函数逼近

包承龙

丘成桐数学科学中心

本章研究对象及目标

设F为定义在区间$[a,b]$上的函数所组成的线性空间，Φ为F中的一个集合。

函数逼近：对于$f\in F$，求$p\in\Phi$，使得

$$f-p \quad \text{在某种意义下最小。}$$

常用的函数空间：

$$F=L_2[a,b],C[a,b], \quad \Phi=\text{多项式、有理分式或者三角多项式等。}$$

研究不同函数空间，不同距离下的最佳逼近。

目录

线性无关多项式

$\varphi_0, \varphi_1, \cdots, \varphi_n$ 在空间$C[a,b]$上线性无关：

$$\sum_{j=0}^{n} a_j\varphi_j(x) = 0, \forall x \in [a,b], \quad \Leftrightarrow \quad a_j = 0,\ \forall j = 0,1,\cdots,n.$$

定理

设$\varphi_j \in \mathcal{P}_j, j = 0,1,\cdots,n$，则$\{\varphi_j\}$在$C[a,b]$上线性无关。

推论： 若$\varphi_j \in \mathcal{P}_n, j = 0,1,\cdots,n$是线性无关的多项式组，则对任意的$f \in \mathcal{P}_n$，存在唯一$\{a_j\}_{j=0}^n$，使得

$$f(x) = a_0\varphi_0(x) + \cdots + a_n\varphi_n(x)$$

正交多项式

设ρ为$[a,b]$上的权函数，定义$f,g\in C[a,b]$的内积为

$$(f,g)=\int_a^b \rho(x)f(x)g(x)\mathrm{d}x \quad\Rightarrow\quad f,g\ \text{关于}\rho\text{正交。}$$

设φ_n为首项系数为$a_n\neq 0$的n次多项式，称多项式序列$\{\varphi_n\}$正交，若

$$(\varphi_i,\varphi_j)=\begin{cases}0, & \text{if } i\neq j\\ A_i, & \text{if } i=j\end{cases}$$

φ_n为n次正交多项式。

利用正交化方法，可以对任意的线性无关多项式组$\{\psi_j\}_{j=0}^n$进行正交化。

考虑$\psi_j = x^j$, $j = 0, 1, \cdots, n$, 对$\{\psi_j\}$正交化的序列为$\{\varphi_j\}$, 则有:

- $\varphi_j \in \mathcal{P}_j$ 且首项系数为1
- 任何k次多项式都可以由$\varphi_0, \cdots, \varphi_k$唯一线性表出
- $(\varphi_k, \varphi_j) = 0$, $\forall j < k$.

定理

设$\varphi_n, n \geq 0$是$C[a, b]$上的正交多项式组，则n次正交多项式φ_n在(a, b)上由n个不相同的零点。

定理

设$\varphi_n, n \geq 0$是$C[a,b]$上的正交多项式组,则有如下递推关系:

$$\varphi_{n+1}(x) = (\alpha_n x + \beta_n)\varphi_n(x) + \gamma_{n-1}\varphi_{n-1}(x),$$

其中$\varphi_{-1} \equiv 0$, a_n为φ_n的首相系数，且

$$\alpha_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}, \beta_n = -\frac{\alpha_n(x\varphi_n, \varphi_n)}{(\varphi_n, \varphi_n)}, \gamma_{n-1} = -\frac{\alpha_n(\varphi_{n-1}, x\varphi_n)}{(\varphi_{n-1}, \varphi_{n-1})}. \tag{1}$$

简化形式:

$$\gamma_{n-1} = -\frac{a_{n-1}a_{n+1}}{a_n^2}\frac{(\varphi_n, \varphi_n)}{(\varphi_{n-1}, \varphi_{n-1})}$$

推论: φ_{n+1}与φ_n不能由公共零根。

定理

设$\varphi_n, n \geq 0$是$C[a,b]$上的正交多项式组, 则有

$$(x-y)\sum_{k=0}^{n}\frac{\varphi_k(x)\varphi_k(y)}{\sigma_k} = \frac{1}{\alpha_n\sigma_n}[\varphi_{n+1}(x)\varphi_n(y) - \varphi_{n+1}(y)\varphi_n(x)],$$

其中$\sigma_k = (\varphi_k, \varphi_k)$, $\varphi_{-1} \equiv 0$, α_n由(1)给出。

Legendre多项式

区间$[a,b]=[-1,1]$, 权函数$\rho(x)\equiv 1$, 由此构造的正交多项式P_n:

$$\begin{cases} P_0(x)=1, \\ P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}[(x^2-1)^n], \quad n\geq 1 \end{cases}$$

基本性质:

- 正交性: $(P_n,P_m)=\begin{cases} 0, & \text{if } n\neq m \\ \frac{2}{2n+1}, & \text{if } n=m \end{cases}$
- 递推式: $(n+1)P_{n+1}(x)=(2n+1)xP_n(x)-nP_{n-1}(x)$
- 奇偶性: $P_n(-x)=(-1)^n P_n(x)$
- P_n在开区间$(-1,1)$上有n个不同零点。

Laguerre多项式

区间$[a,b]=[0,+\infty)$，权函数$\rho(x)=e^{-x}$，由此构造地正交多项式L_n:

$$L_n(x)=e^x\frac{d^n}{dx^n}(x^ne^{-x}),\ n=0,1,\cdots,$$

基本性质：

- 正交性：

$$\int_0^{+\infty}e^{-x}L_n(x)L_m(x)dx=\begin{cases}0, & \text{if } m\neq n,\\ (n!)^2, & \text{if } m=n.\end{cases}$$

- 递推性：$L_0(x)=1,\ L_1(x=1-x)$，相应的递推关系为

$$L_{n+1}(x)=(1+2n-x)L_n(x)-n^2L_{n-1}(x),\ n=1,2,\cdots.$$

Hermite多项式

区间$[a,b]=(-\infty,+\infty)$, 权函数$\rho(x)=e^{-x^2}$, 由此构造地正交多项式H_n:

$$H_n(x)=(-1)^n e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}e^{-x^2},\ n=0,1,\cdots.$$

基本性质:

- 正交性

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}H_m(x)H_n(x)dx=\begin{cases}0, & \text{if } m\neq n,\\ 2^n n!\sqrt{\pi}, & \text{if } m=n.\end{cases}$$

- 递推性: $H_0(x=1)$, $H_1(x)=2x$, 相应的递推关系为

$$H_{n+1}(x)=2xH_n(x)-2nH_{n-1}(x),\ n=1,2,\cdots.$$

目录

Chebyshev多项式

区间$[a,b]=[-1,1]$, 权函数$\rho(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, 由此构造地正交多项式$T_n$:

$$T_n(x)=\cos(n\arccos(x)),\ n\geq 0.$$

正交性:

$$(T_n,T_m)=\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}T_n(x)T_m(x)dx=\begin{cases}0, & \text{if } n\neq m,\\ \frac{\pi}{2}, & \text{if } n=m\neq 0,\\ \pi, & \text{if } n=m=0.\end{cases}$$

证明：令$x=\cos\theta$, $dx=-\sin\theta d\theta$.

奇偶性：$T_n(-x)=(-1)^nT_n(x)$, $n=0,1,2,\cdots$.

递推关系

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x),\ n = 1, 2, \cdots.$$

T_n的首项系数为2^{n-1}, $n = 1, 2, \cdots.$

T_n在$(-1, 1)$内有n个不同零点：

$$x_k = \cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right), k = 1, 2, \cdots, n.$$

T_n的极值点为

$$\bar{x}_k = \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right), \quad T_n(\bar{x}_k) = (-1)^k,\ k = 0, 1, \cdots, n.$$

极小化性质

设

$$\tilde{T}_0(x) = T_0(x), \tilde{T}_n(x) = T_{n-1}(x)/2^{n-1}$$

设$\bar{\mathcal{P}}_n$为所有次数小于或等于n的、首项系数为1的多项式。

定理

有如下关系：

$$\max_{x\in[-1,1]} |\tilde{T}_n(x)| \le \max_{x\in[-1,1]} |\varphi_n(x)|, \quad \varphi_n \in \bar{\mathcal{P}}_n$$

且有$\max_{x\in[-1,1]} |\tilde{T}_n(x)| = 1/2^{n-1}$.

在区间$[-1,1]$上的n次Lagrange插值多项式的余项为

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!}\underbrace{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)}_{w_{n+1}(x)\in\bar{\mathcal{P}}_{n+1}}$$

$$\Rightarrow \max_{x\in[-1,1]}|R_n(x)|\le\frac{1}{(n+1)!}\|f^{(n+1)}\|_\infty\max_{x\in[-1,1]}|w_{n+1}(x)|$$

由Chebyshev多项式的极小化性质可知：

$$\frac{1}{2^n}=\max_{x\in[-1,1]}|\tilde{T}_n(x)|\le\max_{x\in[-1,1]}|w_{n+1}(x)|$$

因此，取$x_0,\cdots,x_n$为$\tilde{T}_n(x)$的零点(可以有效抑制龙格现象)，则有

$$\max_{x\in[-1,1]}\le\frac{1}{2^n(n+1)!}\|f^{(n+1)}\|_\infty$$

推广：如何求区间$[a,b]$上的极小多项式？

目录

最佳平方逼近的概念

定义$L_\rho^2[a,b]$

$$L_\rho^2[a,b]=\left\{f:\|f\|_2=\sqrt{\int_a^b \rho(x)[f(x)]^2dx}<\infty\right\}.$$

记$\Phi=\mathrm{Span}\{\varphi_0,\cdots,\varphi_n\}$为$L_\rho^2[a,b]$上的$n+1$维线性子空间。

f在Φ下的最佳平方逼近$s^*\in\Phi$为

$$\|f-s^*\|_2=\inf\{\|f-s\|_2|s\in\Phi\}. \tag{2}$$

$s \in \Phi$等价于

$$s = a_0\varphi_0 + a_1\varphi + \cdots + a_n\varphi_n,\ a_0, a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{R}.$$

极小化问题(2)等价于

$$\min_a F(a_0, a_1, \cdots, a_n) := \int_a^b \rho(x)\left[\sum_{j=0}^n a_j\varphi_j(x) - f(x)\right]^2 dx$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} (\varphi_0,\varphi_0) & (\varphi_0,\varphi_1) & \cdots & (\varphi_0,\varphi_n) \\ (\varphi_1,\varphi_0) & (\varphi_1,\varphi_1) & \cdots & (\varphi_0,\varphi_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (\varphi_n,\varphi_0) & (\varphi_n,\varphi_1) & \cdots & (\varphi_n,\varphi_n) \end{bmatrix}}_{\text{Gram矩阵}\mathbf{A}} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (f,\varphi_0) \\ (f,\varphi_1) \\ \vdots \\ (f,\varphi_n) \end{bmatrix} \qquad (3)$$

n次最佳平方逼近多项式

区间$[a,b]=[0,1]$, $\Phi=\mathrm{Span}\{1,x,\cdots,x^n\}$, $\rho(x)=1$

$$(\varphi_j,\varphi_k)=\int_0^1 x^{k+j}dx=\frac{1}{k+j+1}$$

则公式(3)中的Gram矩阵为Hilbert矩阵，即

$$\mathbf{A}=\mathbf{H}_{n+1}(0,1)=\begin{bmatrix} 1 & 1/2 & \cdots & 1/(n+1) \\ 1/2 & 1/3 & \cdots & 1/(n+2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1/(n+1) & 1/(n+2) & & 1/(2n+1) \end{bmatrix}$$

正交函数组的最佳平方逼近

若Φ是正交函数组，则Gram矩阵是对角矩阵，则最佳平方逼近为

$$s_n^* = \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{\|\varphi_j\|_2^2}(f, \varphi_j)\varphi_j$$

广义Fourier级数： 设$f \in L_\rho^2[a,b]$, $\psi_j \in L_\rho^2[a,b]$, $j = 0, 1, \cdots$为正交函数组，则有

$$\underbrace{a_j = (f, \psi_j)}_{\text{广义Fourier系数}}, \quad \underbrace{\sum_{j=0}^{\infty} a_j \psi_j(x)}_{\text{广义Fourier级数}}$$

重要不等式：

$$\|f - s_n^*\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \sum_{j=0}^{n} \left(\frac{(f, \psi_j)}{\|\psi_j\|_2} \right)^2$$

$$\Rightarrow \sum_{j=0}^{n} (a_j^* \|\psi_j\|_2)^2 \leq \|f\|_2^2 \quad \text{(Bessel 不等式)}$$

重要定理： $\lim_{n\to\infty} \|f - s_n^*\|_2 = 0.$

Parseval等式：

$$\|f\|_2^2 = \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{(f, \psi_j)}{\|\psi_j\|_2} \right)^2$$

Legendre多项式最佳平方逼近

设$[a,b]=1$, $\rho(x)=1$, $\Phi=\mathrm{Span}\{\tilde{P}_0,\tilde{P}_1,\cdots,\tilde{P}_n\}$为首项系数为1的Legendre多项式并使得$(\tilde{P}_i,\tilde{P}_j)=\delta_{ij}$.

重要定理:

$$\int_{-1}^{1}\tilde{P}_n(x)^2dx=\|\tilde{P}_n\|_2^2=\min_{Q_n\in\bar{\mathcal{P}}_n}\|Q_n\|_2^2$$

推论: 如果$f\in L^2[a,b]$, 作变量代换

$$x=\frac{b-1}{2}t+\frac{b+a}{2},t\in[-1,1]$$

令$g(t)=f(\frac{b-1}{2}t+\frac{b+a}{2})$,则考虑$g\in L^2[-1,1]$上的最佳平方逼近。