\theta$$

$$P_1^1(x)=(1-x^2)^{1/2},P_2^1(x)=3(1-x^2)^{1/2}x,P_2^2(x)=3(1-x^2)$$

$$P_3^1(x)=\frac{3}{2}(1-x^2)^{1/2}(5x^2-1),P_3^2(x)=15(1-x^2)x,P_3^3(x)=15(1-x^2)^{3/2}$$

(4) $Q_1^1(x)=(1-x^2)^{1/2}[\frac{1}{2}\ln(\frac{1+x}{1-x})+\frac{x}{1-x^2}]$

$$Q_2^1(x)=(1-x^2)^{1/2}[\frac{3}{2}x\ln(\frac{1+x}{1-x})+\frac{3x^2-2}{1-x^2}]$$

$$Q_2^2(x)=(1-x^2)^{1/2}[\frac{3}{2}\ln(\frac{1+x}{1-x})+\frac{5x-3x^2}{(1-x^2)^2}]$$

26 对于方程 $y''-B_1xy'+\lambda y=0$，做什么样的变换，可以变为厄米方程的形式？这个方程的特征函数和特征值是什么？证明，由规一化得到厄米多项式 $He_n(x)$ 的常数因子是 $C_n=2^{n/2}$.

解答

令 $x=\sqrt{2}u/\sqrt{B_1}$

代入原方程，就得到

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}u^2}-2u\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}+\lambda\frac{2}{B_1}y=0$$

33. 写出双曲切比雪夫多项式 $T_0^\times(p),T_1^\times(p),T_2^\times(p),T_3^\times(p)$ 的表达式.

解答

用式(3.5.16a)。

$$T_n^\times(p)=\frac{(-1)^n}{(2n-1)!!}(1-p^2)^{1/2}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}p^n}(1-p^2)^{n-1/2}$$

$$T_0^\times(p)=1;T_1^\times(p)=p;T_2^\times(p)=2p^2-1;T_3^\times(p)=4p^3-2p$$

39 找出下列方程的奇点，并说明奇点的类型.

(1) $z^2(z-1)w''(z)-2(z-1)w'(z)+3zw(z)=0$

(2) $z(3z+1)w''(z)-(z+1)w'(z)+2w(z)=0$

答案：

(1) $z=1, z=\infty$ 是第一类奇点， $z=0$ 是第二类奇点。

(2) $z=0, z=-1/3, z=\infty$ 都是第一类奇点。

41 试求方程组

$$w_1'(z)=w_2, w_2'(z)=\alpha w_1/z^2$$

的一个基本解组，并指出α取何值时所有的解都是有理函数.

答案：

(i) 当 $\lambda_1-\lambda_2=\sqrt{1+4\alpha}\neq n$，即非整数时， $\alpha\neq\frac{1}{4}(n^2-1)$。

基本解矩阵为

$$\begin{pmatrix} w_{1(1)} & w_{1(2)} \\ w_{2(1)} & w_{2(2)} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} z^{\lambda_1} & z^{\lambda_2} \\ \lambda_1 z^{\lambda_1} & \lambda_2 z^{\lambda_2} \end{pmatrix}$$

(ii) 若 $\lambda_1-\lambda_2=\sqrt{1+4\alpha}=0$， $\alpha=-1/4, \lambda_1=\lambda_2=1/2$ 。这是重根。

基本解矩阵为

$$\begin{pmatrix} w_{1(1)} & w_{1(2)} \\ w_{2(1)} & w_{2(2)} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} z^{1/2} & z^{1/2}\ln z \\ -z^{-1/2}/2 & z^{-1/2}(\ln z/2+1) \end{pmatrix}$$

(iii) 若 $\lambda_1-\lambda_2=\sqrt{1+4\alpha}=2n+1$，是奇整数，

基本解矩阵为

$$\begin{pmatrix} w_{1(1)} & w_{1(2)} \\ w_{2(1)} & w_{2(2)} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} z^{n+1} & z^{-n} \\ (n+1)z^{n+1} & -nz^{-n} \end{pmatrix}$$

(iv) 若 $\lambda_1-\lambda_2=\sqrt{1+4\alpha}=2n$，是偶数，

基本解矩阵为

$$\begin{pmatrix} w_{1(1)} & w_{1(2)} \\ w_{2(1)} & w_{2(2)} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} z^{n+1/2} & z^{-n+1/2} \\ (n+1/2)z^{n+1/2} & (-n+1/2)z^{-n+1/2} \end{pmatrix}$$

有理函数的定义：分子与分母都是多项式的函数。显然，只有(iii)中的解才是有理函数。结论：当 $\alpha=n(n+1)$，其中 n 是整数时，解是有理函数。

42 求下列方程在 $z=0$ 附近的级数解.

(1) $w''(z)+bz^2w(z)=0$，

答案：

$w''(z)+bz^2w(z)=0$ 两个线性无关解为

$$w_1(z)=\sum_{k=0}^{\infty}C_{4k}z^{4k}, w_2(z)=\sum_{k=0}^{\infty}C_{4k+1}z^{4k+1}$$

$$C_{4n}=\frac{(-1)^n b^n}{4n(4n-1)4(n-1)[4(n-1)-1]\cdots 4\times 1(4\times 1-1)}$$

$$C_{4n+1}=\frac{(-1)^n b^n}{(4n+1)4n[4(n-1)+1]4(n-1)\cdots(4\times 1+1)4\times 1}$$

通解：$w(z)=Aw_1(z)+Bw_2(z)$。组合系数分别为 A 和 B。

$$w''(z)+bz^2w'(z)=0$$

答案：两个线性无关解为：$w_1(z)=1, w_2(z)=\sum_{k=0}^{\infty}C_{3k+1}z^{3k+1}$

$$C_{3k+1}=\frac{(-1)^k b^k}{(3k+1)3k[3(k-1)+1]3(k-1)\cdots(3\times 1+1)3\times 1}$$

(2) $w''(z)+zw'(z)+w(z)=0$

答案：两个线性无关解为：$w_1(z)=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-1)^l}{(2l)!!}z^{2l}$ 和 $w_2(z)=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-1)^l}{(2l+1)!!}z^{2l+1}$.

$$C_{2k+1}=(-1)^k\frac{1}{(2k+1)!!}, C_{2k+2}=(-1)^{k+1}\frac{1}{(2k+2)!!}$$

(3) $2z^2w''(z)-(z+z^2)w'(z)+w(z)=0$

答案：两个线性无关解为：$w_1(z)=\sum_{l=1}^{\infty}\frac{z^l}{(2l-1)!!}$ ， $w_2(z)=z^{1/2}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{z^l}{(2l)!!}$

(4) $4z^2w''(z)+4z^2w'(z)+w(z)=0$

答案：两个线性无关解为：$w_1(z)=z^{1/2}\sum_{l=0}^{\infty}\prod_{k=1}^{l}\frac{2k-1}{2k^2}z^l$ ，

$$w_2(z)=\ln z\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k z^{k+1/2}+\sum_{k=0}^{\infty}\beta_k z^{k+1/2}$$

$$\alpha_k=\frac{1-2k}{2k^2}\alpha_{k-1}, \beta_k=\frac{1-k}{k^3}\alpha_{k-1}+\frac{1-2k}{2k^2}\beta_{k-1}, \alpha_0=1, \beta_0=0$$

(5) $4z^2w''(z)+4zw'(z)-w(z)=0$

答案：两个线性无关解为：$w_1(z)=\sqrt{z}$， $w_2(z)=z^{-1/2}$

(6) $z^2w''(z)+(2z+z^2)w'(z)+(z-2)w(z)=0$

答案：两个线性无关解为：$w_1(z)=\sum_{l=1}^{\infty}\frac{(-1)^{l-1}3!l}{(l+2)!}z^l$， $w_2(z)=z^{-2}-z^{-1}\ln z+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{z^{(k-2)}}{k!(k-1)}$

47 有以下边值问题：

$$u'(x)=f(x),0<x<1;u(0)=0,u(1)=0 \qquad (1)$$

这是个一阶微分方程，但是有两个边界条件.边界条件太多了.但这并不表示这个边值问题就一定没有解.运用微分方程边值问题解的择一定理.请写出(1)的伴随边值问题.这一伴随问题的解是什么？然后运用择一定理的相容性条件(3.8.8),写出(1)有解的条件.选择一个满足相容性条件的函数 $f(x)$,求出(1)的解.

答案：

伴随边值问题是，

$$v'(x)=0,0<x<1; \qquad (2)$$

没有边界条件。这是因为(1)是的边界条件多了一个。(2)的解是 $v(x)=1$。所以相容性条件就是 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=0$。一个满足这一条件的函数是 $f(x)=x-\frac{1}{2}$。相应地，解就是 $u(x)=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x$。

49 若二阶微分算子(3.7.4)中的

$$p(x)=1$$

边界条件是：

$$\begin{cases}\alpha_1u(a)+\beta_1u(b)=0\\ \alpha_2u'(a)+\beta_2u'(b)=0\end{cases}$$

那么，伴随方程中函数 v 满足怎样的边界条件？此时，如果边界条件中的系数都是实数，边值问题是否自伴的？

答案：边值问题不是自伴的。除非 α_1 与 β_2， α_2 与 β_1 互为复共轭。

第四章　贝塞尔函数 习题

4 利用朗斯基行列式(4.2.19)或(4.2.20)完成积分$\int \frac{\mathrm{d}z}{z[J_\nu(z)]^2}$.

解答

(1) 利用(4.2.19)式，$\int \frac{\mathrm{d}z}{z[J_\nu(z)]^2} = -\frac{\pi}{2\sin\nu\pi}\frac{J_{-\nu}(z)}{J_\nu(z)} + C$

(2) 利用(4.2.20)式，$\int \frac{\mathrm{d}z}{z[J_\nu(z)]^2} = \frac{\pi}{2}\frac{Y_\nu(z)}{J_\nu(z)} + C$

5 利用上一题的结果，完成以下积分.

(1) $\int \frac{\mathrm{d}z}{zJ_\nu(z)Y_\nu(z)} = \frac{\pi}{2}\ln\frac{Y_\nu(z)}{J_\nu(z)} + C$

(2) $\int \frac{\mathrm{d}z}{z[Y_\nu(z)]^2} = -\frac{\pi}{2}\frac{J_\nu(z)}{Y_\nu(z)} + C$

(3) $\int \frac{\mathrm{d}z}{z[J_\nu^2(z)+Y_\nu^2(z)]} = \frac{\pi}{2}\tan^{-1}\frac{Y_\nu(z)}{J_\nu(z)} + C$

6. 证明下列等式

(2) $4J_n'' = J_{n-2} - 2J_n + J_{n+2}$.(提示：将整数阶贝塞尔函数的母函数展开式两边对 z 求导两次.)

(3) $z^2 J_n'' = (n^2 - n - z^2)J_n + zJ_{n+1}$。(提示：将整数阶贝塞尔函数的母函数展开式两边对 t 求导两次. 结合(2)的结果.)

8

(8) $\int J_0(z)\sin z\mathrm{d}z = zJ_0(z)\sin z - zJ_1(z)\cos z + C$

(提示：分部积分时，先积分出 z.再利用贝塞尔函数的递推公式.)

18 证明：$\int_0^\pi \cos(z\cos\varphi)\mathrm{d}\varphi = \int_0^\pi \cos(z\sin\varphi)\mathrm{d}\varphi$

提示：利用(4.3.22a)和(4.3.23a).

21 给出 $J_{\pm 7/2}(z)$ 的表达式.并写出$|z|\gg 1$ 时的表达式.

答案：

$$J_{7/2}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}[(\frac{15}{z^3}-\frac{6}{z})\sin z-(\frac{15}{z^2}-1)\cos z]$$

$$J_{-7/2}(z)=-\sqrt{\frac{2}{\pi z}}[(\frac{15}{z^2}-1)\sin z+(\frac{15}{z^2}-\frac{6}{z})\cos z]$$

当$|z|\gg 1$时，$J_{7/2}\approx\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cos z, J_{-7/2}\approx\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\sin z$

22 计算朗斯基行列式$J_\nu(x)H_{\nu-1}^{(1,2)}(x)-J_{\nu-1}(x)H_\nu^{(1,2)}(x)$.

答案：$\begin{vmatrix} J_\nu & J_{\nu-1} \\ H_\nu^{(1,2)} & H_{\nu-1}^{(1,2)} \end{vmatrix}=\pm\mathrm{i}\frac{2}{\pi z}$

26 利用 12 题的结果给出$I_n(z)$的积分表达式.

答案：$I_{2n}(z)=(-1)^n\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\cosh(z\sin\varphi)\cos 2n\varphi\mathrm{d}\varphi$；$I_{2n+1}(z)=\frac{(-1)^n}{\pi}\int_0^\pi\sinh(z\sin\varphi)\sin(2n+1)\varphi\mathrm{d}\varphi$.

37 贝塞尔方程是(4.1.1)式，球贝塞尔方程是(4.5.11)式.它们之间的区别是，一次导数项的系数分别是 1 和 2.后者通过一个变换，可以变成前者$w(z)=u(z)/\sqrt{z}$，见(4.5.12)，解为半整数阶贝塞尔函数.假如现在一次导数项的系数为任意正整数 n，那么，能否找到一个变换，将方程变换为贝塞尔方程？原方程的解是什么形式？显然，这个一般的情况应该自然地包括了 n=2，也就是球贝塞尔方程的特例.

答案：

设原方程的形式是$z^2w''(z)+nzw'(z)+(z^2-\gamma)w(z)=0$，则方程的解为$w(z)=J_\nu(z)/z^{(n-1)/2}$，其中$\nu=[(n-1)^2/4+\gamma]^{1/2}$.此处的 n 和γ实际上可以是任意实数.

习题 38 和 39 只是习题 37 的两个特例.

40 有微分方程$w''(z)+a\mathrm{e}^{mz}w(z)=0$.试用变量代换$u=\mathrm{e}^{mz/2}$将此方程化为贝塞尔方程.写出此贝塞尔方程的通解.写出原方程的通解.

答案：

变量代换后的方程是：$u^2w''(u)+uw'(u)+\frac{4a}{m^2}u^2w(u)=0$

原方程的通解：$w(z)=AJ_0(\frac{2}{m}\sqrt{a}\mathrm{e}^{mz/2})+BY_0(\frac{2}{m}\sqrt{a}\mathrm{e}^{mz/2})$，其中 A 和 B 是任意常数.

41 有微分方程$w''(z)+k^2z^2w(z)=0$.是用函数代换$f(z)=w(z)/\sqrt{z}$和变量代换$u=z^2$将此方程化为贝塞尔方程.写出此贝塞尔方程的通解.写出原方程的通解.

答案：

函数代换的结果是：$f''(z)+\frac{1}{z}f'(z)+(k^2z^2-\frac{1}{4z^2})f(z)=0$.

原方程的通解：$w(z)=\sqrt{z}\left[AJ_{1/4}(\frac{k}{2}z^2)+BJ_{-1/4}(\frac{k}{2}z^2)\right]$，其中 A 和 B 是任意常数.

42 将以下微分方程按提示作变换化为贝塞尔方程，从而得到其通解.

(1) $zw''(z)+w'(z)+\frac{1}{4}w(z)=0, u=\sqrt{z}$

答案：原方程的通解：$w(z)=AJ_0(\sqrt{z})+BY_0(\sqrt{z})$

(2) $z^2w''(z)+zw'(z)+4(z^4-k^2)w(z)=0, u=z^2$

答案：原方程的通解：$w(z)=AJ_k(z^2)+BY_k(z^2)$

(4) $zw''(z)-w'(z)+zw(z)=0, w(z)=zf(z)$

答案：原方程的通解：$w(z)=A\sqrt{z}J_1(z)+B\sqrt{z}Y_1(z)$

(5) $zw''(z)+(1+2n)w'(z)+zw(z)=0, w(z)=z^{-n}f(z)$

答案：原方程的通解：$w(z)=Az^{-n}J_n(z)+Bz^{-n}Y_n(z)$

(6) $z^2w''(z)+(z-2z^2\tan z)w'(z)-(m^2+z\tan z)w(z)=0, w(z)=\frac{1}{\cos z}f(z)$

答案：原方程的通解：$w(z)=A\frac{1}{\sin z}J_m(z)+B\frac{1}{\sin z}Y_m(z)$

(7) $z^2w''(z)+(z+2z^2\cot z)w'(z)-(m^2-z\cot z)w(z)=0, w(z)=\frac{1}{\sin z}f(z)$

答案：原方程的通解：$w(z)=A\frac{1}{\cos z}J_m(z)+B\frac{1}{\cos z}Y_m(z)$

(8) $w''(z)+k^2zw(z)=0, w(z)=\sqrt{z}f(z), u=\frac{2k}{3}z^{3/2}$

答案：原方程的通解：$w(z)=A\sqrt{z}J_{1/3}(\frac{2k}{3}z^{3/2})+B\sqrt{z}J_{-1/3}(\frac{2k}{3}z^{3/2})$

(9) $z^2w''(z)+\frac{1}{4}(z+\frac{3}{4})w(z)=0, w(z)=\sqrt{z}f(z), u=\sqrt{z}$

答案：原方程的通解： $w(z)=A\sqrt{\frac{2}{\pi}}z^{1/4}\sin\sqrt{z}+B\sqrt{\frac{2}{\pi}}z^{1/4}\cos\sqrt{z}$

(10) $z^2w''(z)-3zw'(z)+4(z^4-3)w(z)=0, w(z)=z^2f(z), u=z^2$

答案：原方程的通解： $w(z)=Az^2J_{3/\sqrt{2}}(z^2)+Bz^2J_{-3/\sqrt{2}}(z^2)$

43 设 k_n 是 $J_0(2k_n)=0$ 的正实根，把函数 $f(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1\\ 1/2, & x=1\\ 0, & 1<x<2\end{cases}$ 展开成贝塞尔函数 $J_0(k_nx)$ 的级数.

答案： $f(x)=\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{J_1(\mu_m)}{[J_1(2\mu_m)]^2\mu_m}J_0(\mu_mx)$

44 设 k_n 是 $J_1(k_n)=0$ 的正实根，把函数 $f(x)=x,\ (0<x<1)$ 展开成贝塞尔函数 $J_1(k_nx)$ 的级数.

答案： $x=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2}{k_mJ_2(k_m)}J_1(k_mx)-=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2}{k_mJ_0(k_m)}J_1(k_mx)$

45 设 k_n 是 $J_1(k_n)=0$ 的正实根，把函数 $f(x)=x^3,\ (0<x<1)$ 展开成贝塞尔函数 $J_1(k_nx)$ 的级数.

答案： $x^3=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(k_n^2-8)}{k_n^3J_2(k_n)}J_1(k_nx)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(8-k_n^2)}{k_n^3J_0(k_n)}J_1(k_nx)$

48 设 $\mu_m,(m=1,2,3,\cdots)$ 是 $J_0(x)$ 的正零点，将函数 $f(x)=1-x^2,(0\le x\le 1)$ 展成 $J_0(\mu_mx)$ 的傅里叶-贝塞尔级数.

答案：$1-x^2=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{8}{\mu_m{}^3J_1(\mu_m)}J_0(\mu_mx)$

49 求解以下柱对称波动方程的定解问题.

$$\begin{cases}\frac{\partial^2}{\partial t^2}u(t,r)=a^2(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r})u(t,r),(r\le l,t>0)\\ \frac{\partial}{\partial r}u(t,r)|_{r=l}=0,u(t,r)|_{r=0}<\infty\\ u(t,r)|_{t=0}=0,\frac{\partial}{\partial t}u(t,r)|_{t=0}=1-\frac{r^2}{l^2}\end{cases}$$

答案： $u(r,t)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4J_0(\omega_nr)}{l^2\omega_n^3J_0(\omega_nl)}\sin\omega_nt$

50 有一均匀圆柱，半径为 R，高为 L.柱侧绝热而上下底温度保持为 $f_2(r)$ 和 $f_1(r)$.试求柱内稳定温度分布.这是柱坐标系内的如下定解问题.

$$\begin{cases} [\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}]u(r,\varphi,z)=0,(r\le r_0,0<z<L) \\ \frac{\partial}{\partial r}u(r,\varphi,z)|_{r=r_0}=0 \\ u(r,\varphi,0)=f_1(r) \\ u(r,\varphi,L)=f_2(r) \end{cases}$$

其中微分方程是温度稳定分布应满足的拉普拉斯方程.第一个边界条件是柱侧绝热的条件.求解此定解问题.

答案：
$$\begin{aligned} &u(r,z)=\frac{1}{L}(f_{20}-f_{10})z+f_{10} \\ &-\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{f_{1n}e^{-\omega_n z}-f_{2n}}{e^{\omega_n L}-e^{-\omega_n L}}c_n e^{\omega_n z}+\frac{f_{1n}e^{\omega_n z}-f_{2n}}{e^{\omega_n L}-e^{-\omega_n L}}e^{-\omega_n z})J_0(\omega_n r) \end{aligned}$$

51 设有一均匀圆球，半径为 R.开始的时候，球体各处温度均匀为 $0^\circ\mathrm{C}$.今将球面温度保持为一定不变的 $u_0^\circ\mathrm{C}$.试解此加热问题.定解问题如下.

$$\begin{cases} u_t(t,r,\theta,\varphi)=a^2\Delta u(t,r,\theta,\varphi),(r\le R) \\ u(t,r,\theta,\varphi)|_{t=0}=0 \\ u(t,r,\theta,\varphi)|_{r=R}=u_0 \end{cases}$$

(提示：边界条件是非齐次的，需要先设法化去，变成齐次边界条件.)

答案：$u(t,r)=u_0+2u_0\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin k_n r}{k_n r}e^{-k_n^2a^2t}$

52 圆柱冷却问题.有一半径为 R 的无限长圆柱，横截面在 xy 平面内.已知初始温度为 $\varphi(x,y)$，表面温度总是为 $0^\circ\mathrm{C}$.求柱体内温度的变化.此问题归结为二维定解问题

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}u(t,x,y)=a^2(\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(t,x,y)+\frac{\partial^2}{\partial y^2}u(t,x,y)),(x^2+y^2\le R^2,t>0) \\ u(t,x,y)|_{t=0}=\varphi(x,y) \\ u(t,x,y)|_{x^2+y^2=R^2}=0 \end{cases}$$

在柱坐标下，求其级数解.

答案：

$$u(t,r,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}J_n(k_{n,m}r)(A_{n,m}\cos n\varphi+B_{n,m}\sin n\varphi)e^{-a^2k_{n,m}^2t}$$

$$A_{n,m}=\frac{2-\delta_{n,1}}{\pi R^2 J_{n+1}^2(k_{n,m}R)}\int_0^R\int_0^{2\pi} f(r,\varphi)J_n(k_{n,m}r)\cos n\varphi r\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi$$
$$B_{n,m}=\frac{2}{\pi R^2 J_{n+1}^2(k_{n,m}R)}\int_0^R\int_0^{2\pi} f(r,\varphi)J_n(k_{n,m}r)\sin n\varphi r\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi$$

53 有一均匀圆柱，半径为 R，高为 L.柱侧有均匀分布的稳定热流流入，热流强度为 q.上下底温度保持为$0^\circ\mathrm{C}$.试求柱内稳定温度分布.这是柱坐标系内的如下定解问题.

$$\begin{cases}[\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}]u(r,\varphi,z)=0,(r\le R,0<z<L)\\ \frac{\partial}{\partial r}u(r,\varphi,z)|_{r=R}=q\\ u(r,\varphi,0)=0\\ u(r,\varphi,L)=0\end{cases}$$

其中微分方程是温度稳定分布应满足的拉普拉斯方程.第一个边界条件是柱侧存在稳流的条件.求解此定解问题.

答案：$u(r,\varphi,z)=\frac{4q}{L}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{I_n(\omega_{2n+1}r)}{\omega_{2n+1}^2 I_n'(\omega_{2n+1}r_0)}\sin\omega_{2n+1}z$， $\omega_n=\frac{n\pi}{L}$

54 圆柱半径为r_0，高为 h，侧面在温度为$0^\circ\mathrm{C}$的自由空气中冷却.下底温度常为$0^\circ\mathrm{C}$.上底温度常为 $f(r)$.求柱内温度分布.这是如下的定解问题.

$$\begin{cases}u_{rr}(r,z)+\frac{1}{r}u_r(r,z)+u_{zz}(r,z)=0\\ u(0,z)<\infty,[u_r(r,z)+ku(r,z)]|_{r=r_0}=0\\ u(r,h)=f(r),u(r,0)=0\end{cases}$$

答案：$u(r,z)=\frac{2}{r_0^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_0(\lambda_n r)}{(k^2/\lambda_n^2+1)r_0^2J_0^2(\lambda_n r_0)}\frac{\sinh\lambda_n z}{\sinh\lambda_n h}\int_0^{r_0} rf(r)J_0(\lambda_n r)\mathrm{d}r$

55 解下列定解问题

(a) $$\begin{cases}u_{tt}(t,r)+2hu_t(t,r)=a^2[u_{rr}(t,r)+\frac{1}{r}u_r(t,r)];0\le r\le r_0\\ u(t,0)<\infty,u(t,r_0)=0\\ u(0,r)|_{t=0}=\varphi(r),u_t(0,r)=0\end{cases}$$

(b) $\begin{cases} u_{rr}(r,z)+\dfrac{1}{r}u_r(r,z)+u_{zz}(r,z)=0; 0\le r\le r_0 \\ \qquad u(0,z)<\infty, u(r_0,z)=f(z) \\ \qquad u(r,h)=0, u(r,0)=0 \end{cases}$

并计算 $f(z)=f_0$ 为常数时的结果.

答案：

(1) $u(t,r)=\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{e}^{-ht}(c_n\sin\omega_n t+d_n\cos\omega_n t)J_0(k_n r)$

$$d_n=\frac{1}{N_n^2}\int_0^{r_0} r\varphi(r)J_0(k_n r)\mathrm{d}r=\frac{2}{r_0^2 J_1^2(k_n r_0)}\int_0^{r_0} r\varphi(r)J_0(k_n r)\mathrm{d}r\,, c_n=hd_n/\omega_n$$

(2) $u(r,z)=4\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{I_0(k_{2n+1}r)\sin k_{2n+1}z}{I_0(k_{2n+1}r_0)}, k_n=\dfrac{n\pi}{h}$

56 半径为 r_0 的无限长圆柱体的侧表面保持恒定温度其中 u_0，柱内的初始温度是 $0^\circ\mathrm{C}$，求柱内的温度分布.

$$\begin{cases} u_t(t,r,\varphi)=a^2\Delta u(t,r,\varphi),(r\le r_0) \\ \qquad u(0,r,\varphi)=0 \\ \qquad u(t,r_0,\varphi)=u_0 \end{cases}$$

答案：$u(t,r)=u_0-2u_0\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{J_0(k_n r)\mathrm{e}^{-k_n^2a^2t}}{k_n r_0 J_1(k_n r_0)}$

57 半径为 R 的半圆形薄膜，边缘固定，求其特征振动.

答案：

$$u(t,r,\varphi)=\sum_{m,n=1}^{\infty}\sin m\varphi J_m(\lambda_n r/R)(A_{m,n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda_n t}+B_{m,n}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda_n t})$$

系数由初始条件来定.