第七章 范数 习题参考答案

10 设 $f(x)=(x-1/2)^3$， $x\in[0,1]$，求 $\|f\|_1,\|f\|_2,\|f\|_\infty$.

答案: $\|f\|_1=\dfrac{1}{32},\|f\|_2=\dfrac{1}{8\sqrt{7}},\|f\|_\infty=\max\limits_{x\in[a,b]}|f(x)|=\dfrac{1}{8}$

15 计算下列矩阵的行范数，列范数，谱范数和 F 范数.

(1) $A=\begin{pmatrix}3&-1&1\\1&1&1\\2&1&-1\end{pmatrix}$

(2) $A=\begin{pmatrix}0&a\\-a&0\end{pmatrix}$，$a$ 是实数.

答案

(1) $\|A\|_\infty=5$， $\|A\|_1=6$， $\|A\|_2=\max\limits_j\left(\lambda_j(A^+A)\right)^{1/2}=3.7888019$， $\|A\|_F=2\sqrt{5}$

(2) $\|A\|_\infty=|a|$， $\|A\|_1=|a|$， $\|A\|_2=|a|$， $\|A\|_F=\sqrt{2}|a|$

16 设 $A=\begin{pmatrix}1&2&0\\-2&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$，求 $\rho(A)$.

答案： $\rho(A)=\sqrt{5}$

第八章 积分方程 习题参考答案

2 沃尔泰拉积分方程(8.1.24)与二阶微分方程(8.1.23)是等价的.其中系数 A 和 B 由边界条件或者初始条件决定.请对于下列条件确定各自的系数 A 和 B.

(1) $f(a)=\alpha, f(b)=\beta$

(2) $f(a)=\alpha, f'(a)=\beta$

(3) $f(b)=\alpha, f'(b)=\beta$

答案

(1)

$$B=\frac{1}{b-a}[\beta-\alpha-\int_a^b(b-u)\varphi(u,f(u))\mathrm{d}u]$$

$$A=\alpha-Ba=\alpha-\frac{a}{b-a}[\beta-\alpha-\int_a^b(b-u)\varphi(u,f(u))\mathrm{d}u]$$

(2) $B=\beta$， $A=\alpha-\beta a$

(3) $B=\beta-\int_a^b\varphi(u,f(u))\mathrm{d}u$， $A=\alpha-b\beta+\int_a^b u\varphi(u,f(u))\mathrm{d}u$

5 把以下微分方程的定解问题化为对应的积分方程.

(1) $y''+y=\cos x,\ \ y(0)=0, y'(0)=1$

(2) $y''+(1+x^2)y=\cos x,\ \ y(0)=0, y'(0)=2$

(3) $y''+4y=\varphi(x),\ \ 0<x<\pi/2,\qquad y(0)=0, y(\pi/2)=0$

答案

(1) $f(x)=x-\cos x+1-\int_0^x(x-u)f(u)\mathrm{d}u$

(2) $f(x)=2x-\cos x+1-\int_0^x(x-u)(1+u^2)f(u)\mathrm{d}u$

(3) $f(x)=-x\int_0^{\pi/2}(1-\frac{2}{\pi}u)(\varphi(u)-4f(u))\mathrm{d}u+\int_0^x(x-u)(\varphi(u)-4f(u))\mathrm{d}u$

6 把以下积分方程化为微分方程再求解.

(1) $x-\int_0^x\mathrm{d}y\mathrm{e}^{x-y}f(y)=f(x)$

(2) $\int_0^x\mathrm{d}y\mathrm{e}^{x-y}f(y)=x$

(3) $1+2\int_0^x\frac{2y+1}{(2x+1)^2}f(y)\mathrm{d}y=f(x)$

答案

(1) $f(x)=x-\frac{1}{2}x^2$ (2) $f(x)=1-x$. (3) $f(x)=\frac{4x+1}{2x+1}$.

8 用迭代法求解下列积分方程.

(1) $f(x)=1+\lambda\int_0^\infty\mathrm{d}y\mathrm{e}^{-(x+y)}f(y)=1+\lambda\mathrm{e}^{-x}(\mathrm{e}^{-y},f)$ (2) $f(x)=1+\lambda\int_0^x\mathrm{d}yf(y)$

在什么λ值，迭代法收敛？

答案

(1) $f(x)=1+\dfrac{2\lambda}{2-\lambda}\mathrm{e}^{-x}$，$\lambda\neq 2$ (2) $f(x)=\mathrm{e}^{\lambda x}$，任意有限的$\lambda$

9 用迭代法求解下列积分方程.

(1) $f(x)=\dfrac{5}{6}x+\dfrac{1}{2}\int_0^1 \mathrm{d}y f(y)xy$

(2) $f(x)=\mathrm{e}^x-\dfrac{1}{2}\mathrm{e}+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\int_0^1 \mathrm{d}y f(y)$

(3) $f(x)=1+\int_0^x \mathrm{d}y f(y)(y-x)$

(4) $f(x)=x+\int_0^x \mathrm{d}y f(y)(y-x)$

答案

(1) $f(x)=x$ (2) $f(x)=\mathrm{e}^x$ (3) $f(x)=\cos x$ (4) $f(x)=\sin x$

10 求解如下积分方程.

(1) $f(x)=\sin x-\dfrac{1}{4}x+\dfrac{1}{4}\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}y f(y)xy$

(2) $f(x)=1-2x-4x^2+\int_0^x \mathrm{d}y f(y)[3+6(x-y)-4(x-y)^2]$

答案

(1) $f(x)=\sin x$ (2) $f(x)=\mathrm{e}^x$

12 当$V(\boldsymbol{r})=V_0\mathrm{e}^{-\mu r}$时，估计李普曼-许温格方程的核的范数.按照这个估计，V_0在取什么值的时候玻恩级数收敛？

答案

若用

$$\|K\|^2\leq\frac{m^2}{2\pi\hbar^4\,\mathrm{Im}\,q}\int|V(\boldsymbol{r})|^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{r} \tag{8.2.46}$$

得到

$$|V_0|\leq\frac{2\mu\hbar^2\sqrt{\mu\,\mathrm{Im}\,q}}{m}$$

若用

$$\|K\|^2\leq\left(\frac{m}{2\pi\hbar^2}\right)^2\int_0^\infty \mathrm{d}s\int_0^s \mathrm{d}u\int_{-u}^u \mathrm{d}t(s^2-t^2)\frac{e^{-2u\,\mathrm{Im}\,q}}{u}V(r)V(r') \tag{8.2.51}$$

得到

$$V_0\leq\frac{\sqrt{3}\pi\hbar^2\mu^2}{2\sqrt{2}m}$$

13 对于具有δ势的一维薛定谔方程，$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\psi(x)-V_0\delta(x)\psi(x)=E\psi(x)$

(1) 当$V_0>0$，证明，不管V_0的值多大，在这个势场中有且仅有一个束缚态，确定这个束缚态的能量和波函数.

(2) 当$V_0<0$，具有正能量E的一个粒子从远处入射时，其中有多大部分穿透势垒？多大部分被粒子反射？

答案

(1) E<0 时，解为束缚态。.波函数为：$\psi(x)=\sqrt{p}\mathrm{e}^{-p|x|}$

能量值为：$E=-\frac{mV_0^2}{2\hbar^2}$

(2) E>0 时，方程的解为：$\psi(x)=\varphi(x)+\frac{\mathrm{i}\alpha\varphi(0)}{1-\mathrm{i}\alpha}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k|x|}$，$k=\sqrt{2mE/\hbar^2}$，

$\alpha=mV_0/\sqrt{2mE}\hbar$

反射系数是$r=\frac{mV_0^2/2E\hbar^2}{1+mV_0^2/2E\hbar^2}$。透射系数是$t=\frac{1}{1+mV_0^2/2E\hbar^2}$。

24 求下列可分核积分方程的解.

(1) $f(x)=2x-\pi+4\int_0^{\pi/2}\sin^2 xf(y)\mathrm{d}y$

(2) $f(x)=1+\lambda\int_0^1\cos(q\ln y)f(y)\mathrm{d}y$

(3) $f(x)=\sin x+\lambda\int_0^{\pi/2}\sin x\cos yf(y)\mathrm{d}y$

(4) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}+\lambda\int_0^1\cos^{-1}xf(y)\mathrm{d}y$

(5) $f(x)=x+\lambda\int_0^{2\pi}\sin x|\pi-y|f(y)\mathrm{d}y$

答案

(1) $f(x)=\frac{\pi^2}{\pi-1}\sin^2 x+2x-\pi$

(2) $f(x)=\frac{1+q^2}{1+q^2-\lambda}$.这是一个常数解。有解的条件是$\lambda\neq 1+q^2$

(3) $f(x)=\frac{2}{2-\lambda}\sin x$.有解的条件是$\lambda\neq 2$

当$\lambda=2$时无解，因为此时$(\psi,g)=(\cos x,\sin x)\neq 0$

(4) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}+\dfrac{\lambda}{1-\lambda}\dfrac{\pi}{2}\cos^{-1}x$.有解的条件是$\lambda\neq 1$。

(5) $f(x)=x+\lambda I\sin x=x+\lambda\pi^3\sin x$，对任意$\lambda$都有解。

26 求解积分方程 $f(x)=\sin x+\cos x+\lambda\int_0^{\pi}\dfrac{\sin(x+x')}{\pi}f(x')\mathrm{d}x'$.

答案

$f(x)=\dfrac{\sin x+\cos x}{1-\lambda/2}$ 当$\lambda\neq 2$

27 求解方程

(1) $f(x)=x+\lambda\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-(x+y)}f(y)\mathrm{d}y$

(2) $f(x)=x+\dfrac{\lambda}{\pi}\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}y\cos(x+y)f(y)$

答案

(1) $f(x)=x+\dfrac{2\lambda}{2-\lambda}\mathrm{e}^{-x}$, $\lambda\neq 2$.当λ＝2 时，原方程无解。

(2) $$f(x)=x+\frac{\lambda}{\pi}\frac{1}{1-\lambda^2/16+\lambda^2/4\pi^2}\{[(1+\frac{\lambda}{4})(\frac{\pi}{2}-1)-\frac{\lambda}{2\pi}]\cos x$$
$$-[\frac{\lambda}{2\pi}(\frac{\pi}{2}-1)+1-\frac{\lambda}{4}]\sin x\}$$

当$\lambda=\pm\dfrac{4\pi}{\sqrt{\pi^2-4}}$时，矩阵 $I-\lambda M$ 的行列式为零，原方程无解。

33 用拉普拉斯变换求解第二类沃尔泰拉积分方程

(1) $x\mathrm{e}^{2x}-\int_0^{x}\mathrm{e}^{2(x-y)}f(y)\mathrm{d}y=f(x)$

(2) $1+x+\int_0^{x}\mathrm{e}^{-n(x-y)}f(y)\mathrm{d}y=f(x)$

(3) $\sin x-\int_0^{x}\sinh(x-y)f(y)\mathrm{d}y=f(x)$

答案

(1) $f(x)=\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^{x}$

(2) $f(x)=1+\dfrac{1}{n-1}-\dfrac{1}{(n-1)^2}+\dfrac{n}{n-1}x+\dfrac{-n+2}{(n-1)^2}e^{-n+1}$

(3) $f(x)=2\sin x-x$

34 用拉普拉斯变换求解第一类沃尔泰拉积分方程

(1) $\int_0^x e^{-(x-y)} f(y)\mathrm{d}y = e^{-x} + x - 1$

(2) $\int_0^x \cos(x-y) f(y)\mathrm{d}y = x\sin x$

(3) $\int_0^x (x-y) f(y)\mathrm{d}y = \cosh x - 1$

答案

(1) $f(x) = x$

(2) $f(x) = 2\sin x$

(3) $f(x) = \cosh x$

37 求解下列卷积型沃尔泰拉积分方程.

(1) $\int_0^x f(x-y)f(y)\mathrm{d}y = A^2 x^\alpha$

(2) $\int_0^x f(x-y)f(y)\mathrm{d}y = A^2 e^{\beta x}$

(3) $\int_0^x f(x-y)f(y)\mathrm{d}y = A^2 x^\alpha e^{\beta x}$

(4) $\int_0^x f(x-y)f(y)\mathrm{d}y = A\sin\alpha x$

(5) $\int_0^x f(x-y)f(y)\mathrm{d}y = Ae^{\beta x}\sin\alpha x$

答案

(1) $f(x) = \pm A\dfrac{\Gamma^{1/2}(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha/2+1/2)} x^{(\alpha-1)/2}$

(2) $f(x) = \pm A\dfrac{e^{\beta x}}{\sqrt{\pi x}}$

(3) $f(x) = \pm A\Gamma^{1/2}(\alpha+1)e^{\beta x}\dfrac{x^{(\alpha-1)/2}}{\Gamma((\alpha+1)/2)}$

(4) $f(x) = \pm A\sqrt{\alpha}J_0(\alpha x)$

(5) $f(x) = \pm A\sqrt{\alpha}e^{\beta x}J_0(\alpha x)$

39 求解以下多项式类型的积分方程.

(1) $\int_{-1}^{1}(xy+x^2y^2)f^2(y)\mathrm{d}y=f(x)$

(2) $\int_{-1}^{1}x^2y^2f^3(y)\mathrm{d}y=f(x)$

答案

(1) $f(x)=\pm\frac{15}{4\sqrt{7}}x+\frac{5}{4}x^2$

(2) $f(x)=\pm\frac{3}{\sqrt{2}}x^2$