函数逼近

包承龙

丘成桐数学科学中心

本章研究对象及目标

设F为定义在区间$[a,b]$上的函数所组成的线性空间，Φ为F中的一个集合。

函数逼近：对于$f \in F$，求$p \in \Phi$，使得

$$f - p \quad \text{在某种意义下最小。}$$

常用的函数空间：

$$F = L_2[a,b], C[a,b], \quad \Phi = \text{多项式、有理分式或者三角多项式等。}$$

研究不同函数空间，不同距离下的最佳逼近。

目录

线性无关多项式

$\varphi_0, \varphi_1, \cdots, \varphi_n$ 在空间$C[a,b]$上线性无关：

$$\sum_{j=0}^{n} a_j \varphi_j(x) = 0, \forall x \in [a,b], \quad \Leftrightarrow \quad a_j = 0,\ \forall j = 0, 1, \cdots, n.$$

定理

设$\varphi_j \in \mathcal{P}_j, j = 0, 1, \cdots, n$，则$\{\varphi_j\}$在$C[a,b]$上线性无关。

推论： 若$\varphi_j \in \mathcal{P}_n, j = 0, 1, \cdots, n$是线性无关的多项式组，则对任意的$f \in \mathcal{P}_n$，存在唯一$\{a_j\}_{j=0}^{n}$，使得

$$f(x) = a_0\varphi_0(x) + \cdots + a_n\varphi_n(x)$$

正交多项式

设ρ为$[a,b]$上的权函数，定义$f,g\in C[a,b]$的内积为

$$(f,g)=\int_a^b \rho(x)f(x)g(x)\mathrm{d}x \quad \Rightarrow \quad f,g \text{ 关于}\rho\text{正交。}$$

设φ_n为首项系数为$a_n\neq 0$的n次多项式，称多项式序列$\{\varphi_n\}$正交，若

$$(\varphi_i,\varphi_j)=\begin{cases}0, & \text{if } i\neq j\\ A_i, & \text{if } i=j\end{cases}$$

φ_n为n次正交多项式。

利用正交化方法，可以对任意的线性无关多项式组$\{\psi_j\}_{j=0}^n$进行正交化。

考虑$\psi_j = x^j$, $j = 0, 1, \cdots, n$, 对$\{\psi_j\}$正交化的序列为$\{\varphi_j\}$, 则有：

- $\varphi_j \in \mathcal{P}_j$ 且首项系数为1
- 任何k次多项式都可以由$\varphi_0, \cdots, \varphi_k$唯一线性表出
- $(\varphi_k, \varphi_j) = 0, \ \forall j < k$.

定理

设$\varphi_n, n \geq 0$是$C[a, b]$上的正交多项式组，则n次正交多项式φ_n在(a, b)上由n个不相同的零点。

定理

设$\varphi_n, n \geq 0$是$C[a,b]$上的正交多项式组,则有如下递推关系:

$$\varphi_{n+1}(x) = (\alpha_n x + \beta_n)\varphi_n(x) + \gamma_{n-1}\varphi_{n-1}(x),$$

其中$\varphi_{-1} \equiv 0$, a_n为φ_n的首相系数，且

$$\alpha_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}, \beta_n = -\frac{\alpha_n(x\varphi_n, \varphi_n)}{(\varphi_n, \varphi_n)}, \gamma_{n-1} = -\frac{\alpha_n(\varphi_{n-1}, x\varphi_n)}{(\varphi_{n-1}, \varphi_{n-1})}. \tag{1}$$

简化形式:

$$\gamma_{n-1} = -\frac{a_{n-1}a_{n+1}}{a_n^2}\frac{(\varphi_n, \varphi_n)}{(\varphi_{n-1}, \varphi_{n-1})}$$

推论： φ_{n+1}与φ_n不能由公共零根。

定理

设$\varphi_n, n \geq 0$是$C[a,b]$上的正交多项式组, 则有

$$(x-y)\sum_{k=0}^{n}\frac{\varphi_k(x)\varphi_k(y)}{\sigma_k} = \frac{1}{\alpha_n\sigma_n}[\varphi_{n+1}(x)\varphi_n(y) - \varphi_{n+1}(y)\varphi_n(x)],$$

其中$\sigma_k = (\varphi_k, \varphi_k)$, $\varphi_{-1} \equiv 0$, α_n由(1)给出。

Legendre多项式

区间$[a,b]=[-1,1]$, 权函数$\rho(x)\equiv 1$, 由此构造的正交多项式P_n:

$$\begin{cases} P_0(x)=1, \\ P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}[(x^2-1)^n], \quad n\geq 1 \end{cases}$$

基本性质:

- 正交性: $(P_n,P_m)=\begin{cases} 0, & \text{if } n\neq m \\ \frac{2}{2n+1}, & \text{if } n=m \end{cases}$
- 递推式: $(n+1)P_{n+1}(x)=(2n+1)xP_n(x)-nP_{n-1}(x)$
- 奇偶性: $P_n(-x)=(-1)^n P_n(x)$
- P_n在开区间$(-1,1)$上有n个不同零点。

Laguerre多项式

区间$[a,b]=[0,+\infty)$, 权函数$\rho(x)=e^{-x}$, 由此构造地正交多项式L_n:

$$L_n(x)=e^x\frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x}),\ n=0,1,\cdots,$$

基本性质:

- 正交性:

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}L_n(x)L_m(x)dx=\begin{cases}0, & \text{if } m\neq n,\\ (n!)^2, & \text{if } m=n.\end{cases}$$

- 递推性: $L_0(x)=1$, $L_1(x=1-x)$, 相应的递推关系为

$$L_{n+1}(x)=(1+2n-x)L_n(x)-n^2L_{n-1}(x),\ n=1,2,\cdots.$$

Hermite多项式

区间$[a, b] = (-\infty, +\infty)$，权函数$\rho(x) = e^{-x^2}$，由此构造地正交多项式$H_n$:

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}, \ n = 0, 1, \cdots .$$

基本性质：

- 正交性

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} H_m(x) H_n(x) dx = \begin{cases} 0, & \text{if } m \neq n, \\ 2^n n! \sqrt{\pi}, & \text{if } m = n. \end{cases}$$

- 递推性： $H_0(x = 1)$，$H_1(x) = 2x$，相应的递推关系为

$$H_{n+1}(x) = 2x H_n(x) - 2n H_{n-1}(x), \ n = 1, 2, \cdots .$$

目录

Chebyshev多项式

区间$[a,b]=[-1,1]$, 权函数$\rho(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, 由此构造地正交多项式$T_n$:

$$T_n(x)=\cos(n\arccos(x)),\ n\geq 0.$$

正交性:

$$(T_n,T_m)=\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}T_n(x)T_m(x)dx=\begin{cases}0, & \text{if } n\neq m,\\ \frac{\pi}{2}, & \text{if } n=m\neq 0,\\ \pi, & \text{if } n=m=0.\end{cases}$$

证明：令$x=\cos\theta$, $dx=-\sin\theta d\theta$.

奇偶性：$T_n(-x)=(-1)^n T_n(x)$, $n=0,1,2,\cdots$.

递推关系

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x),\ n = 1, 2, \cdots .$$

T_n的首项系数为2^{n-1}, $n = 1, 2, \cdots$.

T_n在$(-1, 1)$内有n个不同零点：

$$x_k = \cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right), k = 1, 2, \cdots, n.$$

T_n的极值点为

$$\bar{x}_k = \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right), \quad T_n(\bar{x}_k) = (-1)^k,\ k = 0, 1, \cdots, n.$$

极小化性质

设

$$\tilde{T}_0(x) = T_0(x), \tilde{T}_n(x) = T_{n-1}(x)/2^{n-1}$$

设$\bar{\mathcal{P}}_n$为所有次数小于或等于n的、首项系数为1的多项式。

定理

有如下关系：

$$\max_{x\in[-1,1]} |\tilde{T}_n(x)| \le \max_{x\in[-1,1]} |\varphi_n(x)|, \quad \varphi_n \in \bar{\mathcal{P}}_n$$

且有$\max_{x\in[-1,1]} |\tilde{T}_n(x)| = 1/2^{n-1}$.

在区间$[-1,1]$上的n次Lagrange插值多项式的余项为

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!}\underbrace{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)}_{w_{n+1}(x)\in\bar{\mathcal{P}}_{n+1}}$$

$$\Rightarrow \max_{x\in[-1,1]}|R_n(x)|\leq\frac{1}{(n+1)!}\|f^{(n+1)}\|_\infty \max_{x\in[-1,1]}|w_{n+1}(x)|$$

由Chebyshev多项式的极小化性质可知：

$$\frac{1}{2^n}=\max_{x\in[-1,1]}|\tilde{T}_n(x)|\leq\max_{x\in[-1,1]}|w_{n+1}(x)|$$

因此，取$x_0,\cdots,x_n$为$\tilde{T}_n(x)$的零点(可以有效抑制龙格现象)，则有

$$\max_{x\in[-1,1]}\leq\frac{1}{2^n(n+1)!}\|f^{(n+1)}\|_\infty$$

推广：如何求区间$[a,b]$上的极小多项式？

目录

最佳平方逼近的概念

定义$L^2_\rho[a,b]$

$$L^2_\rho[a,b]=\left\{f:\|f\|_2=\sqrt{\int_a^b \rho(x)[f(x)]^2dx}<\infty\right\}.$$

记$\Phi=\mathrm{Span}\{\varphi_0,\cdots,\varphi_n\}$为$L^2_\rho[a,b]$上的$n+1$维线性子空间。

f在Φ下的最佳平方逼近$s^*\in\Phi$为

$$\|f-s^*\|_2=\inf\{\|f-s\|_2|s\in\Phi\}. \tag{2}$$

$s \in \Phi$等价于

$$s = a_0\varphi_0 + a_1\varphi + \cdots + a_n\varphi_n,\ a_0, a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{R}.$$

极小化问题(2)等价于

$$\min_a F(a_0, a_1, \cdots, a_n) := \int_a^b \rho(x) \left[\sum_{j=0}^n a_j\varphi_j(x) - f(x)\right]^2 dx$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} (\varphi_0,\varphi_0) & (\varphi_0,\varphi_1) & \cdots & (\varphi_0,\varphi_n) \\ (\varphi_1,\varphi_0) & (\varphi_1,\varphi_1) & \cdots & (\varphi_0,\varphi_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (\varphi_n,\varphi_0) & (\varphi_n,\varphi_1) & \cdots & (\varphi_n,\varphi_n) \end{bmatrix}}_{\text{Gram矩阵}\mathbf{A}} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (f,\varphi_0) \\ (f,\varphi_1) \\ \vdots \\ (f,\varphi_n) \end{bmatrix} \tag{3}$$

n次最佳平方逼近多项式

区间$[a,b]=[0,1]$, $\Phi=\mathrm{Span}\{1,x,\cdots,x^n\}$, $\rho(x)=1$

$$(\varphi_j,\varphi_k)=\int_0^1 x^{k+j}dx=\frac{1}{k+j+1}$$

则公式(3)中的Gram矩阵为Hilbert矩阵，即

$$\mathbf{A}=\mathbf{H}_{n+1}(0,1)=\begin{bmatrix} 1 & 1/2 & \cdots & 1/(n+1) \\ 1/2 & 1/3 & \cdots & 1/(n+2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1/(n+1) & 1/(n+2) & & 1/(2n+1) \end{bmatrix}$$

正交函数组的最佳平方逼近

若Φ是正交函数组，则Gram矩阵是对角矩阵，则最佳平方逼近为

$$s_n^* = \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{\|\varphi_j\|_2^2}(f,\varphi_j)\varphi_j$$

广义Fourier级数： 设$f \in L_\rho^2[a,b]$, $\psi_j \in L_\rho^2[a,b]$, $j = 0, 1, \cdots$为正交函数组，则有

$$\underbrace{a_j = (f,\psi_j)}_{\text{广义Fourier系数}}, \quad \underbrace{\sum_{j=0}^{\infty} a_j\psi_j(x)}_{\text{广义Fourier级数}}$$

重要不等式：

$$\|f-s_n^*\|_2^2=\|f\|_2^2-\sum_{j=0}^{n}\left(\frac{(f,\psi_j)}{\|\psi_j\|_2}\right)^2$$

$$\Rightarrow\sum_{j=0}^{n}(a_j^*\|\psi_j\|_2)^2\le\|f\|_2^2\ \text{(Bessel 不等式)}$$

重要定理： $\lim_{n\to\infty}\|f-s_n^*\|_2=0.$

Parseval等式：

$$\|f\|_2^2=\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{(f,\psi_j)}{\|\psi_j\|_2}\right)^2$$

Legendre多项式最佳平方逼近

设$[a,b]=1$, $\rho(x)=1$, $\Phi=\mathrm{Span}\{\tilde{P}_0,\tilde{P}_1,\cdots,\tilde{P}_n\}$为首项系数为1的Legendre多项式并使得$(\tilde{P}_i,\tilde{P}_j)=\delta_{ij}$.

重要定理:

$$\int_{-1}^{1}\tilde{P}_n(x)^2dx=\|\tilde{P}_n\|_2^2=\min_{Q_n\in\bar{\mathcal{P}}_n}\|Q_n\|_2^2$$

推论: 如果$f\in L^2[a,b]$, 作变量代换

$$x=\frac{b-1}{2}t+\frac{b+a}{2},t\in[-1,1]$$

令$g(t)=f(\frac{b-1}{2}t+\frac{b+a}{2})$,则考虑$g\in L^2[-1,1]$上的最佳平方逼近。

目录

何为Pade逼近？

设$f \in C[a,b]$, 用有理分式

$$R_{n,m}(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}, x \in [a,b],$$

来逼近f, 其中

$$P_n(x) = p_0 + p_1 x + \cdots + p_n x^n,\ Q_m(x) = q_0 + q_1 x + \cdots + q_m x^m$$

目的： 对于给定的计算量，逼近误差小于多项式的逼近误差。

$f(x)$在$x = 0$的泰勒展式：

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_k x^k + \cdots, a_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(0)$$

设有理函数$R_{n,m}(x)$满足

- P_n, Q_m无公因式
- $R_{n,m}(0)=f(0),\ R^{(j)}_{n,m}(0)=f^{(j)}(0),\ j=1,2,\cdots,n+m.$

称$R_{n,m}$为f在$x=0$处的(n,m)阶Pade逼近。

Pade逼近的性质：

$$\begin{aligned} f(x)-R_{n,m}(x) &= \frac{f(x)Q_m(x)-P_n(x)}{Q_m(x)} \\ \Rightarrow \quad f(x)Q_m(x)-P_n(x) &= \sum_{j=n+m+1}^{\infty} c_j x^j. \end{aligned} \tag{4}$$

计算$f(x)Q_m(x)-P_n(x)$的泰勒展式的系数。

由公式(4)可知，

$$(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots)(1 + q_1 x + q_2 x + \cdots + q_m x^m) - \\ (p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + \cdots + p_n x^n) = C_{n+m+1} x^{n+m+1} + \cdots$$

比较$x^j, j = 0, 1, \cdots, n+m$的系数可知$p_i$与$q_j$.

试证明：

$$e^x \approx R_{3,2}(x) = \frac{60 + 36x + 9x^2 + x^3}{60 - 24 + 3x^2}$$

目录

基本概念

给定$(x_j, f(x_j))$, $j = 1, \cdots, m$, 计算$s^* \in \Phi$, 使得

$$\sum_{j=0}^{m} \rho(x_j)[f(x_j) - s^*(x_j)]^2 = \min_{s\in\Phi} \sum_{j=0}^{m} \rho(x_j)[f(x_j) - s(x_j)]^2 \qquad (5)$$

注意与插值的区别。

设$\Phi = \mathrm{Span}(\varphi_0, \cdots, \varphi_n)$ 为$n+1$维线性空间，称s^*为f在Φ中的最小二乘解。
极小化问题(5)等价于

$$\min_{\mathbf{a}} F(a_0, a_1, \cdots, a_n) = \sum_{j=0}^{m} \rho(x_j)[f(x_j) - \sum_{i=1}^{n} a_i\varphi_i(x_j)]^2 \qquad (6)$$

问题(6)的一阶必要性条件为

$$
\begin{aligned}
&\nabla F(\mathbf{a}) = \mathbf{0} \\
\Leftrightarrow &\underbrace{\begin{bmatrix} (\varphi_0,\varphi_0) & (\varphi_0,\varphi_1) & \cdots & (\varphi_0,\varphi_n) \\ (\varphi_1,\varphi_0) & (\varphi_1,\varphi_1) & \cdots & (\varphi_1,\varphi_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (\varphi_n,\varphi_0) & (\varphi_n,\varphi_1) & \cdots & (\varphi_0,\varphi_n) \end{bmatrix}}_{\mathbf{G}} \underbrace{\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}}_{\mathbf{a}} = \underbrace{\begin{bmatrix} (\mathbf{f},\varphi_0) \\ (\mathbf{f},\varphi_1) \\ \vdots \\ (\mathbf{f},\varphi_n) \end{bmatrix}}_{\mathbf{d}} \text{(法方程)}
\end{aligned}
$$

其中内积的定义为$(\varphi_i,\varphi_k) = \sum_{j=0}^{m} \rho(x_j)\varphi_i(x_j)\varphi_j(x_k)$.

法方程有唯一解如果矩阵**G**非奇异。

可以证明:

$$\|s^* - f\|_2^2 = \|f\|_2 - \sum_{i=0}^{n} a_i^*(f, \varphi_i),$$

其中$\mathbf{a}^*$为法方程的解。

当$\varphi_i(x) = x^i$, $i = 0, 1, \cdots, n$时，有$\boldsymbol{\varphi}_i = (x_0^i, \cdots, x_m^i)^\top \in \mathbb{R}^{m+1}$,且

$$(\boldsymbol{\varphi}_i, \boldsymbol{\varphi}_j) = \sum_{k=0}^{m} x_k^{i+j}, \ \forall i, j = 0, 1, \cdots, n. \tag{7}$$

可以证明由公式(7)定义的法方程有唯一解若$n \le m$, 即矩阵$\mathbf{G}$是一个Vandermonde矩阵。

线性化方法

若数据满足$s(x)=be^{ax}$, 则传统拟合方法需要求解

$$F(a,b)=\sum_{j=0}^{m}\rho(x_j)[f(x_j)-be^{ax_j}]^2$$

上述方程为非线性方程，难于求解。

线性化方法:

$$\ln s(x)=\ln b+ax$$

则可以用线性多项式的方法拟合求出$\ln b$与a.

正交多项式的最小二乘拟合

选取不同的基函数，可以决定法方程矩阵**G**的病态性。

若$\Phi = \mathrm{Span}\{\varphi_0, \cdots, \varphi_n\}$关于点集$\{x_j, j = 0, 1, \cdots, m\}$是带权正交的：

$$(\boldsymbol{\varphi}_i, \boldsymbol{\varphi}_k) = \sum_{j=0}^{m} \rho(x_j)\varphi_i(x_j)\varphi_k(x_j) = \begin{cases} 0, & \text{if } i \neq k \\ A_k > 0, & \text{if } i = k \end{cases}$$

则有**G**为对角矩阵。

如何构造这样的正交多项式?

$$\begin{aligned} \varphi_0(x) &= 1 \\ \varphi_1(x) &= (x - \alpha_1)\varphi_0(x) \\ \varphi_{k+1}(x) &= (x - \alpha_{k+1})\varphi_k(x) - \beta_k\varphi_{k-1}(x) \end{aligned}, \alpha_{k+1} = \frac{(x\varphi_k, \varphi_k)}{(\varphi_k, \varphi_k)}, \beta_k = \frac{(\varphi_k, \varphi_k)}{(\varphi_{k-1}, \varphi_{k-1})}$$

非多项式拟合

重要事实：

$$\varphi_0, \cdots, \varphi_n \text{ 线性无关 } \not\Rightarrow \text{ G非奇异}$$

例： $\varphi_0(x) = \sin(x)$, $\varphi_1(x) = \sin(2x)$, $x \in [0, 4\pi]$. 取$x_j = j\pi$, $j = 0, 1, 2, 3, 4$, 则有$\varphi_0(x_j) = \varphi_1(x_j) = 0$, $\forall j = 0, 1, \cdots, 4$.

Haar条件： 设$\varphi_0, \varphi_1, \cdots, \varphi_n \in L^2_\rho[a, b]$的任意线性组合在$X = \{x_0, x_1, \cdots, x_m\}(m \geq n)$上至多只有$n$个不同零点.

$\varphi_0, \varphi_1, \cdots, \varphi_n \in L^2_\rho[a, b]$在$X$上线性无关：

$$a_0\varphi_0(x_j) + \cdots + a_n\varphi_n(x_j) = 0, \ j = 0, 1, \cdots, m \Rightarrow a_j = 0, \forall j.$$

定理

如果$\varphi_0, \varphi_1, \cdots, \varphi_n$在$X$上满足*Haar*条件，则$\varphi_0, \cdots, \varphi_n$在$X$上线性无关。

若$\varphi_0, \varphi_1, \cdots, \varphi_n$在$X$上满足Haar条件，则法方程中的系数矩阵$\mathbf{G}$是非奇异的。

目录

线性最小二乘

设区间$[a,b]$上的m个节点$t_1,t_2,\cdots,t_m$以及在这m个节点上的函数值$b_1,\cdots,b_m$,设$\psi_i\in L^2_\rho[a,b], i=1,\cdots,n$为线性无关函数组:

$$\psi(\mathbf{x},t)=x_1\psi_1(t)+x_2\psi_2(t)+\cdots+x_n\psi_n(t)$$

定义残量:

$$r_i(\mathbf{x})=b_i-\sum_{j=1}^{n}x_j\psi_j(t_i),\ i=1,2,\cdots,m\Rightarrow\ \mathbf{r}(\mathbf{x})=\mathbf{b}-\mathbf{A}\mathbf{x}$$

线性最小二乘:

$$\min_{\mathbf{x}}\ \|\mathbf{r}(\mathbf{x})\|_2=\|\mathbf{b}-\mathbf{A}\mathbf{x}\|_2$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \psi_1(t_1) & \psi_2(t_1) & \cdots & \psi_n(t_1) \\ \psi_1(t_2) & \psi_2(t_2) & \cdots & \psi_n(t_2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \psi_1(t_m) & \psi_2(t_m) & \cdots & \psi_n(t_m) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times n}, \ \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

定理

设$\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $m \geq n$, 假定$\mathbf{A}$是列满秩的，那么

$$\|\mathbf{A}\mathbf{x}^* - \mathbf{b}\|_2 \leq \|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_2, \forall \mathbf{x} \Leftrightarrow \mathbf{A}^\top \mathbf{A}\mathbf{x}^* = \mathbf{A}^\top \mathbf{b}.$$

重要结论： 假定$\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$列满秩，则存在唯一的列正交矩阵($\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{m\times n}, \mathbf{Q}^\top \mathbf{Q} = \mathbf{I}$)和对角元素$r_{ii} > 0$的上三角矩阵$\mathbf{R}$，使得$\mathbf{A} = \mathbf{Q}\mathbf{R}$.

目录

周期函数的最佳平方逼近

设$X_{2\pi}$为

$$X_{2\pi} = \{f \in C(\mathbb{R}) | f(x) = f(x + 2\pi), \forall x\}$$

定义$f, g \in X_{2\pi}$的内积：

$$(f, g) = \int_0^{2\pi} f(x)g(x)dx$$

取

$$\Phi = \mathrm{Span}\{1, \cos x, \sin x, \cdots, \cos nx, \sin nx\}$$

目的： 找到$s_n^* \in \Phi$为f在Φ中的最佳平方逼近：

$$s_n^*(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{j=0}^{n}(a_j \cos jx + b_j \sin jx).$$

三角多项式的性质

Φ中的基函数满足如下正交性质：

$$\int_0^{2\pi} \cos kx \cos \ell x dx = \begin{cases} 2\pi, & k=\ell=0 \\ \pi, & k=\ell\neq 0 \\ 0, & k\neq \ell \end{cases}, \int_0^{2\pi} \sin kx \sin \ell x dx = \begin{cases} \pi, & k=\ell=0 \\ 0, & k\neq \ell \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos kx \sin \ell x dx = 0,$$

f的最佳平方逼近s_n^*中的系数为

$$a_j = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos jx dx, j = 0, 1, \cdots, n$$

$$b_j = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin jx dx, j = 1, 2, \cdots, n$$

Bessel不等式

$$\frac{1}{2}a_0^2+\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)\leq\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[f(x)]^2dx$$

Paseval等式

$$\frac{1}{2}a_0^2+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2+b_k^2)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[f(x)]^2dx$$

推广：

- 离散情形

$$s_n^*(x)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx), n<\frac{N}{2}$$

- 周期复值函数：$s_n^*(x)=\sum_{k=0}^{n}c_ke^{ikx}, n<N$(离散傅里叶变换)。