《数值分析》引论

包承龙

丘成桐数学科学中心

目录

教材、助教及答疑安排

参考书：关治、陆金甫，数值分析基础（第三版），高等教育出版社。
助教安排：

- 李家宏: 周二上午10-11, 18810960910
- 郑棣瀚：周一上午10-11，18010980897
- 李玥瑶: 周三下午4-5，17888825815
- 张跃进：周一下午2-3，18810960897

答疑地点：近春园西楼3层大厅

微信群

分数设置

- 上课考勤 (10%)
- 作业成绩 (40%)：4次作业，每次10%, 通过网络学堂提交
- 课程项目 (20%)：具体要求会在项目任务书中给出
- 期末成绩 (30%)

作业要求：

- 准时提交作业: 截止日期之后，不接收任何提交作业；
- 务必写清楚必要的推导步骤和计算细节；
- 允许讨论，但不能抄袭。

课程项目要求：

- 一人或两人一组，自由组队，请在10月10日之前将组队名单发至邮箱：num_ana_thu@163.com
  邮件名称：姓名1+姓名2-高等数值分析组队；单人组队不需要发送邮件；逾期未提交者，视为单人组队。

目录

科学问题的研究步骤

科学问题 → 数学建模 → 数值求解 → 结果分析

1. 误差分析
2. 稳定性分析
3. 计算量分析
4. 存储量分析
5. 自适应性

→

1. 适用范围
2. 可靠性
3. 准确性
4. 高效性
5. 便捷性

数值分析的重要性

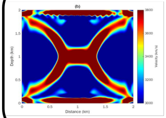
不同应用问题对精度要求不同

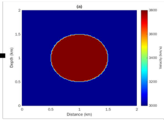
- 图像处理

$A\Big($  $-$  $\Big) \approx 10^{-2}$

真实图像　　复原图像

- 利用偏微分方程进行速度结构反演

$A\Big($ 

$-$ 

$\Big) \approx 10^{-4}$

- 对不同的问题构造相匹配的数值计算方法

数值分析的重要性

求解相同问题中的等价不等效问题

例：如何计算 $\phi = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 的20次幂？

- 方法一：

$$\phi^n = \phi \times \phi^{n-1}$$

- 方法二：

$$\phi^n = \phi^{n-2} - \phi^{n-1},$$

由于$\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2 = 1 - \frac{\sqrt{5}-1}{2}$

- 不同方法会导致不同的误差累积效应

本课程主要目的与主要内容

目的：

- 熟悉并掌握典型问题的基本数值分析方法
- 理解文献中关于数值分析方面的推导过程
- 能够将数值分析的思想用于解决各自的科研与应用问题

内容包括：

1. 线性代数问题：方程组、特征值、线性最小二乘问题
2. 非线性方程和方程组的数值解法
3. 函数的插值和逼近
4. 数值积分和数值微分
5. 常微分方程初值问题的数值解法

目录

误差来源

1. 输入数据的误差
2. 舍入误差：计算机浮点数运算有限
3. 截断误差：简化计算导致的误差

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots$$

4. 累积误差：多次计算导致的误差累积
   若$x = x_A + \epsilon_x$, $y = y_A + \epsilon_y$, 则

$$\begin{aligned} x + y &= (x_A + y_A) + (\epsilon_x + \epsilon_y) \\ xy &= x_A y_A + (x_A \epsilon_y + y_A \epsilon_x + \epsilon_x \epsilon_y) \end{aligned}$$

误差评判标准

设x_A是x的一个近似值

1. 绝对误差：$|x - x_A|$
2. 相对误差：$\frac{|x-x_A|}{|x|}$,若 $x \neq 0$
3. 误差界：存在$\epsilon_A > 0$,使得
$$|x - x_A| \leq \epsilon_A \quad \text{或者} \quad \frac{|x - x_A|}{|x|} \leq \epsilon_A$$
4. 十进制表示：
$$x_A = \pm 10^k \times 0.d_1 d_2 \cdots d_i \cdots ,$$
其中$d_1 \neq 0,\ d_i \in \{0, 1 \ldots, 9\}$.
5. 有效数字：若存在n满足：$|x - x_A| \leq 0.5 \times 10^{k-n}$，称$x_A$具有$n$位十进制有效数字。

函数值的误差估计

基本思想：泰勒展式或者中值定理

$$f(x) = f(x_A) + f'(x_A)(x - x_A) + \frac{f''(x_A)}{2}(x - x_A)^2 + \cdots$$

$$f(x) = f(x_A) + f'(x_A)(x - x_A) + \frac{f''(\xi)}{2}(x - x_A)^2,\ \xi \in (x, x_A)$$

绝对误差的近似估计：

$$|f(x) - f(x_A)| \leq |f'(x_A)||x - x_A|$$

多元函数的一阶泰勒展式

$$f(x) \approx f(x_A) + \nabla f(x_A)^\top (x - x_A),$$

其中$\nabla f(x) = (\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial} x_n)^\top \in \mathbb{R}^n$

计算机浮点数表示

二进制表示：

$$x_A = \pm 2^J \times 0.d_1 d_2 \cdots d_t,$$

其中$d_1 = 1$, $d_i \in \{0, 1\}$, t称为字长，J为阶。
$t = 23, J \in [-126, 127]$(单精度)， $t = 52, J \in [-1022, 1023]$（双精度）
注意：浮点数呈现非均匀分布，仅在每一个$[2^{k-1}, 2^k)$区间上的浮点个数相同。
定义$\mathrm{fl}(x)$为x的浮点数表示，有如下定理：

定理

设x满足$m \leq |x| \leq M$, 则存在实数δ满足$|\delta| \leq \frac{1}{2} 2^{1-t}$, 使得

$$\mathrm{fl}(x) = x(1 + \delta).$$

同理可知，$\mathrm{fl}(x * y) = (x * y)(1 + \delta)$。

目录

病态问题

输入数据的微小变化导致输出结果的巨大差异

条件数：设$f(x) \neq 0$, 局部相对误差：

$$\underbrace{\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{f(x)}\right|}_{\text{函数值相对误差}} \approx \left|\frac{xf'(x)}{f(x)}\right| \underbrace{\left|\frac{xf'(x)}{f(x)}\right|}_{\text{条件数}} \underbrace{\left|\frac{h}{x}\right|}_{\text{自变量相对误差}}$$

- 病态问题：条件数远大于1
- 例：设$f(x) = x^8$, 则

$$\left|\frac{xf'(x)}{f(x)}\right| = 8.$$

算法稳定性

计算过程中的微小扰动对于输出结果的影响

设$\epsilon_0 > 0$为初始误差，ϵ_n为第n步的误差

1. 线性型：$|\epsilon_n| \approx Cn\epsilon_0$, 通常不可避免
2. 指数型: $|\epsilon_n| \approx C^n\epsilon_0$，尽量避免$C > 1$（数值不稳定）

例：计算$x_n = \frac{1}{3^n}$

- 方法1：$x_0 = 1$, $x_n = \frac{1}{3}x_{n-1}$ （稳定）
- 方法2: $x_0 = 1$, $x_1 = \frac{1}{3}$, $x_n = \frac{4}{3}x_{n-1} - \frac{1}{3}x_{n-2}$ （不稳定）
- 方法3：$x_0 = 1$, $x_1 = \frac{1}{3}$, $x_n = \frac{10}{3}x_{n-1} - x_{n-2}$ （不稳定）

避免误差的手段

1. 避免有效数字的损失
   - 相近数相减：转换等价（近似）形式
     计算方程$x^2-16x+1=0$的根

$$x_1=8+\sqrt{63},\quad x_2=8-\sqrt{63}=\frac{1}{x_1}$$

   - 大数吃小数：调整计算次序

$$100+\delta_1+\cdots+\delta_{100}=100+\underbrace{(\delta_1+\cdots+\delta_{100})}_{\text{调整计算次序}}$$

2. 减少运算次数
   - 秦九韶算法：$p_n(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$

$$u_n=a_n,\quad u_k=u_{k+1}x+a_k, k=n-1,n-2,\ldots,0,\quad p_n(x)=u_0$$

     运算次数：n 次乘法 + n次加法

目录

矩阵特征值

$A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 复的$n \times n$的方阵，若存在$\lambda \in \mathbb{C}$和$x \neq 0$, 满足

$$Ax = \lambda x$$

其中λ为特征值，x为特征向量。
特征多项式：

$$\det(\lambda I - A) = 0$$

设$\sigma(A)$为A的全体特征值的集合，则

$$\rho(A) = \max\left\{|\lambda| | \lambda \in \sigma(A)\right\},$$

称为A的谱半径。
矩阵A的迹：$\mathbf{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$

基本性质

- 若A的特征值为$\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, 则

$$\mathbf{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i, \quad \det A = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$$

- 矩阵A与矩阵B相似：存在可逆矩阵P, 使得$A = P^{-1}BP$
- A可对角化$\Leftrightarrow$ A与某个对角阵相似 $\Leftrightarrow$ A 有n个线性无关的特征向量
- 特征多项式：$\det(\lambda I - A) = (\lambda - \lambda_1)^{n_1}(\lambda - \lambda_2)^{n_2} \cdots (\lambda - \lambda_s)^{n_s}$且满足$n_1 + \cdots + n_s = n$
- n_i称为特征值λ_i的代数重数，λ_i所对应的特征向量所构成的线性空间维数m_i为其几何重数, 且$1 \le m_i \le n_i$
- A可对角化$\Leftrightarrow$对任意i满足$n_i = m_i$

Jordan标准形

设矩阵A有特征值$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$, 则存在可逆矩阵$P$, 使得

$$J = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_s \end{bmatrix}$$

其中$J_i \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i}$且具有$m_i$块对角结构, 满足

$$J_i = \begin{bmatrix} J_{i1} & & & \\ & J_{i2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{im_i} \end{bmatrix} \quad \text{且} \quad J_{ik} = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \lambda_i & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i \end{bmatrix}$$

其中， J_{ik}称为Jordan块

线性空间

设$\mathbb{P}$为一个数域，V为一个非空集合，在V上定义运算

- 加法：存在零元素、负元素，满足交换律、结合律
- 数乘：对任意的$u, v \in V$, $\alpha, \beta \in \mathbb{P}$, 满足

$$1u = u,\ \alpha(\beta u) = (\alpha\beta)u, \alpha(u+v) = \alpha u + \alpha v, (\alpha+\beta)u = \alpha u + \beta u$$

- 称V为数域$\mathbb{P}$上的线性空间

重要概念： 设$v_1, \dots, v_p \in V$

- 线性相关：$\mathbb{P}$中存在不全为零的$\alpha_1, \dots, \alpha_p$, 使得

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_p v_p = 0$$

- 基，维数，子空间，...

内积空间

设V是数域$\mathbb{P}$上的线性空间，内积$(\cdot,\cdot):V\times V\mapsto\mathbb{P}$满足：

- $(u+v,w)=(u,w)+(v,w),\ \ \forall u,v,w\in V$
- $(\alpha u,v)=\alpha(u,v),\ \ \forall u,v\in V,\ \alpha\in\mathbb{P}$
- $(u,v)=\overline{(v,u)},\ \ \forall u,v\in V$，$\overline{a}$为共轭复数
- $(u,u)\geq 0,\ \ \forall u\in V$且 $(u,u)=0\Leftrightarrow u=0$

权函数：定义在$[a,b]$上的可积函数ρ满足：

1. $\rho(x)\geq 0,\ \forall x\in[a,b]$
2. 在$[a,b]$上的任意子区间上，ρ不恒为零

例：设ρ为$[a,b]$上的权函数，对任意$f,g\in C([a,b])$，定义内积

$$(f,g)=\int_a^b\rho(x)f(x)g(x)dx$$

内积的基本性质

若$(u,v)=0$，则称u与v正交

Cauchy-Schwartz不等式： $|(u,v)^2| \le (u,u)(v,v)$, 等号成立当且仅当u,v线性相关

Gram矩阵： 设$u_1,\ldots,u_n \in V$

$$G=\begin{bmatrix} (u_1,u_1) & (u_2,u_1) & \cdots & (u_n,u_1) \\ (u_1,u_2) & (u_2,u_2) & \cdots & (u_n,u_2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (u_1,u_n) & (u_2,u_n) & \cdots & (u_n,u_n) \end{bmatrix} \text{非奇异} \Leftrightarrow u_1,\ldots u_n\text{线性无关}$$

Gram-Schmidt正交化：设$u_1,\ldots,u_n \in V$ 线性无关

$$\begin{cases} v_1 = u_1 \\ v_i = u_i + \sum_{k=1}^{i-1} \frac{(u_i,u_k)}{(v_k,v_k)} v_k, \quad i=2,3,\ldots,n \end{cases}$$

则有$(v_i,v_j)=0,\ \forall i\neq j$

赋范线性空间

设V是$\mathbb{P}$上的线性空间，定义$\|\cdots\|: V\mapsto\mathbb{R}$,满足

- 正定性：$\|u\|\geq 0, \forall u\in V$ 且 $\|u\|=0\Leftrightarrow u=0$
- 齐次性：$\|\alpha u\|=|\alpha|\|u\|, \forall\alpha\in\mathbb{P}, u\in V$
- 三角不等式：$\|u+v\|\leq\|u\|+\|v\|, \forall u,v\in V$

称$\|\cdot\|$为V的范数

推广：

- $\|u-v\|\geq|\|u\|-\|v\||, \forall u,v\in V$
- 若V为内积空间，则其诱导出一个范数$\|u\|=(u,u)^{\frac{1}{2}}, \forall u\in V$
- 若V存在两种范数$\|\cdot\|_a$, $\|\cdot\|_b$, 称$\|\cdot\|_a$与$\|\cdot\|_b$等价，若存在$C_2>C_1>0$, 满足

$$C_1\|u\|_a\leq\|u\|_b\leq C_2\|u\|_a, \quad \forall u\in V$$

$\mathbb{R}^n$上的向量范数

设$x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)^\top\in\mathbb{R}^n$，有定义：

1. 1-范数：$\|x\|_1=|x_1|+|x_2|+\cdots+|x_n|$
2. 2-范数：$\|x\|_2=\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}$
3. ∞-范数：$\|x\|_\infty=\max\{|x_i||1\le i\le n\}$

定理

$\mathbb{R}^n$上的所有范数是相互等价的。

设$A\in\mathbb{R}^{n\times n}$，$\|\cdot\|$是$\mathbb{R}^n$上的一种范数，则$\|Ax\|$是关于$x$的连续函数

$$\big|\|A(x+h)\|-\|Ax\|\big|\le\|Ah\|=\left\|\sum_{j=1}^n h_ja_j\right\|\le\sum_{j=1}^n|h_j|\|a_j\|$$

$\mathbb{R}^{n\times n}$上的矩阵范数

$\mathbb{R}^{n\times n}$的范数满足如下四个条件：

- $\|A\| \geq 0,\ \forall A \in \mathbb{R}^{n\times n}$,且$\|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0$
- $\|\alpha A\| = |\alpha|\|A\|,\ \forall \alpha \in \mathbb{R}, A \in \mathbb{R}^{n\times n}$
- $\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|,\ \forall A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$
- $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|,\ \forall A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ （矩阵乘法的相容性）

Frobenius范数：$\mathbb{R}^{n^2}$上的向量范数

$$\|A\|_F = \left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\mathbf{Tr}(A^\top A)\right)^{\frac{1}{2}}$$

不等式：$a_i^\top$为第i行向量，b_j为第j列向量

$$\|AB\|_F^2 = \sum_{i,j=1}^{n} (a_i^\top b_j)^2 \leq \sum_{i,j=1}^{n} (\|a_i\|_2\|b_j\|_2)^2 = \|A\|_F^2\|B\|_F^2$$

算子范数

向量范数与矩阵范数相容：$\|Ax\| \leq \|A\|\|x\|, \forall A \in \mathbb{R}^{n\times n}, x \in \mathbb{R}^n$
给定向量范数$\|\cdot\|$, 定义相应的矩阵范数，也称为算子范数：

$$\|A\| = \max_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \max_{\|x\|=1} \|Ax\| \tag{1}$$

典型范数：

- $\|A\|_1 = \max_{1\leq j\leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$ (列范数)
- $\|A\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$ （列范数）
- $\|A\|_2 = [\rho(A^\top A)]^{\frac{1}{2}}$ (谱范数) (A为实对称矩阵$\Leftrightarrow \|A\|_2 = \rho(A)$)
- 设$P \in \mathbb{R}^{n\times n}$且非奇异，$\|\cdot\|_\alpha$为 $\mathbb{R}^n$上的向量范数，则P诱导向量范数$\|x\|_{P,\alpha} = \|Px\|_\alpha$，且此范数诱导矩阵范数

$$\|A\|_{P,\alpha} = \|PAP^{-1}\|_\alpha \tag{2}$$

算子范数的重要性质

定理

1. 设$\|\cdot\|$为$\mathbb{R}^{n\times n}$上的任一种范数，则 $\rho(A)\le\|A\|, \forall A\in\mathbb{R}^{n\times n}$
2. 对任意$A\in\mathbb{R}^{n\times n}$和$\epsilon>0$, 至少存在一种算子范数$\|\cdot\|$, 使得

$$\|A\|\le\rho(A)+\epsilon$$

证明.

1. 设$|\lambda|=\rho(A)$, $x\neq 0$为其对应的特征向量。存在向量y，使得$xy^\top$为非零矩阵，且有

$$\rho\|xy^\top\|=\|\lambda xy^\top\|=\|Axy^\top\|\le\|A\|\|xy^\top\|$$

2. 设非奇异矩阵P，使得$P^{-1}AP$具有Jordan标准形，构造

$$D_\epsilon=\mathrm{diag}(1,\epsilon,\dots,\epsilon^{n-1})$$

定理

设$\|\cdot\|$为$R^{n\times n}$上的一种算子范数，矩阵B满足$\|B\|<1$, 则$I+B$非奇异，且

$$\|(I+B)^{-1}\| \leq \frac{1}{1-\|B\|}$$

证明.

若$I+B$奇异，则有$x\neq 0$,使得$(I+B)x=0 \Rightarrow Bx=-Ix \Rightarrow \rho(B)\geq 1$
记$D=(I+B)^{-1}$, 有不等式

$$1=\|I\|=\|(I+B)D\|=\|D+BD\|\geq \|D\|(1-\|B\|)$$

由$\|B\|<1$可知结论 □

推论： 若$A,C\in\mathbb{R}^{n\times n}$, A可逆，且$\|A^{-1}\|\leq\alpha$, $\|A-C\|\leq\beta$, $\alpha\beta<1$, 则C可逆，且$\|C^{-1}\|\leq\frac{\alpha}{1-\alpha\beta}$.

目录

正交矩阵和酉矩阵

正交矩阵：$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$满足$A^\top A = I$

- $A^{-1} = A^\top$, $A^\top$也是正交矩阵
- $\|a_j\|_2 = 1, \forall j = 1, \ldots, n$
- $|\det A| = 1$
- 若A, B都是正交矩阵，则AB与BA都是正交矩阵

酉矩阵：$A \in \mathbb{C}^{n\times n}$满足$A^H A = I$

- $A^{-1} = A^H$, A^H也是正交矩阵
- $\|a_j\|_2 = 1, \forall j = 1, \ldots, n$
- $|\det A| = 1$
- 若A, B都是酉矩阵，则AB与BA都是酉矩阵

备注： $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$且$m > n$, 则$A^\top A = I$只能保证矩阵$A$为列正交

对称矩阵和对称正定矩阵

实对称矩阵：$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$且$A = A^\top$

- A的特征值均为试数，且A有n个线性无关的特征向量
- 存在正交矩阵P，使得$P^{-1}AP$为对角矩阵
- $\|A\|_2 = \rho(A)$

对称正定矩阵：$(x, Ax) > 0, \quad \forall x \neq 0, x \in \mathbb{R}^n$

- 顺序主子式：i阶顺序主子式$\Delta_i = \det A_i$，其中

$$A_i = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ii} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{i\times i}$$

- A对称正定$\Leftrightarrow \Delta_i > 0, i = 1, 2, \ldots, n \Leftrightarrow A$的所有特征值都大于零

A对称半正定：$(x, Ax) \geq 0, \quad \forall x \neq 0, x \in \mathbb{R}^n \Leftrightarrow A$的所有主子式$\geq 0$

正规矩阵

正规矩阵：$A \in \mathbb{C}^{n\times n}$且$A^HA = AA^H$

- 等价于A酉相似于对角矩阵（存在酉矩阵U,使得UAU^H为对角阵）
- A为正规矩阵，与A酉相似的矩阵为正规矩阵
- A为正规矩阵，A有n个线性无关的特征向量

性质：

- 正规矩阵A的全部特征值为实数时，$A = A^H$(厄米特)
- 正规矩阵A的全部特征值为零或者虚数时，$A = -A^H$（反厄米特）
- 正规矩阵A的全部特征值的模长为1时，A为酉矩阵

若$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$，则所有结论均为实矩阵形式

初等矩阵

实初等矩阵：

$$E(\mathbf{u},\mathbf{v},\sigma)=\mathbf{I}-\sigma\mathbf{u}\mathbf{v}^\top,\quad \mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathbb{R}^n,\sigma\in\mathbb{R},\sigma\neq 0$$

设$\mathbf{u}=(u_1,u_2,u_3)^\top$, $\mathbf{v}=(v_1,v_2,v_3)^\top$, 则

$$E(\mathbf{u},\mathbf{v},\sigma)=\begin{bmatrix}1-\sigma u_1v_1 & -\sigma u_1v_2 & -\sigma u_1v_3\\ -\sigma u_2v_1 & 1-\sigma u_2v_2 & -\sigma u_2v_3\\ -\sigma u_3v_1 & -\sigma u_3v_2 & 1-\sigma u_3v_3\end{bmatrix}$$

例：初等置换矩阵: 记$\mathbf{I}_{ij}=E(\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_j,1)$, 则有$I_{ij}A$为交换$A$的第$i$行与第$j$行，$\mathbf{A}\mathbf{I}_{ij}$为交换A的第$i$列与第$j$列
性质：$\mathbf{I}_{ij}^{-1}=\mathbf{I}_{ij}$ 且 $\det\mathbf{I}_{ij}=-1,\ \forall i\neq j$
排列矩阵P: 若干置换矩阵的乘积，且有$\mathbf{P}^{-1}=\mathbf{P}^\top$, $\det\mathbf{P}=1$或-1

设$\mathbf{l}_j = (0, \cdots, 0, l_{j+1,j}, \cdots, l_{n,j})^\top$
高斯变换矩阵：

$$\mathbf{L}_j(\mathbf{l}_j) = \mathbf{I} + \mathbf{l}_j \mathbf{e}_j^\top = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & l_{j+1,j} & 1 & & \\ & & \vdots & & \ddots & \\ & & l_{n,j} & & & 1 \end{bmatrix}$$

容易知道，$\mathbf{L}_j(\mathbf{l}_j)^{-1} = \mathbf{I} - \mathbf{l}_j \mathbf{e}_j^\top = \mathbf{L}_j(-\mathbf{l}_j)$ 且 $\det(L_j(\mathbf{l}_j)) = 1$
左乘$\mathbf{L}_j(\mathbf{l}_j)\mathbf{A}$:第1行至第$j$行与$\mathbf{A}$相同；第$k(k = j+1, \ldots, n)$行是$\mathbf{A}$的第$j$行乘以$l_{k,j}$加上$\mathbf{A}$的第$k$行
右乘有类似结论，将行换成列即可。

性质：$\mathbf{e}_i^\top \mathbf{l}_j = 0, \forall i < j$,
任何单位下三角形矩阵有如下表示：

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}_1(\mathbf{l}_1)\mathbf{L}_2(\mathbf{l}_2)\cdots\mathbf{L}_{n-1}(\mathbf{l}_{n-1}) = \mathbf{I} + [\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2, \cdots, \mathbf{l}_{n-1}, \mathbf{0}]$$

下（上）三角矩阵性质：

- 下（上）三角矩阵的乘积为下（上）三角矩阵
- 可逆下（上）三角矩阵的逆为下（上）三角矩阵

可约矩阵与对角占优矩阵

可约矩阵: $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$，存在排列矩阵$\mathbf{P}$, 使得 $\mathbf{P}^\top \mathbf{A}\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix}$

$\mathbf{A}$不可约$\Leftrightarrow$ 方向图$G(\mathbf{A})$是强连接的

严格对角占优：$|a_{ii}| > \sum_{j\neq i} |a_{ij}|, \forall i = 1, \ldots, n$

弱对角占优：$|a_{ii}| \geq \sum_{j\neq i} |a_{ij}|, \forall i = 1, \ldots, n$

重要性质：

- $\mathbf{A}$为严格对角占优矩阵$\Rightarrow a_{ii} > 0, \forall i$且$\mathbf{A}$非奇异
- $\mathbf{A}$为不可约的弱对角占优矩阵$\Rightarrow a_{ii} \neq 0, \forall i$且$\mathbf{A}$非奇异
- 若$\mathbf{A}$满足
  - $\mathbf{A} = \mathbf{A}^\top$, $a_{ii} > 0$, $\forall i$
  - $\mathbf{A}$严格对角占优或者不可约弱对角占优

  则$\mathbf{A}$对称正定