Ch1 基本概念

1. 恒星定义（自引力、等离子）
   形成（$V \to E_K$, Radiation）
   平衡（对流, opacity, 大气, 热传导）
   能量传输（辐射、对流、传导）
   （一般）（红巨星）
   演化（氢→He→C→白矮星/NS/BH）
   演化由初始质量
   元素合成（……物质）
   氢氦, X, Y

2. 电磁辐射（主要信息渠道, 还有 cosmic ray, neutrino, gw）
   $\nu = \frac{c}{\lambda}$, $E = h\nu$ 的基本关系
   主要 Proc.
   波段 1mm ~ 1m 射电波
   400nm ~ 700nm 可见光，大气窗口

3 黑体 辐射（完全由温度决定）
   Planck函数 $B_\nu(T) = \frac{2h\nu^3}{c^2}\frac{1}{e^{h\nu/kT}-1}$
   单位 erg·s^{-1}·cm^{-2}·Hz^{-1}·sr^{-1}

   S-B定律 $F = \sigma T^4$，$\sigma = 5.67\times10^{-5}$ erg·cm^{-2}·s^{-1}·K^{-4}，Wien 位移定律 $\lambda_{max} = \frac{2900\,\mu m}{T/K}$

4 光谱
   连续谱和吸收线、发射线的形成
   原子（分子）跃迁 $h\nu = \Delta E$
   恒星大气光谱反映 化学组成、温度
   { Doppler 移动、致宽 反映 温度、压力、视向速度

5. 光度、流量、星等和有效温度
   光度 $L_* = 4\pi R_*^2 \sigma T_{eff}^4$
   亮度 $F = \frac{L_*}{4\pi r^2} = \sigma T_{eff}^4 \left(\frac{R_*}{r}\right)^2$，还与星际物质的吸收散射有关（消光、红化）
   视星等 $m_1 - m_0 = -2.5\log F_1/F_0$
   Vega系统
   AB系统
   { 目视星等
   照相星等（UBV，色指数）
   光电星等
   热星等
   消光、红化
   绝对星等 $M = m - 5\log_{10}\frac{D}{10pc}$
   DM.

6. 光谱分类
   （恒星）连续谱、吸收线
   热的内部　冷、稀薄的大气
   反映……温度.
   e.g. A star, H 最强需 10^4 K ……
   Harvard 分类（光谱型）→ Balmer 线强弱，A→P 16类 → 后调为 OBAFGKM 七类
   0~9 十个次类
   特殊 e（发射线）, w（W-R）, α（……）
   同一光谱型的不同亮度 d（dwarf）g（giant）c（超巨） e.p.n.s.k.m.v 等
   二元光谱分类：光谱型 + 光度
   Yerkes 光谱分类：谱线宽度 → 光度分类 I ~ VII（SG, dwarf）
   ab
   越亮 越暗.

7. 赫罗图（H-R diagram）
   光谱型/色指数/温度 — 光度/绝对星等
   2000~30000 K　10^{-4} ~ 10^{4}
   ⇒ 恒星演化路径（M决定, T_{eff}, R, L 变化）0.08~120M
   ⇒ H-R图的分区（MS, RG, RSG, BSG, WD）
   主序
   光度级
   Turning-point 的年龄，$T \sim \frac{1}{M^{2.5}}$

8. 玻尔兹曼分布和萨哈方程.
   恒星 = 中性原子、电离原子、电子
   电离度 和同一离子的激发状态 决定……
   热力学平衡 { Maxwell 分布（速度分布）
   玻尔兹曼分布（激发分布）← 不同激发态
   萨哈公式 ← 电离 $\frac{n_{i+1}}{n_i}$ $\frac{n_i}{n_{total}}$
   平均分子量 $\rho = n_{tot}\, m_H\, \mu$　完全电离H，$\mu = \frac{1}{2}$，与电离度有关
   电离比例 $x_i = \frac{n_i}{n_1 + \cdots + \cdots}$
   决定谱线强度
   ……← 自由-束缚跃迁

Ch2 恒星形成

1. 简介

引力收缩 ~ 加热气体 ~ 辐射 → 更加稳定 → 中心达到 $0.08M_\odot$ H没开始聚变（原恒星）→ 聚变开始 流体静力学平衡

分子云的类型 $M, n, T, R, \Delta v$

- Translucent clouds
- Giant molecular clouds
- Giant molecular clouds cores

2. 流体静力学平衡

$$\frac{dP}{dr} + \rho g = 0$$

$\frac{dP}{dr} < 0$

球对称时 $g = \frac{GM}{r^2}$

表面附近 $g = const$ 等温 $P(r) = P(0)e^{-\frac{\mu m_H g}{kT}r}$

$H = \frac{kT}{\mu m_H g}$ 为压强标高

积分可得中心压力 $\simeq \frac{GM_*^2}{4\pi R_*^4}$ 下限

恒星气体 + 经典 + 理想气体

得 恒星内部的最小平均温度 $\bar{T} > \frac{GM_* m_H}{6kR_*}$

（当热压力提供主要压力时）

3. 维里定理

$U = -\frac{\Omega}{2}$，Ω：引力势能；U：热能 $= \frac{3}{2}\int_0^{V_*} P\,dV$

$$\Omega = -\int_0^{M_*} \frac{GM(r)}{r}dM \overset{\rho = const,\ 球对称}{=\!=} -\frac{3}{5}\frac{GM_*^2}{R_*}$$

引力势能的一半用于加热气体（使恒星点火）

另一半辐射出去

4. 金斯判据（球对称，理想气体，等温）

$$M > M_J = \left(\frac{5kT}{\mu m_H G}\right)^{3/2}\left(\frac{3}{4\pi\rho}\right)^{1/2}$$

较低的温度 T，较高 ρ，M_J 较小。

⇕ 金斯质量

$$\rho > \rho_J = \left(\frac{5kT}{\mu m_H G}\right)\left(\frac{3}{4\pi M^2}\right)$$

⇕

$$r > R_J = \left(\frac{15kT}{4\pi\rho\mu m_H G}\right)^{1/2}$$

5. 自由下落时间

$$t_{ff} = \left(\frac{3\pi}{32G\rho}\right)^{1/2}$$

6. 恒星形成的全过程

星际物质（原子、分子、尘埃）→ 高密度区域 引力强，形成星云 → 星云收缩，成为原恒星 → H聚变点火 压力 引力平衡，成为主序

（大质量恒星主序前演化快，温度变高）

（小质量恒星 沿林轨迹收缩（对流充分））

（大的星云会分裂成多星）

（小的星云不会形成恒星）

（零龄主序 → 主序演化）

$L = $[illegible]$L_{MS}$

恒星辐射
潮汐力
中子星
初始角动量
原始磁场
} 影响恒星形成

激波压缩
星云碰撞
} 诱发产生

7. 恒星形成的观测证据

- 尘埃盘
- 原恒星星风和喷流
- 辐射也高效发光

Ch3 恒星内部的辐射转移

内部的辐射 → 吸收 / 散射 / 辐射 → 表面的辐射

1. 辐射不透明度

由吸收、散射贡献 ~ 真吸收射（再发射） / 相干散射

（转动能级）（方向变化）

连续的不透明 → 连续谱
量变的不透明 → 吸收线

$\sim kT$，让电子的时间相比大，所以 e-ion 碰撞是主导（一般碰撞为主）

粒子碰撞 ~ 决定高子的电离度和能级占据 / ~ 辐射能量

$$\frac{dI_\lambda}{I_\lambda} = -\kappa_\lambda \rho\, ds \quad \text{（转移方程）} \rightarrow \quad I_\lambda = I_{\lambda_0} e^{\int -\kappa_\lambda \rho ds} = I_{\lambda_0} e^{-\tau_\lambda}$$

太阳 $\frac{1}{n\sigma} \simeq \frac{1}{\kappa_\lambda \rho} \simeq 152$ km

$\kappa_\lambda \rho = n\sigma_\lambda$

光深 $\tau_\lambda = \int \kappa_\lambda \rho\, ds$ 光厚 / 光薄

不透明度的来源

束缚束缚跃迁

束缚自由跃迁（电离） 连续不透明度的主要来源 $\bar{\kappa}_{bf}$

（巴耳末跃迁、Lyman 极限）

3.40eV 364.7nm 13.6eV 91.2nm 恒星的 EUV 吸收很明显

自由自由吸收

散射（电子-汤姆森散射 / 原子、分子-瑞利散射 / 线散射） 与温度无关 $\kappa_{es}\rho = \sigma_T n_e$ → $6.655 \times 10^{-25}\ cm^2$，

电子散射截面远小于 H 光致电离截面

只有高温（n_e 大），电子散射主导 κ_{es}，（例如恒星内部和热星大气

$\sim \frac{1}{\lambda^4}$

更短波长时为 Compton 散射

散射与质量有关，质子散射可以不计

分子不透明度（束缚-束缚或束缚自由）产生吸收带

光致离解 冷恒星中占重要贡献

H^- 不透明度 0.754eV，1640nm 形成连续谱

在冷星中为主导

罗斯兰平均

$\kappa_\nu = \kappa_\nu(bb) + \kappa_\nu(bf) + \kappa_\nu(ff) + \kappa(es) + \kappa(H^-)$

与温度、密度、化学组成有关

罗斯兰平均 $$\frac{1}{\bar{\kappa}} = \frac{\int_0^\infty \frac{1}{\kappa_\nu} \frac{\partial B_\nu(T)}{\partial T} d\nu}{\int_0^\infty \frac{\partial B_\nu(T)}{\partial T} d\nu} \qquad B_\nu(T) = \frac{\sigma T^4}{\pi}$$

表征了单色不透明度

不高时，辐射传输不充分，大质量星对流主导

$$\bar{\kappa}_{bf} = 4.34 \times 10^{25} \frac{g_{bf}}{t} Z(1+X) \frac{\rho}{T^{3.5}}\ m^2/kg$$

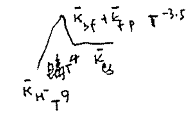
$$\bar{\kappa}_{ff} = 3.68 \times 10^{22} g_{ff} (1-Z)(1+X) \frac{\rho}{T^{3.5}}\ m^2/kg$$

$$\bar{\kappa}_{es} = 0.2(1+X)\ m^2/kg$$

$$\bar{\kappa}_{H^-} = 7.9 \times 10^{-34} \frac{Z}{0.02} \rho^{1/2} T^9\ m^2/kg \quad (3000\sim6000\text{K})$$

$g_{ff} \simeq g_{bf} \simeq 1$，$\bar{\kappa}_{bf} + \bar{\kappa}_{ff} \sim \frac{\rho}{T^{3.5}} \kappa_0$

(Kramer's law)



2. 辐射场

辐射强度 $$\frac{\delta E}{dA\, dt\, d\Omega\, d\nu} = I_\nu(\vec{x}, t, \hat{n}), \quad I_\lambda = \frac{c}{\lambda^2} I_\nu$$

平均辐射强度 $J_\nu = \langle I_\nu \rangle = \frac{1}{4\pi}\int I_\nu d\Omega$ 对各向同性 $J_\nu = I_\nu \stackrel{黑体}{=} B_\nu$

辐射流量 $$F_\nu = \int I_\nu \cos\theta\, d\Omega$$

$F_\nu(0\sim2\pi) = 0$

$F_\nu(0\sim\frac{\pi}{2}) = \pi I_\nu$

是能流平均值，易观测量

（对于分辨源，才能测 I_ν）

能量密度 $u_\nu = \frac{4\pi}{c}\langle I_\nu \rangle$

总的能量密度 $u = \int_0^\infty u_\nu d\nu = aT^4$

$a = 7.566 \times 10^{-15}\ erg \cdot cm^{-3} \cdot K^{-4}$

$ac = 4\sigma$

3. 辐射转移方程

随机行走 model：$\tau_\lambda = \sqrt{N} = \frac{d}{l}$（d 厚度，l 平均自由程）

$\tau_\lambda = \rho \kappa_\nu d$

看见光子的平均光深 $\tau_\lambda = \frac{2}{3}$ 解释吸收线 / 临边昏暗效应

辐射转移方程 $\frac{dI_\nu}{I_\nu} = -\kappa_\nu \rho ds$ 吸收
$dI_\nu = j_\nu \rho ds$ 发射

$dI_\nu = -\kappa_\nu \rho I_\nu ds + j_\nu \rho ds$

发射系数 $j_\nu = \kappa'_\nu B_\nu + \sigma'_\nu J_\nu$（吸收、散射不透明度）

$\Leftrightarrow -\frac{1}{\kappa_\nu \rho}\frac{dI_\nu}{ds} = I_\nu - S_\nu$

$\frac{j_\nu}{\kappa_\nu}$ 源函数

$\rho, \kappa_\lambda, S_\lambda$ 给定
$\Leftrightarrow I_\nu(s) = I_{\nu,0} e^{-\kappa_\lambda \rho s} + S_\nu(1 - e^{-\kappa_\lambda \rho s})$

散射可忽略时 $S_\nu = B_\nu$
光学厚时 $I_\nu \to S_\nu$

$d\tau_\nu = \kappa_\nu \rho ds$

平行平面大气 $\frac{dI_\nu}{d\tau_\nu}\cos\theta = I_\nu - S_\nu$

灰大气 $\frac{dI}{d\tau}\cos\theta = I - S$

角向积分 $\frac{dF_{rad}}{d\tau} = 4\pi(\langle I \rangle - S)$

乘以 $\cos\theta$ 再积分 $\frac{dP_{rad}}{d\tau} = \frac{F_{rad}}{c}$（决定恒星的温度结构）

爱丁顿近似 恒星大气的 $I = I_{in} + I_{out}$，表面 $I_{in} = 0$

$\langle I \rangle = \frac{1}{2}(I_{out} + I_{in}) \quad F_{rad} = \pi(I_{out} - I_{in}) \quad P_{rad} = \frac{4\pi}{3c}\langle I \rangle = \frac{1}{3}u$

灰体大气

$$\langle I \rangle = \frac{3 F_{rad}}{4\pi}\left(\tau_\nu + \frac{2}{3}\right) \Rightarrow T^4 = \frac{3}{4} T_{eff}^4 \left(\tau_\nu + \frac{2}{3}\right)$$

$F_{rad} \rightarrow \sigma T_{eff}^4$；$\langle I \rangle \rightarrow \frac{\sigma T^4}{\pi}$

在 $\tau = \tau(\frac{2}{3})$ 时，$T = T_{eff}$

所以有效温度是 $\tau = \frac{2}{3}$ 处的温度

看到的恒星光度由 $\tau = \frac{2}{3}$ 的表面决定

4. 局部热动平衡

局部热动平衡 LTE $\Leftrightarrow$ 粒子平均自由程 < 温度变化尺度，碰撞占主导地位

$\Leftrightarrow$ 由 Maxwell (T_{kin})、Saha (T_{ion})、Boltzmann (T_{ex}) 公式决定，v、离化和能级分布，$S_\nu = B_\nu = I_\nu$ (T_{color})

完全的热动平衡还要辐射平衡，各种温度都相同

非热动平衡 Non-LTE：辐射有明显贡献

在恒星外部很重要（密度低）

太阳大气的大部分为局部热动平衡（$H_T = 600\ km$，$l \simeq 0.1\ km$）

但对于光谱不成立，而且对于谱线细节不清楚知道光谱。

5. 辐射转移方程的解

平行平面大气近似 $d\tau_\nu = \frac{d\tau_\nu(z)}{\cos\theta}$

$$I_\nu(0) = I_\nu(\tau_0) e^{-\tau_0} - \int_{\tau_0}^{0} S_\nu e^{-\tau_\nu} d\tau_\nu$$

近似 $S_\nu = a_\nu + b_\nu \tau_\nu$

$\Big\}\quad I_\nu(0) = a_\nu + b_\nu \cos\theta$

在灰大气的 Eddington 近似下

$$\frac{I_\nu(\theta)}{I_\nu(\theta = 0)} = \frac{2}{5} + \frac{3}{5}\cos\theta$$ 可解释临边昏暗现象

6. 辐射平衡

辐射完全是能量传输（恒星内部不成立）

$\int_0^\infty k_\nu (J_\nu - B_\nu) d\nu = 0$ 吸收 = 发射

局部由温度决定

7. 大光深处，辐射与物质平衡

将 $B_\nu(t)$ 展开泰勒级数，代入转移方程

$$S_\nu(t) = B_\nu(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{d^n B_\nu}{d\tau_\nu^n}\Big|_{\tau_\nu} (t - \tau_\nu)^n$$

$$I_\nu = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d^n B_\nu}{d\tau_\nu^n}\Big|_{\tau_\nu} (\cos\theta)^n$$

$$J_\nu = \frac{1}{2}\int_0^\pi I_\nu \sin\theta \, d\theta = B_\nu + \frac{1}{3}\frac{d^2 B_\nu}{d\tau_\nu^2} + \cdots, \quad \frac{B_\nu^{(n+2)}}{B_\nu^{(n)}} = \frac{1}{\tau_\nu^2}$$ 高阶项可忽略

近似有

$$I_\nu \simeq B_\nu + \cos\theta \frac{dB_\nu}{d\tau_\nu}$$

$$J_\nu \simeq B_\nu$$

$$H_\nu = \frac{F_\nu}{4\pi} \simeq \frac{1}{3}\frac{dB_\nu}{d\tau_\nu} = -\frac{1}{3 k_\nu \rho}\frac{dB_\nu}{dT}\frac{dT}{dz}$$

大的 k_ν，H_ν 较弱

大的温度梯度，H_ν 较强

H_ν 不与 B_ν 成正比

8. 史瓦西-米尔恩方程

9. 物质的辐射加速和辐射压

Ch 4 恒星大气

1. 简介

大气model (底部 $\tau = 10^2 \sim 10^3$, $\sim \frac{1}{100} R_{star}$, $\sim 10^{-9} M_{star}$)

目的是计算恒星外部区域的物理结构 → 预言辐射流量并与观测比较

即 T, ρ, n_e 对深度的依赖

↓

指导我们对宇宙的元素组成

指导恒星的结构与演化

大气: 定义

光谱由 T, ρ, 化学组成决定

光子离开之处的温度是增加的

2. 灰大气

$\kappa_\nu \equiv \kappa$ 灰大气

辐射平衡 $\int_0^\infty \kappa_\nu (J_\nu - B_\nu)\, d\nu = 0$ $\Big\} \Rightarrow$ $J_\nu = B_\nu$, $J = B = \frac{\sigma T^4}{\pi}$

爱丁顿近似下的温度profile $T = T_{eff}\left[\frac{3}{4}\left(\tau + \frac{2}{3}\right)\right]^{1/4}$

$H = \frac{\sigma T_{eff}^4}{4\pi}$ 为 Eddington flux

$J(\tau) = 3H\left(\tau + \frac{2}{3}\right) = 3H\left(\tau + q(\tau)\right)$

大气深处　表面　$q(\infty) \simeq \frac{2}{3}$

3. 线不透明度和谱线致宽

注意辐射转移, 影响的结构

有助于观测 (元素丰度, 压力)

线不透明度的原因 ~ bb 跃迁

线宽度:

- 自然致宽 ~ 不确定原理 $\Delta t \Delta E \geq \frac{h}{4\pi}$
  - Lorentz profile $\phi_\nu = \frac{\Gamma / 4\pi^2}{(\nu - \nu_0)^2 + (\Gamma / 4\pi)^2}$ → 辐射阻尼常数
  - 对H不重要, 对重元素重要
  - 在线翼处重要
  - Γ 即半高全宽 $\Delta\lambda = \frac{\lambda^2}{2\pi c}\left(\frac{1}{\Delta t_i} + \frac{1}{\Delta t_f}\right)$ 初态寿命 $= \frac{\lambda^2}{2\pi c}\frac{1}{\Delta t_0}$
- 多普勒致宽 → 热运动 $f(v) \sim$ Maxwell
  - $\bar{v} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}$ ($m\downarrow$, $\bar{v}\uparrow$, 也就是碰撞更频)
  - $v_0 = \sqrt{\frac{2kT}{m}}$ (最可几)
  - 多普勒致宽 $\Delta\lambda_D = \frac{\lambda}{c}\sqrt{\frac{2kT}{m}}$ (主运动) $\xrightarrow[\text{半峰的宽度}]{\text{对应半量}}$ $\frac{2\lambda}{c}\sqrt{\frac{2kT\ln 2}{m}}$
  - 也不是参一主要致宽模式, 但在线心处重要
  - → 恒星自转也会致宽, 在谱线径向速度也重要
    使谱线形成以致宽 $\frac{\Delta\lambda}{\lambda} \simeq \frac{2v_r}{c}$
  - → 大气湍动也会致宽
    $v_{true}^2 = \frac{2kT}{m} + v_{turb}^2$
    $\Delta\lambda_{1/2} = \frac{2\lambda}{c}\sqrt{\left[\frac{2kT}{m} + v_{turb}^2\right]\ln 2}$
    对巨星, 超巨星重要
  - → 视向速度移动 $\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = \frac{v_r}{c}$
- 压力(碰撞)致宽
  - 碰撞扰动: 斯塔克效应 / 范德瓦尔斯效应 / 共振致宽 } Lorentz
  - 表面重力大 → 大气压强 → 大的碰撞线宽
  - 在线翼处重要
  - 平均碰撞时间 $\Delta t_0 = \frac{1}{n\sigma}\sqrt{\frac{m}{2kT}}$ ← 粒子密度
  - $\Delta\lambda_{1/2} = \frac{\lambda^2}{\pi c}\frac{1}{\Delta t_0} \propto n$

~ 磁场 (Zeeman 效应) 也可导致致宽

4. 等值宽度及原子谱线形成

线的深度 $A_\lambda = 1 - \frac{F_\lambda}{F_c}$ (F_λ → 线谱; F_c → 线附近连续谱)　半高全宽 $\Delta\lambda_{1/2}$

线的宽度 $W = \int\left(1 - \frac{F_\lambda}{F_c}\right) d\lambda$　可用来估计吸收线的强弱和元素丰度

弱谱线的形成

↳ 相对于连续谱较弱

光学薄的线

$\kappa_\lambda = \kappa_l + \kappa_c$ (κ_l → line, κ_c → continuum)

$A_\lambda = \frac{B(\tau = \frac{2}{3}) - B(\tau = \frac{2}{3} + \Delta\tau)}{B(\tau = \frac{2}{3})} \simeq -\frac{d\ln B_\lambda}{d\tau_c}\Big|_{\frac{2}{3}}\Delta\tau \simeq +\frac{d\ln B_\lambda}{d\tau_c}\Big|_{\frac{2}{3}}\frac{2}{3}\frac{\kappa_l}{\kappa_c}$　($\Delta\tau < 0$)

$\propto$ 元素丰度

等温的等离子体 $\frac{dB_\lambda}{d\tau_\lambda} = 0 \Rightarrow$ 无吸收线

有温度梯度才有谱线

生长曲线　$n_{ion}\uparrow \Rightarrow$ 吸收线强度趋于饱和 $\Rightarrow$ 更大丰度时, 由于致宽的线翼吸收也变大

$W_\lambda \propto N$ (线性)　$W_\lambda \propto \sqrt{\ln N}$ (阻尼平台)　$W_\lambda \propto \sqrt{N}$ (阻尼)

生长曲线: W_λ 与元素丰度的关系

W_λ 与元素丰度, 激发温度, 跃迁几率, 致宽机制, 气体的湍流速度, 电子密度 N_e

更精确的是谱线合成方法 (化学分析)

5. 大气model (估算恒星外部结构, 光谱, 观测量)

输入参数 M, R, L, 元素丰度 (或 g) → 分层 50~100 → $T(r)$, $\rho(r)$, $P(r)$ 等, $T(\tau)$

↳ 表面边界条件 ($\tau < 10^{-3}$, $R < 1\%$)

平面平行大气

Ch5 恒星内部结构

→ 考虑的东西：引力
压强
能量的来源，辐射转移

基本假设：
- 不含时
- 球对称（所有物理量都是 r 的函数）
- 孤立、简单体系

1 简介

恒星结构的应用 → 研究元素核合成
→ 计算脉动

2. 恒星结构

$$\frac{dM(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r)$$ （质量守恒方程）

$$\frac{dP(r)}{dr} + \rho g = 0$$ （流体静力学方程） → 广义的情况下，右端是 $-\rho\frac{d^2r}{dt^2}$，称为流体动力学方程

$g = \frac{GM(r)}{r^2}$

$\tau_{ff} \simeq \left(\frac{R}{g}\right)^{1/2}$, $\tau_{exp} \simeq R\left(\frac{\rho}{P}\right)^{1/2}$ 两者相等时，静力学平衡

$$\frac{dT}{dr} + \frac{3\kappa_R \rho}{64\pi r^2 \sigma T^3} L = 0$$ （辐射转移方程）

$\frac{dT}{dr}$ 正比于 L 和 κ
κ 阻碍 L
对于辐射传能成立

辐射能流量 $H_L = -\frac{1}{3\kappa_R \rho}\frac{dB_c}{dT}\frac{dT}{dr}$

由连续辐射定义，L 决定，$\kappa_L \neq \kappa_R$

温度梯度 $\nabla_{rad} = \frac{d\ln T}{d\ln P} = \frac{3\kappa_R P L}{64\pi r^2 g \sigma T^4}$

$\kappa_R\uparrow$，∇_{rad} 增加，对流更明显

$$\frac{dL}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r)\varepsilon(r)$$ （光度方程）

ε：单位质量单位时间内产生能量，$W\cdot kg^{-1}$ → 核心 $\varepsilon > 0$，外部 $\varepsilon = 0$

其他物理：
- $P(\rho, T, X_i) = 0$（物态方程）
- $\kappa_R(\rho, T, X_i)$（罗斯兰平均不透明度）
- $\varepsilon(\rho, T, X_i)$（核反应产量）
- 传导与对流、磁场、吸积、自转

可以忽略
$l_e \gg l_{ion}$ 除了致密星内部

在传导重要时 $H_{cond} = -\frac{dB_c}{dT}\frac{dT}{dr}\frac{1}{3\kappa_{cond}\rho}$

$\frac{1}{\kappa_{tot}} = \frac{1}{\kappa_{cond}} + \frac{1}{\kappa_R}$

边界条件 $L(r\to 0) = 0$　$M(r\to 0) = 0$
$P(r\to R_*) = 0$，$\rho(r\to R_*) = 0$，$T(r\to R_*) = 0$

当 κ_R 很大或 L 很大时，$\frac{dT}{dP}$ 很大产生对流
（恒星内部电离区）

对流发生的史瓦西判据 $\nabla_{rad} = \frac{P}{T}\frac{dT}{dP} > \frac{\gamma-1}{\gamma} = \nabla_{ad}$

κ_R 很大，∇_{rad} 很大

绝热温度梯度

$\gamma = C_p/C_v$，$v_s \simeq \sqrt{\gamma P/\rho}$
恒星外层时 $\gamma \simeq 1$

3. 多方恒星model

Vogt-Russel 定理：M、化学组成唯一确定 R、L、内部结构、演化路径

多方model假设前两个结构方程可以独立求解，简化运算（对流充分好、简并物质 满足多方过程）

$P = K\rho^\gamma$
- $\gamma = 0$ 等压
- $\gamma = 1$ 等温
- $\gamma = C_p/C_v$ 绝热
- $\gamma = \infty$ 等容
- $\gamma = 1 + \frac{1}{n}$，n 为多方指数

质量守恒方程
静力学平衡方程

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(\frac{r^2}{\rho}\frac{dP}{dr}\right) = -4\pi G\rho$$

$\rho = \rho_c\theta^n$
$r = \alpha\xi$，$\alpha = \left\{\frac{(n+1)K}{4\pi G}\rho_c^{\frac{1}{n}-1}\right\}^{1/2}$

$\frac{d\theta}{d\xi} = 0$ for $\theta = 1$
$\xi = \xi_R$ for $\theta = 0$

$$\theta^n + \frac{1}{\xi^2}\frac{d}{d\xi}\left(\xi^2\frac{d\theta}{d\xi}\right) = 0$$ （Lane-Emden 方程）

特解
- $\theta = -\frac{\xi^2}{6} + 1$，$n = 0$
- $\theta = \frac{\sin\xi}{\xi}$，$n = 1$
- $\theta = \frac{1}{\sqrt{1+\xi^2/3}}$，$n = 5$

其他可数值求解

恒星的质量与半径
$M_* = 4\pi\alpha^3\rho_c\int_0^{\xi_R}\xi^2\theta^n d\xi$
$R_* = \alpha\xi_R = \left[\frac{K(n+1)}{4\pi G}\right]^{\frac{1}{2}}\rho_c^{\frac{1-n}{2n}}\xi_1$

应用
- 白矮星的质量半径 $P = K\rho^{5/3}$ 非相对论；$P = K\rho^{4/3}$ 极端相对论
- 低质量恒星内部完全对流条件 $\nabla = \nabla_{ad} \simeq 0.4$（完全电离）$P \simeq K\rho^{5/3}$
- 恒星内部的等温氦核 $P = \frac{RT_0\rho}{\mu}$
- 特大质量的恒星 $\frac{P_g}{P} = const = \beta$．$P = \frac{R}{\mu\beta}\rho T = K\rho^{4/3}$

对流的混合长理论

真实情况 $\nabla_{rad} \geq \nabla_{med} \geq \nabla_{cell} \geq \nabla_{ad}$
（∇_{med}：辐射+对流；∇_{cell}：非绝热）

$H_{tot} = H_{rad} + H_{conv}$

$\frac{d\ln P}{dr} = -\frac{\rho g}{P} = -\frac{1}{H_P}$ ~ 压强标高，而 $\frac{l}{H_P}$ 是混合长 $\alpha \simeq 1.6 \pm 0.1$

$H_{conv} = \frac{\rho c_p}{8\pi}\bar{v}T\frac{l}{H_P}(\nabla_{med} - \nabla_{cell})$

$\bar{v} \to \left(\frac{gH_P}{8}\right)^{1/2}\left(\frac{l}{H_P}\right)(\nabla_{med} - \nabla_{cell})$

对流超射

对流系统中 $\frac{P}{T}\frac{dT}{dP} = \frac{\gamma-1}{\gamma}$ ~ 没有不透明度，很方便

4 太阳的结构

核心 $\sim 0.25R_\odot$　辐射区 $\sim 0.7R_\odot$　对流区 $\sim R_\odot$　大气

- 光球 100km
- 色球 2000km. 10^5K
- 日冕 10^6Km. 10^6K

5. 状态方程

$$P = P_g + P_r \xrightarrow[\text{理想气体}]{\text{完全电离}} \underbrace{P_i + P_e}_{(n_i+n_e)RT} + P_r$$

$P_r \to \frac{a}{3}T^4$

$(n_i + n_e)RT \simeq R\rho T(\frac{1}{\mu_i} + \frac{1}{\mu_e})$

定义 $\beta = P_g/P$

简并气体 ← 泡利不容

- $P_e \sim \rho^{5/3}$ 非相对论
- $\sim \rho^{4/3}$ 相对论

↑ 与温度无关

条件 $\lambda_D n^{1/3} \geq 1$

$2(\frac{h^2}{2\pi m_e kT})^{1/2}$ 或 $\frac{hc}{2kT}$

非相对论　相对论

电子更易简并、比如高密度的物质

理想气体 $P_i << P_e$

6. 变星和星震

变星

- 定义：测光/光谱 随时间变化
- 分类
  - 食变 (黑子, 吸积, 掩食)
  - 爆发 (时间和抛射物质)
  - 爆炸 (周期性 或时间性)
  - 脉动变星 (周期性的半径/T_{eff} 变化引起) ~ 时标从几分钟到10年以上，存在特定周期 (周光关系)

举例：造父变星 (I型. II型) $3\text{-}10M_\odot$　$0.5M_\odot$ ~ 位于造父不稳定带　可处在H-R图不同部位

↑ M. Z 影响　物理 $\text{Period} \simeq 2\int_0^{R_*}\frac{dR}{v_s(r)} \xrightarrow{\text{常密度}} \sqrt{\frac{3\pi}{2G\Gamma\rho}}$　$v_s \sim \sqrt{\Gamma P/\rho}$

ρ 小, R大, Period长, L亮

机制 - Kappa机制

HeII → HeIII 对温度敏感

不透明度↑　不透明度↑

激变变星　经典新星 (WD吸积增)

再发新星

矮新星 (WD 吸积盘不稳定)

星震 → 可探究恒星内部

- 分类
  - 声学波 p波，不同频率的对应不同深度
  - 引力(浮力)波 g波 (表面f. 内部对流区g)
- 机制：Kappa机制　如太阳对流．动力学调制

Ch6 恒星内部核反应和核合成

1. 原子核内部结构

核
- 尺度 $10^{-15}m$
- 力：强核力、弱核力、库仑力
- 组成：质子、中子

守恒：电荷守恒、重子数守恒、轻子数守恒

原子核model

液滴model，可估计 $m(Z,A)$ 的半经验质量公式

$$E = E_{vol} + E_{surf} + E_{coul} + E_{asym} + E_{pair}$$

$$a_{vol}A \quad -a_{surf}A^{2/3} \quad -a_{coul}\frac{Z^2}{A^{1/3}} \quad -a_{asym}\frac{(Z-A/2)^2}{A} \quad \left\{\begin{matrix}\pm \\ 0\end{matrix}\right. a_{pair}/A^{1/2}$$

壳层model 量子化的model

幻数 → 满壳层的最稳定

2. 核反应的产生

库仑势垒 $E_{pot} \simeq \frac{Z_1Z_2e^2}{4\pi\varepsilon_0 r} \longleftrightarrow E_k \simeq \frac{3}{2}kT$

需要量子力学的穿透，才能有效反应。

$U(r) + V_{coul} = E_{pot}$

$$prob(fusion) \propto e^{-\frac{mv^2}{2kT}} e^{-\pi\frac{Z_1Z_2e^2}{\varepsilon_0 hv}}$$

Maxwell分布　穿透几率

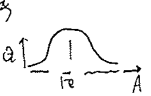
两者乘积的最大值：伽莫夫峰

伽莫夫窗口是核反应最可能发生的区域

Z_1、Z_2 越大，越难反应

核反应产生的能量：Einstein质能关系 $\Delta E = \Delta mc^2 = [Zm_p + (A-Z)m_n - m_{nucleus}]c^2$

Fe是有最大的结合能

可以来得出曲线  ，有半经验公式

3. 恒星内部的核反应

P-P chain } 氢燃烧反应	$M<2M_\odot$, $T\simeq 7\times10^6\sim2\times10^7$	7×10^6 1.3×10^7 3×10^7K 有PPI, PPII, PPIII; $\varepsilon\sim\rho T^4X^2$	产生α, 中微子, 光子
CNO-cycle	$M>2M_\odot$	CNO只是催化剂; $\varepsilon\sim\rho T^{19.9}XX_{CNO}$	产生α
3-alpha	$3M_\odot\sim8M_\odot$, 4×10^8K	$\varepsilon\sim T^{40}\rho^2Y^3$	产生C
C burning	$\gg1.4M_\odot$, $0.5\sim1\times10^9K$		产生Na, Ne, Mg, O
O	$\gg10M_\odot$, $>1\times10^9K$		产生P, Si, S
Si	$\gg20M_\odot$, $>3\times10^9K$		可形成 ^{56}Fe ⟿ 光致分解 O~Ne

4. 恒星的元素合成

宇宙的元素丰度 ← 原初元素 H, He (少量的Li)
- 恒星合成 (Fe以下)
- 中子俘获 (重元素)

中子俘获（不受coul势垒约束，但n数量不多）
- → 稳定 → 继续俘获
- → 放射性 → 衰变(β)

s-过程（中子俘获慢于β），AGB常见

r-过程（中子俘获快于β），collapse core SN常见

rp过程（快速质子俘获），双星系统常见

太阳中微子问题

太阳能量的5%以ν存在

（几乎全部到达地球）

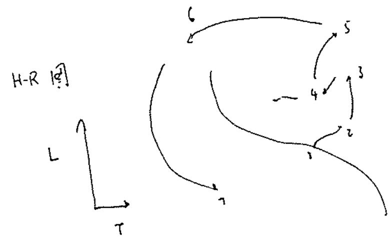
探测技术
- 原子核+ν → 放射性核
- 以中子+ν → 水中快电子的Cherenkov

→ 只测到1/3，原因是味振荡

恒星 { 小质量 $0.08M_\odot \sim 2M_\odot$ 1
中等质量 $2M_\odot \sim 8M_\odot$ 比 1/10
大质量 $> 8M_\odot$ 比 1/100

目前未发现 $> 150M_\odot$

质量决定 { 内部结构
evolve 和终点
观测与理论对照



一、小质量恒星的演化

巨分子云收缩、碎裂 → 原恒星 —— 流体静力学平衡建立 → 中心温度达到点火 ZAMS 零龄主序 —— $R_c\uparrow, T\uparrow, \varepsilon\uparrow$, $L\uparrow, R_*\uparrow$ → 主序 —— 时标 $t \simeq \eta\alpha Mc^2/L$ → 氢耗尽核 $R_{He}\downarrow$ → He核收缩升温 → $M_c \simeq 0.45M_\odot$

1/2 是辐射
1/2 是对流
K-H 收缩

均匀收缩
但仍未点火
$\dot{L}/L \propto \dot{P}/P \propto \dot{r}/r \propto \dot{\rho}/\rho \propto \dot{T}/T = const$

主序：
均匀的化学组成
氢燃烧，完全的流体静力平衡
$0.08M_\odot \sim 100M_\odot$
$L \propto M^{2.5\sim4}$, $R \sim M^{0.5\sim1}$
内部核反应区、辐射区、对流区 { (大质量星在外) (1$M_\odot$ 在中间) (0.1$M_\odot$ 没有)
化学组成变化

氢耗尽核 $R_{He}\downarrow$
H burning shell $L\uparrow$
R_*略增. $T_{eff}\downarrow$
亚巨星支
(1→2)

He核收缩升温
光度 $L\uparrow\uparrow\uparrow$
$R_*\uparrow\uparrow$. $T_{eff}\downarrow$, 包层对流 (Hayashi线)
红巨星支
(2→3)

He核氢耗收缩 ~简并
$R_c \sim M_c^{-1/3}$
$T_c \sim M_c/R_c$. $L \sim M_c^7 R_c^{-16/3}$
与M_c有关. 不遵守主序关系
$M_c\uparrow$. $T_c\uparrow$. $L\uparrow\uparrow$

$M_c \simeq 0.45M_\odot$
10^8K. He点燃.
氦闪
核简并 (氦点燃对 成的剧烈的爆发)

钱德拉塞卡极限
$M_{ch} \simeq 1.46M_\odot$

Hayashi线
3000~5000K 的竖直线
完全对流恒星的完全对流 $\nabla = \frac{d\ln T}{d\ln P} \simeq \nabla_{ad} \simeq 0.4$
$T = \frac{\mu}{R}\frac{P}{\rho}$ } $P = K\rho^{1+\frac{1}{n}}$, $n = \frac{3}{2}$ $\simeq C_n \mu^{-n-1} M^{1+n} R^{3n-3} T_{eff}^{1+n}$
近似 $\kappa_R = \kappa_0 \rho^a T^b$
结构方程 } $P(\tau = \frac{2}{3}) = Const.\left(\frac{M}{R^2 T_{eff}^b}\right)^{\frac{1}{1+a}}$ } $\log T_{eff} \simeq \frac{0.75a - 0.25}{b+5.5a+1.5}\log L + \frac{0.5a+1.5}{b+5.5a+1.5}\log M + const.$

M 增加, 线向 $T_{eff}\uparrow$ 移动
$T < 5000K$. $a \simeq 1$, $b \simeq 3$ (氢负离子为主) $\log T_{eff} \simeq 0.05 \times \log L + 0.2\log M + C$
T_{eff}与光度没有关系
混合长对流. $\alpha = \frac{l}{H_p}\uparrow$. $T_{eff}\uparrow$
对化学组成, 影响小. 完全电离 $a = b = 0$

行星状星云： 气体包层被白矮星的UV电离所致
寿命不超过 5×10^4 yr

氦耗尽, 形成 C.O 核
He burning shell
H burning shell (双层burn)
AGB 渐近巨星

外壳脉动不稳定. 吹散
对流加热、氦燃烧 → 脉动
He燃烧.
$1 - \frac{4\delta\nabla_{ad}}{4\alpha - \beta} > 0$ 稳定
< 0 不稳定
强烈的星风 $10^{-4}M_\odot/yr$ 损失
脉动

3000K T_{eff}, 红外.
是dust形成
形成分子场所
Maser 发射的场所

$< 0.08M_\odot$. 无法到达主序
称为褐矮星
$< 0.5M_\odot$. He白矮星
$< 2.5M_\odot$. CO核与AGB. 最后成为WD + 行星状星云

二、中大质量恒星的演化

1. 中等质量恒星的演化 ($2M_\odot \sim 8M_\odot$)

与小质量恒星的区别：CNO循环

主序星阶段演化到RGB时间短

He核不简并，没有He闪

C和更重元素可以被燃烧

核心区间的对流传输

外层或核区存在脉动

最终可是CO或ONeMg白矮星

2. 大质量恒星的演化 ($>8M_\odot$)

差别：对流核

强星风 → 大量质量损失，延缓了演化

演化快

无C闪（Fe核才简并），多层元素

He燃烧不剧烈

星风使大质量恒星在蓝超巨、红超巨之间徘徊

形成中子星或黑洞 SN

观测对应体：超巨星（蓝、黄、红）$>15M_\odot$

model 主要不确定性：质量损失

对流 ~ 热混合

反应率

自转 ~ 混合区，增加mass loss

3. 超大质量恒星的演化

差别：强星风 10^{-6}–$10^{-4} M_\odot/yr$

例如W-R星

演化 O → 蓝/红超 → WR星 → $\mathrm{I}_{b/c}$ SN → NS/BH

$$L_{Edd} = \frac{4\pi G c M}{\kappa} = 3.8\times10^4 \frac{M}{M_\odot} L_\odot$$

HD极限的HR diagram

κ → 电子散射 $\kappa_{es} = \sigma_e \simeq 0.2(1+X)\ m^2/kg$

观测体：黄超、LBV（高质量损失辐射，$10^{-3}M_\odot yr^{-1}$，WR的前身），WR（强星风 3000km/s，$10^{-4}M_\odot yr^{-1}$）

物质丢失：
- 辐射压驱动 ~ 星风
- 不稳定性机制
- 脉动的激波

三、超新星的观测和理论

定义、发现、命名、研究意义：
- 验证star演化
- 极端物理
- 测量宇宙动力学

前身星：
- WD、双WD → Ia
- RSG ⇒ IIP
- …

观测分类：
- I型 无氢吸收线
  - Ia 有硅
  - Ib 有氦 无硅
  - Ic 无氦 无硅 → 宽线
- II型 有氢吸收线 → IIP（H envelope 很厚）、IIL、IIn

Ia ⟹ 原因：热核爆炸（WD 吸积）；Ni → Co → Fe 衰变产生能量

II型 原因：core collapse；Fe 形成 → 光致分解和电子俘获（吸热）以大量中微子 → 中微子与下落物质激波

P-Cygni 轮廓：向外膨胀的大气

超亮 SN

宇宙学：
- 光变曲线与Phillips关系：峰值亮度与光变曲线宽度与颜色相关
- 测量 h、Ω_m Ω_Λ

四、致密天体

晚期聚变stop → 引力坍缩 → BH/NS/WD 简并态

电子简并：
- $P_e \propto \rho^{5/3}$　$v = p/m_e$
- $P_e \propto \rho^{4/3}$　$v \sim c$

白矮星：红巨星抛出物质形成，中小质量star的终点。

在HR图左下方，M大，R小，$R\sim10^4 km$

内部结构 — 流体静力学平衡

$$M_{ch} \simeq 1.45\left(\frac{2}{\mu_e}\right)^2 M_{sun}$$

$$R_{wd} = \frac{(18\pi)^{2/3}}{10}\frac{\hbar^2}{G m_e M_{wd}^{1/3}}\left(\frac{Z}{A}\frac{1}{m_H}\right)^{5/3}$$ （R-M关系）

$$L_{wd} = C T_c^{7/2}$$

$$\hookrightarrow \frac{4D^3}{17}\frac{16\pi ac}{3}\frac{GM_H}{\kappa_0 k}\mu M_{wd} = 6.65\times10^{-3}\frac{M_{wd}}{M_\odot}\frac{\mu}{Z(1+X)}$$ （中心条件）

$$\tau_{cool} = \frac{\frac{M_{wd}}{A m_H}\frac{3}{2}kT}{L_{wd}}$$ （冷却时标）

$$T_c(t) = T_0\left(1+\frac{5}{2}\frac{t}{\tau_0}\right)^{-2/5}$$ （光度演化）

中子星：电子简并压不够抵抗，电子被俘获，逆β衰变成为n
- $M\sim1.4M_\odot$，$R\sim10km$，$g\simeq1.8\times10^{12}\ m\cdot s^{-2}$
- $M_{op} \simeq 2$–$3M_\odot$（上限）
- $R_{ns} \simeq \frac{(18\pi)^{2/3}}{10}\frac{\hbar^2}{G M_{ns}^{1/3}}\left(\frac{1}{m_H}\right)^{8/3}$

脉冲星、磁偶极辐射：$\frac{dE}{dt} = -\frac{B_p^2 R_n^6 \Omega^4 \sin^2\alpha}{6c^3}$

黑洞：
- 引力红移 $z = \left(1-\frac{2GM}{rc^2}\right)^{-1/2} - 1$，Schwarzschild/Kerr黑洞
- $r = \frac{2GM}{c^2} \simeq 3km\frac{M}{M_\odot}$

Ch8 双星演化

1. 密近双星系统的引力

拉格朗日点、等势面 → L_1, L_2, L_3, L_4, L_5

双星系统的分类
- 分离双星
- 半相接
- 相接双星

质量转移率 $\dot{M} \simeq \rho \pi R d \sqrt{\frac{3kT}{m_H}}$

物质下落能量 $G\frac{Mm}{R}$

2. 吸积盘

吸积、吸积盘、粘滞

温度轮廓 $T = \left(\frac{GM\dot{M}}{8\pi\sigma R^3}\right)^{1/4}\left(\frac{R}{r}\right)^{3/4} \xrightarrow{\text{更精确}} \underbrace{\left(\frac{3GM\dot{M}}{8\pi\sigma R^3}\right)^{\frac{1}{4}}}_{T_{disk}}\left(\frac{R}{r}\right)^{3/4}\left(1-\sqrt{\frac{R}{r}}\right)^{1/4}$

$L_{disk} = G\frac{M\dot{M}}{2R}$ 为引力能的一半

环绕半径 $L = m\sqrt{GM_1 r_{circ}}$

角动量

$r_{circ} \simeq a\left(0.5 - 0.227\log_{10}\left(\frac{M_2}{M_1}\right)\right)^4\left(1+\frac{M_2}{M_1}\right)$

3. 相互作用双星

质量转移效应 $\frac{1}{\omega}\frac{d\omega}{dt} = -\frac{3}{2}\frac{1}{a}\frac{da}{dt}$

$\frac{1}{a}\frac{da}{dt} = 2\dot{M}_1\frac{M_1-M_2}{M_1M_2}$

双星的演化

$M_1 - M_2 > 0$

↓

M_1 成为巨星，充满 Lobe 瓣

↓

$\dot{M}_1 < 0$ 质量转移 $\frac{d\omega}{dt} > 0$，$\dot{a} < 0$

↓

相接双星，公共包层阶段

↓

M_1 为 WD，M_2 为巨星，反向流动

若有稳定流动，就可能形成激变变星